NOTAS SOBRE OSCILACIONES DE MASA EN CHIMENEAS DE EQUILIBRIO

Por LUIS TORRENT
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

El presente trabajo sobre el interesante tema epigrafiado fué remitido a nuestra Redacción en julio del año pasado; pero la abundancia de original en general, y muy especialmente en materia de hidráulica, nos ha impedido publicarlo hasta la fecha, y así lo hacemos constar, a petición del autor, para evitar cualquier malentendido por la aparición de trabajos sobre el mismo tema en otras publicaciones.

I

Las ecuaciones que definen las oscilaciones de masa en una chimenea de equilibrio consecutivas a una maniobra del regulador de las turbinas son, para un caso general:

$$\left.\begin{aligned} \frac{L}{g}\frac{dw}{dt} + z \pm p\,w^2 \pm p_1 (w_r - w)^2 = 0 \\ f\,w = f\,w_r + F\frac{dz}{dt} = Q_r + F\frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

L = longitud de la galería a presión (m.),
g = aceleración de la gravedad (m./seg.²),
w = velocidad del agua en la galería (m./seg.) ($w > 0$ para el movimiento hacia la turbina; $w < 0$ para el movimiento hacia el embalse),
w_r = velocidad de régimen (m./seg.) correspondiente a la posición del regulador,
t = tiempo (seg.),
z = nivel del agua en la chimenea respecto al nivel estático (m.),
p = pérdidas de carga en la galería para $w = 1$,
p_1 = pérdidas de carga en la inserción de la chimenea para $w_r - w = 1$,
f = sección de la galería (m.²),
F = sección de la chimenea (m.²),
Q_r = caudal de régimen $= f\,w_r$.

Si en estas ecuaciones eliminamos dt, obtendremos la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dw} = \frac{Lf}{Fg}\,\frac{w_r - w}{z \pm p\,w^2 \pm p_1 (w_r - w)^2}, \quad [2]$$

cuya representación en ejes cartesianos w, z es la típica espiral que, partiendo del punto (w_0, z_0) inicial, se enrosca asintóticamente al punto de equilibrio final (w_r, z_r).

La ecuación es la misma para aperturas o cierres instantáneos de las turbinas, parciales o totales. Basta en cada caso dar a w_r el valor que corresponda a la posición del regulador. Las pérdidas de carga se toman siempre en el sentido de la corriente. Es decir: p tiene el mismo signo que w; p_1 tiene el signo de $(w - w_r)$.

Para cada velocidad de régimen w_r, existe una familia de curvas que cumplen la ecuación [2]. Dos curvas de la misma familia no tienen más puntos comunes que el asintótico, ya que cada par de valores w_i; z_i define un solo valor de $\frac{dz}{dw}$. El aspecto de la familia de curvas correspondientes a un w_r dado es el de una serie de espirales intercaladas unas entre otras sin cortarse.

Los puntos asintóticos de los distintos grados de apertura están situados sobre la parábola de equilibrio dinámico

$$z \pm p\, w^2 = 0 .$$

Los máximos o mínimos de oscilación en la chimenea se obtienen para $w = w_r$.

Los máximos o mínimos de velocidad del agua en la galería se hallan haciendo $d\,w = 0$, o sea,

$$z \pm p\, w^2 \pm p_1 (w_r - w)^2 = 0 ,$$

$+ p_1$ dará el máximo de velocidad,

$- p_1$ dará el mínimo.

En el caso de chimeneas sin pérdida de carga en la inserción con la galería ($p_1 = 0$), las tangentes verticales a la espiral corresponden a los puntos de intersección con la parábola [3]. Las aperturas o cierres instantáneos a partir de cualquier posición de equilibrio arrancan en este caso con tangente vertical. En cambio, si $p_1 \neq 0$, la tangente de la curva a partir de un punto de equilibrio sería:

$$\frac{d\,z}{d\,w} = \pm \frac{L\,f}{F\,g} \, \frac{1}{p_1 (w_r - w)} .$$

II

Hemos analizado hasta aquí la ecuación del movimiento de masa para un solo valor de w_r, es decir, en el caso de oscilaciones simples de la chimenea para aperturas o cierres supuestos instantáneos. Esta suposición no es exacta, ya que los tiempos de maniobra de turbinas no son nulos, si bien su duración es breve comparada con el período de las oscilaciones. La consideración de la ley de maniobra de apertura o cierre en función del tiempo es sencilla si se trabaja con las ecuaciones [1]; no así con la [2], en la que se ha eliminado $d\,t$. El estudio que desarrollamos a continuación es posicional, prescindiendo de situar en el tiempo las maniobras de los elementos de regulación.

Supongamos que efectuado un cierre o una apertura correspondiente a $w_r = w_1$, antes de que el nivel del agua haya llegado al equilibrio se cambia la posición del regulador a un nuevo valor $w_r = w_2$. Para el estudio de la chimenea interesa conocer cuál sería el nivel máximo o mínimo que se alcanzaría tras la segunda maniobra en el caso más desfavorable; es decir, determinar el punto pésimo de enlace de las espirales w_1 y w_2.

Hemos visto antes que las curvas de una misma familia se envuelven unas a otras sin cortarse. Por tanto, la espiral de la familia w_2, que dará el máximo maximorum de oscilación, será la más extrema de todas las que tienen puntos comunes con la w_1; es decir, la tangente a la curva que representa la primera oscilación.

El punto de tangencia se determina igualando los coeficientes angulares:

$$\frac{d\,z}{d\,w} = \frac{L\,f}{F\,g} \, \frac{w_1 - w}{z \pm p\, w^2 \pm p_1 (w_1 - w)^2} = \frac{L\,f}{F\,g} \, \frac{w_2 - w}{z \pm p\, w^2 \pm p_1 (w_2 - w)^2} ,$$

de donde se obtiene:

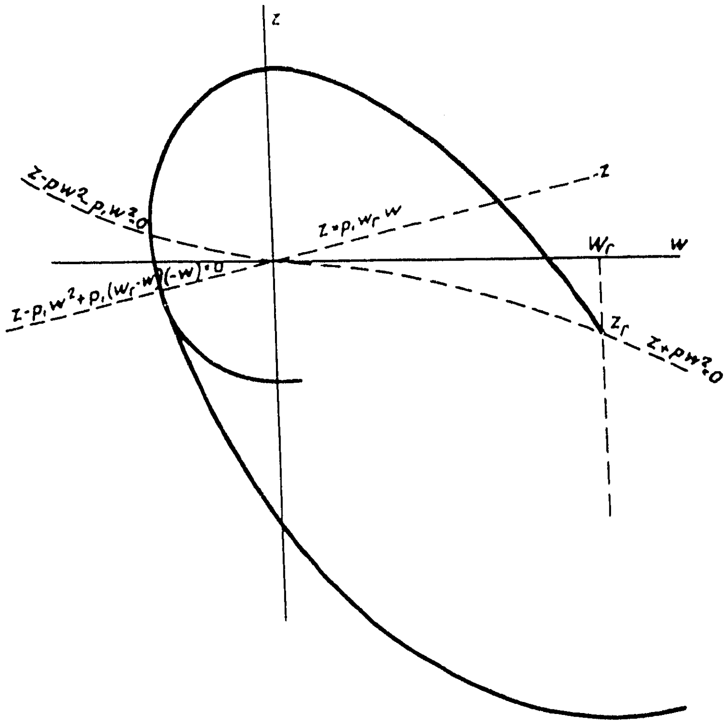
$$z \pm p\, w^2 \mp p_1 (w_1 - w)(w_2 - w) = 0 . \qquad [6]$$

De acuerdo con el convenio establecido, el signo de p será el de w; p_1 será positivo si la segunda maniobra es apertura, y negativo si es cierre.

La ecuación [6] representa una parábola que pasa por los puntos de equilibrio correspondientes a las dos posiciones del regulador analizadas (o sus simétricos respecto a $z = 0$, si $w < 0$). Si una de las posiciones fuera el cierre total, la parábola sería:

$$z \pm p\, w^2 \pm p_1\, w\, (w_1 - w) = 0\,. \qquad [7]$$

Si no hay estrangulamiento, ni se consideran pérdidas de carga en la inserción de la chimenea ($p_1 = 0$), el punto pésimo de enlace entre las oscilaciones consecutivas a dos maniobras viene definido por la intersección de la espiral de la primera



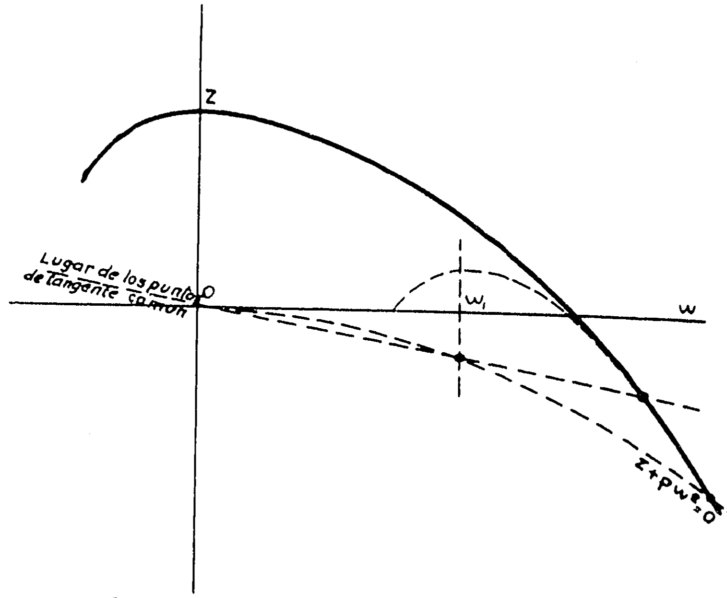
Resonancia cierre total-apertura
(se supone $p = p_1$; la parábola que da el punto de enlace pésimo se transforma en recta.

Figura 1.ª.

con la parábola de equilibrio dinámico. Por tanto, dos maniobras del mismo sentido (apertura-apertura o cierre-cierre) tienen su pésimo enlace en el origen de la espiral. En otras palabras: es más desfavorable siempre una apertura o un cierre total que dos o más consecutivos.

Para apertura seguida de cierre o viceversa, el punto de arranque más desfavorable de la segunda curva será un máximo o mínimo de velocidad de la primera, respectivamente. La resonancia pésima se establece entre maniobras totales instantáneas.

En chimeneas con pérdidas de carga en la inserción ($p_1 \neq 0$) el enlace entre las espirales de dos aperturas parciales (o dos cierres parciales) será pésimo en el punto de intersección con [6]. Esta parábola corta a las curvas w_1 y w_2 en puntos distin-



Resonancia entre dos cierres, uno parcial y a continuación uno total
(Se supone $p=p_1$, con lo que la parábola de tangencia se transforma en recta)

Figura 2.ª.

tos del origen; luego existe resonancia entre oscilaciones parciales correspondientes a maniobras del mismo sentido. A la misma conclusión se llega al considerar que la tangente en el origen de la espiral es más vertical cuanto menor el grado de apertura.

IV

Supongamos ahora que abrimos el regulador de la turbina una pequeña fracción $\frac{w_r}{n}$ de la máxima apertura. A continuación abrimos a $\frac{2\,w_r}{n}$, precisamente en el punto pésimo correspondiente a las curvas de estas dos posiciones del obturador, punto que vendrá determinado por:

$$z + p\,w^2 + p_1\left(\frac{w_r}{n} - w\right)\left(\frac{2\,w_r}{n} - w\right) = 0\,.$$

Abriremos después a $\frac{3\,w_r}{n}$, también en el instante pésimo de las curvas $\frac{2\,w_r}{n}$ y $\frac{3\,w_r}{n}$, y así sucesivamente.

El enlace entre las aperturas $\frac{m}{n}\,w_r$ y $\frac{m+1}{n}\,w_r$ vendrá determinado por la intersección con la parábola:

$$z + p\,w^2 + p_1\left(\frac{m}{n}\,w_r - w\right)\left(\frac{m+1}{n}\,w_r - w\right) = 0\,,$$

que para n, muy grande, podemos sustituir por

$$z + p\,w^2 + p_1\left(\frac{m}{n}\,w_r - w\right)^2 = 0\,.$$

Llegaremos a la apertura total w_r recorriendo los puntos pésimos de las curvas de aperturas parciales anteriores. El último estará determinado por:

$$z + p\,w^2 + p_1\,(w_r - w)^2 = 0\,. \qquad [8]$$

A partir de ese punto, como el regulador no se abre ya más, la ecuación del movimiento de masas será la [2].

La apertura gradual que hemos obtenido por este camino es la más desfavorable de todas las posibles aperturas.

V

Para obtener la expresión analítica de la curva correspondiente a esta maniobra pésima eliminaremos w_r entre las expresiones [2] y [8].

Resulta la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{Lf}{2gF}\,\frac{1}{\sqrt{-p_1\,(z + p\,w^2)}}\,. \qquad [9]$$

Haciendo la eliminación con las [1] y [8], se halla:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{f}{F}\sqrt{-\frac{z + p\,w^2}{p_1}} \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{2g}{L}\,(z + p\,w^2) \end{aligned}\right\} \qquad [10]$$

Estas ecuaciones no son integrables y, por tanto, la curva que definen ha de ser obtenida por incrementos finitos a partir de la posición inicial.

VI

De las ecuaciones [2] y [8] se deducen también:

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{Lf}{2Fg}\,\frac{1}{p_1\,(w_r - w)}\,,$$

o bien,

$$\frac{dz}{dw} = \frac{Lf}{2Fg}\,\frac{w_r - w}{z + p\,w^2}\,.$$

Ambas son expresiones de la tangente en el punto correspondiente a w_r en la curva [9]. La segunda equivale a la tangente a la espiral de una maniobra de amplitud w_r en una chimenea de sección doble sin pérdidas en la inserción; la primera indica que la tangente, en cada punto de la curva [9], determina sobre la ordenada correspondiente al valor instantáneo del grado de apertura correspondiente a dicho punto un segmento de longitud constante $\frac{Lf}{2 F g p_1}$ medido a partir de la ordenada del punto en cuestión.

Para una apertura total instantánea, la tangente en el origen de la espiral vale $-\frac{Lf}{F g p_1 w_r}$; en cambio, la curva de oscilación consecutiva a una maniobra de apertura pésima tiene su arranque vertical siempre que parta de una posición de equilibrio.

VII

Hemos estudiado un método gráfico para construir por puntos la curva de oscilación de una apertura pésima, con el que puede alcanzarse la aproximación que

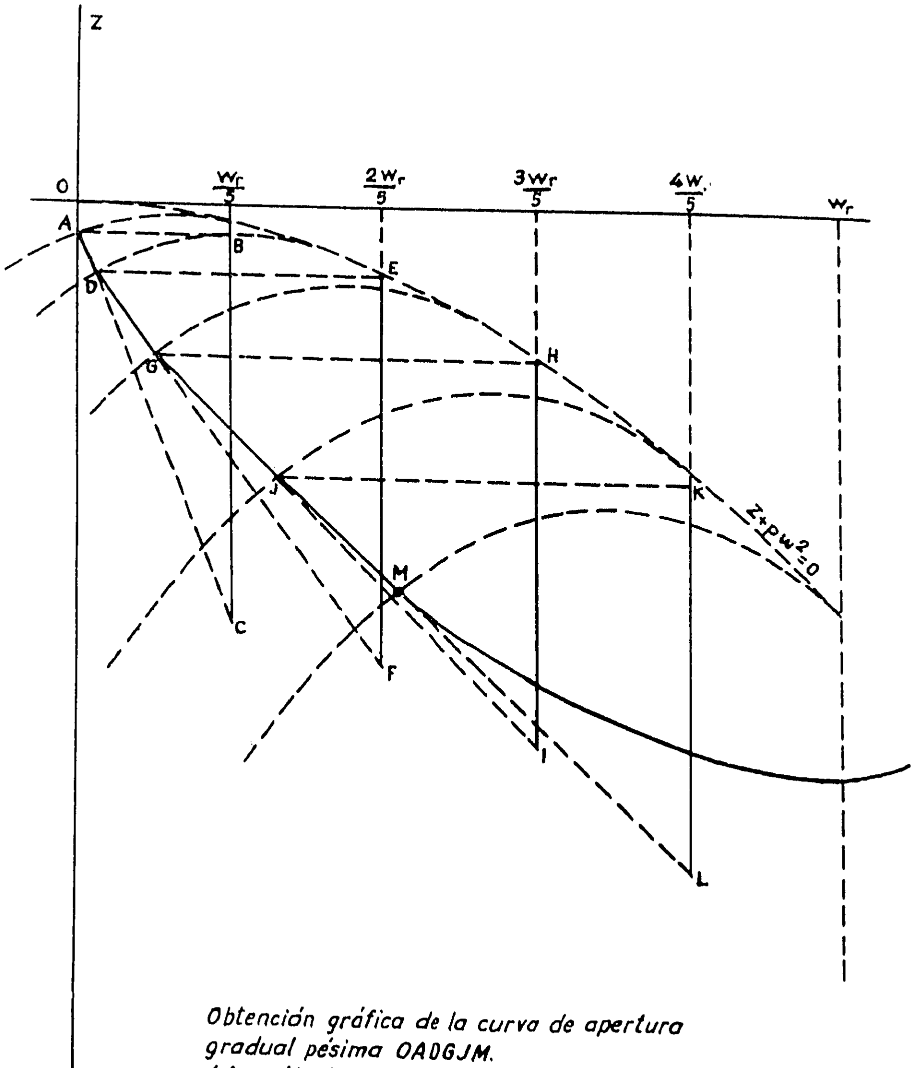


Figura 3.ª

se desee. El procedimiento se basa en sustituir la curva entre cada dos de las parábolas consecutivas señaladas en el párrafo IV correspondientes a velocidades de régimen $\frac{m}{n} w_r$ y $\frac{m+1}{n} w_r$, por la tangente determinada por la primera. La construcción es la siguiente:

Se dibuja la parábola de equilibrio dinámico $z + p w^2 = 0$.

Por sus puntos de abscisas $\frac{w_r}{n}$, $\frac{2 w_r}{n}$, ..., $\frac{m w_r}{n}$ ... w_r se le trazan las parábolas tangentes $z + p w^2 + p_1 \left(\frac{m}{n} w_r - w\right)^2 = 0$ (es una misma parábola trasladada paralelamente a sus ejes).

Partiendo del origen se traza una vertical. Su intersección A con la parábola $\frac{w_r}{n}$ se refiere horizontalmente a la recta $w = \frac{w_r}{n}$, obteniéndose un punto B. A partir de él, hacia abajo, se lleva el segmento $B C = \frac{L f}{2 F g p_1}$ y se une C con A. El punto que determina la recta $C A$ sobre la parábola $\frac{2 w_r}{n}$ (D), se refiere horizontalmente a la recta $w = \frac{2 w_r}{n}$ en E, y se vuelve a llevar el mismo segmento anterior $E F = \frac{L f}{2 F g p_1}$ y a unir F con D.

La intersección con la tercera parábola nos da G, y así sucesivamente hasta la parábola final.

A partir del punto obtenido sobre esta última, la ecuación de la apertura es la [2].

IX

Análogamente a lo expuesto anteriormente, referente a aperturas, sucede en los cierres de las turbinas. Se partirá entonces de un punto de equilibrio correspondiente a un w_r determinado, y se irá cerrando gradualmente el distribuidor. La curva pésima que se obtiene es:

$$\frac{d z}{d w} = - \frac{L f}{2 g F} \frac{1}{\sqrt{p_1 (z + p w^2)}} . \qquad [11]$$

y su construcción gráfica, por puntos, puede hacerse en forma semejante a la señalada para aperturas.

X

La determinación del punto de enlace pésimo entre las curvas consecutivas a maniobras de signo contrario es el extremo más interesante, desde un punto de vista práctico, de los reseñados anteriormente. El estudio se debe al ingeniero de Caminos D. Eduardo López Fernández.

En cambio, las curvas correspondientes a aperturas o cierres pésimos tienen un valor más teórico que práctico: en primer lugar, por la dificultad de obtención de sus puntos; en segundos, por la escasa diferencia que existe entre los valores finales de la oscilación a partir de ella con respecto a las maniobras instantáneas.

Hemos estudiado un ejemplo con una chimenea de las siguientes características:

$L = 760$ m. $\quad f = 12{,}57$ m.². $\quad F = 300$ m.².

$Q_r = 40$ m.³/seg. $\quad p = 0{,}15 \quad p_1 = 0{,}21$

(La pérdida de carga en la inserción es notablemente inferior al estrangulamiento óptimo.)

La curva de niveles en la chimenea producidos por una maniobra de apertura pésima, obtenida por puntos gráficamente, tiene su extremo válido en $w = 0{,}3915$ metros/seg., $z = -1{,}658$ m. (escalones de apertura de 4 m.³/seg.)

Se ha calculado también analíticamente la apertura pésima escalonada de 0,5 en 0,5 m.³/seg., integrando por puntos las curvas parciales, con intervalos de 0,02 segundos y determinando los puntos de resonancia entre cada dos grados de apertura consecutivos (80 en total) (1).

Las fórmulas de integración utilizadas son:

$$w_{i+1} = \frac{\left(\frac{L}{g\,\Delta t} - \frac{f\,\Delta t}{4\,F}\right) w_i - z_i + \frac{Q\,m}{2\,F}\,\Delta t + \left| p_1\, w_r \,(w_r - w) \right|}{\frac{L}{g\,\Delta t} + \frac{f\,\Delta t}{4\,F} + \left| p\, w_i \right| + \left| p_1\,(w_r - w_i) \right|},$$

$$\Delta z = \frac{f\,\Delta t}{2\,F}\,(w_i + w_{i+1}) - \frac{Q\,m}{F}\,\Delta t,$$

La curva pésima obtenida analíticamente termina en $w = 0{,}3928$, $z = -1{,}6360$.

Integrando la apertura total instantánea al valor de $w = 0{,}3927$, corresponde una cota $z = -1{,}4544$; es decir, 0,1816 m. por encima del nivel de la curva de apertura pésima.

El límite inferior de oscilación de la apertura total instantánea es $z = -4{,}8707$. Partiendo de la apertura gradual, el descenso máximo es de 4,9443 m.

El método gráfico reseñado anteriormente no permite determinar el tiempo que debe durar la maniobra del regulador (ni la ley de esta maniobra) para que se produzca el caso más desfavorable. Analíticamente, en el ejemplo anterior, resulta un tiempo de apertura gradual de 27,86 segundos con ley prácticamente uniforme. La maniobra pésima es, pues, más lenta que la real de la turbina, ya que ésta dura ordinariamente de 5 a 10 segundos. De ello se infiere que las oscilaciones reales en la chimenea estarán comprendidas entre los valores instantáneos y pésimos; más acusadas, por lo tanto, que las correspondientes a la maniobra instantánea.

XI

Conclusiones.

Para el estudio de las numerosas chimeneas de equilibrio que ha proyectado el Departamento de Construcción de Auxini, hemos dispuesto de abundante bibliografía sobre esta materia. En todas las publicaciones consultadas se admite la simplificación de cálculo de suponer instantáneas las maniobras de regulación de las turbinas, dando como cierto que esta hipótesis es pesimista respecto a la maniobra lineal de corta duración. De acuerdo con nuestro estudio, en las chimeneas con estrangulamiento o simplemente con formas de inserción que produzcan pérdidas de carga apreciables, la oscilación del agua a continuación de una maniobra real de las turbinas alcanza valores superiores a los que se obtienen con la simplificación citada.

(1) Los cálculos se han efectuado con ordenador electrónico, habiendo praparado los programas de señores Garrido Bartolomé, ingeniero de Caminos, y San Miguel Romero, ayudante de Obras Públicas, ambos de la Sección de Estudios Hidráulicos de Auxini.