

# PENDIENTES, CURVATURAS Y ALABEOS DE LA SUPERFICIE DE UN TERRENO O DE UN ESTRATO

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENITEZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

*Definiendo teóricamente la pendiente media de un terreno, se indican diversos procedimientos prácticos de determinarla, tanto cuando se conocen las cotas de algunos puntos, como cuando el terreno está representado por sus curvas de nivel.*

*Por el interés que pueda tener en el conocimiento del relieve del suelo o de un estrato se estudian sus curvaturas y alabeos, aplicando los fundamentos de la teoría de superficies.*

*Se da una definición analítica de divisorias y vaguadas, y se inicia un estudio teórico de su desplazamiento en el caso de un pequeño basculamiento en bloque del terreno.*

*Dada la extensión de este interesante trabajo lo dividimos en dos artículos, completando la publicación en el número próximo.*

## 1. Su importancia.

Es indudable la importancia considerable que las cuestiones enunciadas tienen, tanto en la ciencia pura como en la aplicada. Así, tenemos, por ejemplo:

a) En el estudio del relieve en *Geomorfología* se define el "índice de accidentación" (1) como pendiente media total de una región.

Los histogramas, o curvas de distribución de frecuencias, tanto de altitudes como de pendientes, permiten interpretaciones acerca de los ciclos de erosión de una comarca, determinación de los contrastes de relieve, etc.

La fotografía aérea constituye hoy un poderoso auxiliar. Las operaciones de cálculo se facilitan extraordinariamente utilizando ordenadores electrónicos (2).

b) En los estudios hidrológicos, la determinación del coeficiente de escorrentía depende de lo accidentado del terreno o de la cuenca de alimentación. Esta, a su vez, se considera más o menos accidentada según su pendiente media (3).

c) En Geología estructural (4) puede interesar además del estudio de los buzamientos, arrastres, etc., de los pliegues, la determinación de sus curvaturas y ala-

(1) Carlos García Valdeavellano y Arcimis: "Geografía física y estadística". *Boletín de la Real Sociedad Española de Historia Natural*, tomo LVIII, 1960, págs. 105 a 132, y también "El método geomorfológico en Geografía Física". *Publicaciones de la Real Sociedad Geográfica*, serie B, núm. 392, 1958.

El estudio de la formación de las laderas, se aborda en el libro de Adrián E. Scheidegger: "Theoretical Geomorphology". Ed. Springer, 1961, en sus capítulos "Development of Slopes" y "Mechanics of Slope Formation".

(2) I. Rosso de Luna: "La geomorfometría o estudio matemático-estadístico del relieve en geomorfología". *Bol. de la R. Soc. Esp. de Hist. Nat. (Geol.)*, 63, págs. 267 a 287, 1965.

(3) La Instrucción vigente de nuestra Dirección General de Carreteras 5.1-IC relativa a "Drenaje" define el relieve como muy accidentado, accidentado, ondulado y llano, según que las pendientes sean, respectivamente, superiores al 30 por 100, entre el 10 y el 30 por 100, del 5 al 10 por 100, e inferiores al 5 por 100. A base de ellas y de otros factores, como permeabilidad del suelo, vegetación, etc., se definen los coeficientes de escorrentía.

(4) Marland P. Billing: "Geología estructural". Eudeba (Edit. Univ. de B. Aires). También, L.U. de Sitter: "Geología estructural". Ediciones Omega, S. A. Barcelona, 1962.

beos. Indirectamente, de éstos podrían deducirse algunas conclusiones acerca de los movimientos y de las fuerzas de presión que han dado lugar a la actual disposición de los estratos.

En lo que sigue daremos las fórmulas elementales de Geometría analítica y de Geometría diferencial, que son fundamentales para exponer con generalidad los problemas que nos interesan.

Haremos aplicación a superficies sencillas como planos, cilindros, conos, parabolooides, superficies de revolución, etc.

Para que la aplicación de lo expuesto sea sencilla e inmediata, damos fórmulas aproximadas y métodos gráficos.

Utilizaremos las notaciones normales de derivadas parciales.

## 2. Pendientes en un punto de la superficie de un terreno.

En la representación de una superficie por sus curvas de nivel, la *pendiente media entre dos puntos* viene definida por el cociente entre su diferencia de cotas o de altitudes y la distancia, *medida en proyección horizontal*, entre dichos puntos. Es, pues, igual a la tangente trigonométrica del ángulo que la recta que une los dos puntos forma con el plano horizontal.

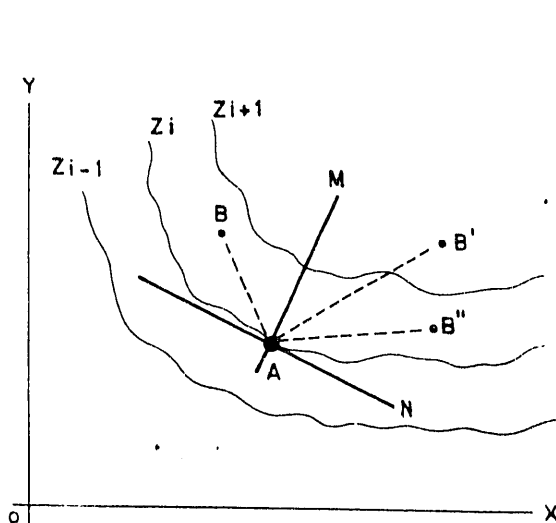


Figura 1.ª

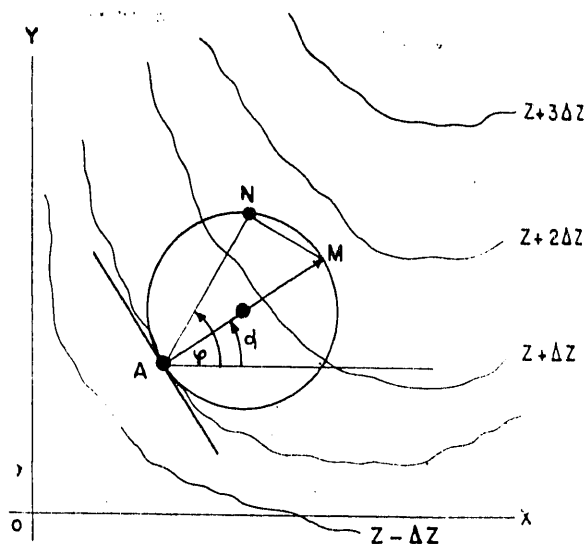


Figura 2.ª

Considerando un punto A de la superficie, podemos unirlo con puntos B, B' y B'' muy próximos de dicha superficie. Obtendremos distintas rectas AB, AB', AB'', etc., que tendrán distintas pendientes con respecto al plano horizontal XOY. Si aproximamos indefinidamente al punto A los puntos B, B', B'', etc., las citadas rectas tenderán a estar situadas en un plano que será precisamente el plano tangente a la superficie en el punto A.

Entre las infinitas rectas de este plano que pasan por A, hay una AN que es paralela al plano horizontal (pendiente nula o tangente a la curva de nivel que pasa por A) y otra AM que forma con el mismo la máxima pendiente. Las demás rectas del plano forman o tienen pendientes intermedias.

Veamos cómo se distribuyen estas diversas pendientes.

Sabido es que si  $AM$  es la máxima pendiente (fig. 2.<sup>a</sup>) en dirección y magnitud a *escala* (por ejemplo,  $AM = 25$  mm. si la pendiente es del 25 por 100), la pendiente del terreno en una dirección cualquiera  $AN$  (cuya proyección sobre el plano horizontal forma el ángulo  $\varphi$  con el eje  $OX$ ) es en dirección y magnitud la proyección de  $AM$  sobre dicha dirección.

Así, resulta que los extremos de los vectores representativos de las diversas pendientes están en una circunferencia que tiene por diámetro el correspondiente a la máxima pendiente.

### 3. Propiedades de las pendientes en un punto.

Algunas propiedades, que pueden tener aplicación práctica, son las siguientes:

I. Componiendo los vectores  $AP$  y  $AQ$  (fig. 3.<sup>a</sup>) representativos de las pendientes correspondientes a dos direcciones, cuyas proyecciones sobre el plano horizontal sean perpendiculares, se obtiene, en magnitud y dirección, la máxima pendiente.

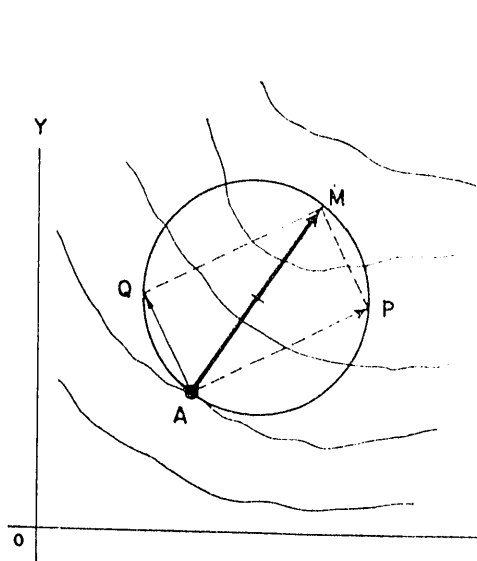


Figura 3.<sup>a</sup>

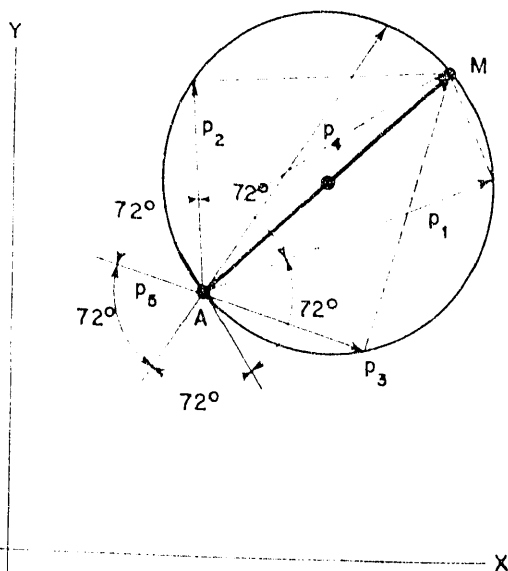


Figura 4.<sup>a</sup>

Así, resulta, por ejemplo, que si una carretera tiene una pendiente longitudinal del 7,7 por 100 y en una curva se le da un peralte del 8 por 100, se obtiene que la pendiente máxima del pavimento es:

$$\sqrt{7,7^2 + 8^2} = 11,4 \% (5).$$

II. La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las pendientes que corresponden a dos rumbos o acimutes perpendiculares es constante e igual a la pendiente máxima. Es consecuencia de lo anterior.

(5) La vigente Instrucción de Carreteras llega por este motivo a limitar el peralte de las curvas. De otro modo podrían resultar pendientes máximas excesivas no convenientes para vehículos lentos o parados, o para la debida estabilidad del firme o del pavimento. Véase Norma 3.1-I.C., pág. 12, figura 5.<sup>a</sup>.

III. Otra propiedad menos conocida y utilizada, pero de fácil deducción, que en realidad es una generalización de las anteriores, es la siguiente:

La media cuadrática de las pendientes que corresponden a  $n$  rumbos que forman ángulos a  $360^\circ : n$ , es constante e igual a la pendiente máxima multiplicada por:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad (6).$$

Así resulta que si en un punto de un terreno medimos las pendientes  $p_1, p_2, p_3, p_4$  y  $p_5$  correspondientes a  $n = 5$  rumbos (fig. 4.<sup>a</sup>) que entre sí forman ángulos de  $360^\circ : 5 = 72^\circ$ , se tiene que:

$$\text{máx. pendiente} = \sqrt{\frac{2p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2}{5}}.$$

#### 4. Expresión analítica de las pendientes.

Si la superficie de un terreno o la media de un estrato suponemos que se puede expresar en la forma  $Z = f(x, y)$  que nos indica cada punto de coordenadas cartesianas rectangulares horizontales  $(x, y)$  tiene la cota  $Z$  dada por dicha expresión, las curvas de nivel correspondientes a las cotas de altitud  $Z_1, Z_2$ , etc., vienen dadas respectivamente por  $f(x, y) = Z_1, f(x, y) = Z_2$ , etc.

Si utilizamos, como es costumbre, la notación de derivadas parciales primeras y segundas:

$$p = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad q = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad r = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad s = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \quad t = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2};$$

el plano tangente en el punto  $(x_0, y_0)$  es:

$$Z - Z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0).$$

La máxima pendiente es, en dirección y magnitud, igual al *gradiente de la función  $Z$*  (7).

(6) Como demostraremos más adelante, si  $p$  y  $q$  son las pendientes de líneas resultado de cortar el terreno por planos verticales paralelos a los ejes  $OX$  y  $OY$ , respectivamente, la pendiente correspondiente a un rumbo:

$$\varphi + \frac{2\pi}{n}i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \text{ es,}$$

$$p_i = p \cos \left( \varphi_i + \frac{2\pi}{n}i \right) + q \sin \left( \varphi + \frac{2\pi}{n}i \right).$$

Si realizamos la suma:  $\sum_{i=1}^n p_i^2$ , al efectuar operaciones y simplificar se elimina  $\varphi$  y queda:

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 = 2n(p^2 + q^2).$$

Pero como:  $\sqrt{p^2 + q^2}$  es la máxima pendiente, resulta máx. pte. =  $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i^2}{2n}}$ , como queríamos probar.

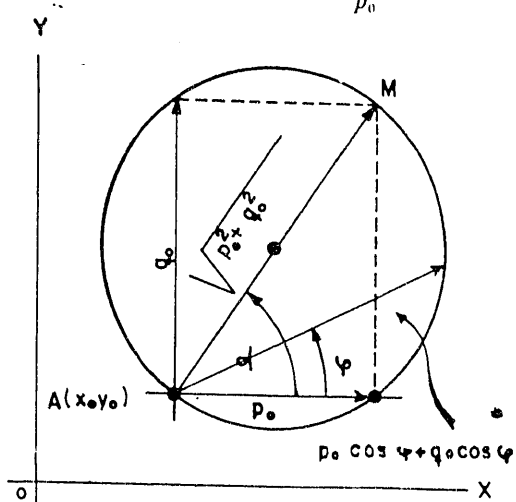
Podría también demostrarse esto de manera más inmediata por consideraciones gráficas.

(7) En realidad, orientado el eje  $OZ$  hacia arriba, el *vector gradiente* quedaría orientado en el sentido contrario al de caída o resbalamiento de un cuerpo situado sobre el terreno. Así, no cambiamos de signo las fórmulas.

Tiene, por tanto, por proyecciones sobre los ejes  $OX$  y  $OY$ ,  $p_0$  y  $q_0$ , respectivamente (fig. 5.<sup>a</sup>).

El ángulo que su proyección sobre el plano  $XOY$  forma

El ángulo que su proyección sobre el plano  $XOY$  forma con el eje  $OX$  es  $\alpha$ , verificándose que:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_0}{p_0}$ .



La pendiente que corresponde a un rumbo  $\varphi$  es en realidad la derivada parcial según dicha dirección  $\varphi$ , y viene dada por:

$$p = p_0 \cos \varphi + q_0 \sin \varphi,$$

Cuando  $\varphi = 0$  obtenemos la derivada parcial  $p_0$  de  $z$  con respecto a  $X$ .

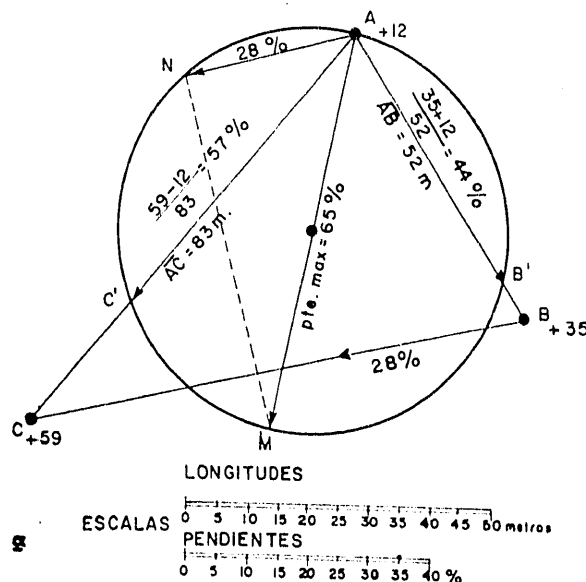
Cuando  $\varphi = 90^\circ$  obtenemos la derivada parcial  $y_0$  de  $z$  con respecto a  $Y$ .

Cuando  $\varphi = \alpha$  obtenemos el valor máximo de la derivada = pendiente máx. =  $\sqrt{p_0^2 + q_0^2}$ .

Figura 5.4

5. Pendiente máxima en un punto A, conociendo su cota y la de dos puntos próximos B y C.

Basta trazar sobre  $AB$  un segmento  $AB'$  proporcional a la pendiente existente entre los puntos  $A$  y  $B$  (8), y sobre  $AC$  otro  $AC'$  proporcional a la existen-

Figura 6.<sup>a</sup>

(8) Hacemos observar la dirección de las pendientes que viene representada por su proyección sobre el plano horizontal. Pero la magnitud sobre este plano será la verdadera de la pendiente (a escala), y no su proyección. De otra forma no podríamos hacer las construcciones gráficas en la forma que indicamos.

te entre A y C. El diámetro AM de la circunferencia que pasa por A, B' y C' nos da en magnitud y en posición (proyección horizontal) la pendiente máxima.  
El segmento AN, paralelo a BC, nos da la medida de la pendiente existente entre B y C.

### Observaciones.

I. En el caso particular de ser AB y AC perpendiculares, AM, que es la diagonal del rectángulo de lados AB' y AC', nos da en posición y magnitud la máxima pendiente.

II. Si consideramos más de dos puntos, como B, C, D, E, F, los puntos B', C', D', E', F' estarán todos en la misma circunferencia de diámetro AM = máxima pendiente, con tal de que estén aquellos puntos muy próximos al A.

### 6. Pendiente media de una zona conociendo las posiciones y cotas de varios puntos A, B, C, D. (Fig. 7.<sup>a</sup>)

Uniendo entre sí los puntos podemos formar triángulos de áreas  $S_1, S_2, S_3, \dots$ . Utilizando los lados de los triángulos ABC, ACD, etc., como hicimos anteriormente,

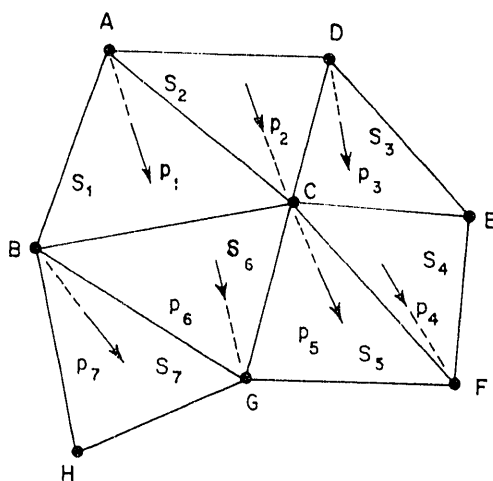


Figura 7.<sup>a</sup>

te, determinaríamos los segmentos  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , representativos en magnitud y dirección de la máxima pendiente de cada triángulo, de área  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , respectivamente.

La pendiente media o índice de accidentación será la media ponderada:

$$I = \frac{p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3 + \dots}{S_1 + S_2 + S_3 + \dots}$$

7. Pendiente media de un terreno conociendo las cotas de puntos situados en los vértices de una cuadrícula de lado  $a$ .

Consideramos el punto  $k$  y los puntos próximos  $i, l, m, n$ , indicados en la figura 8.<sup>a</sup>.

Sus cotas las indicaremos por las mismas letras  $m, n, i, l$ .

Como valor aproximado de las derivadas parciales o pen-

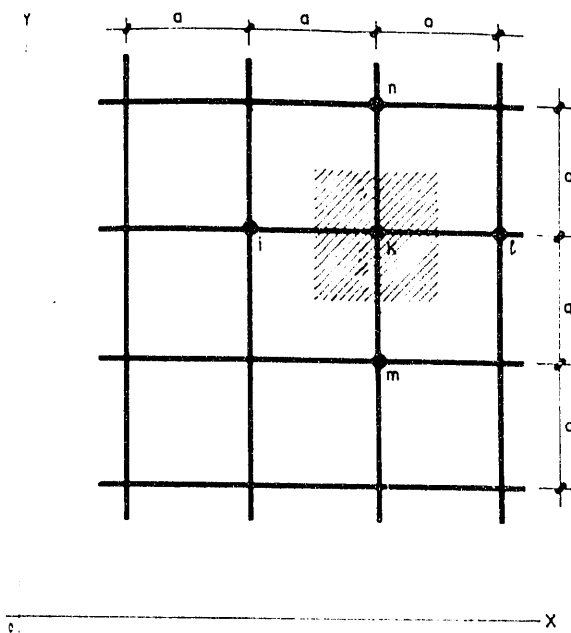


Figura 8.<sup>a</sup>

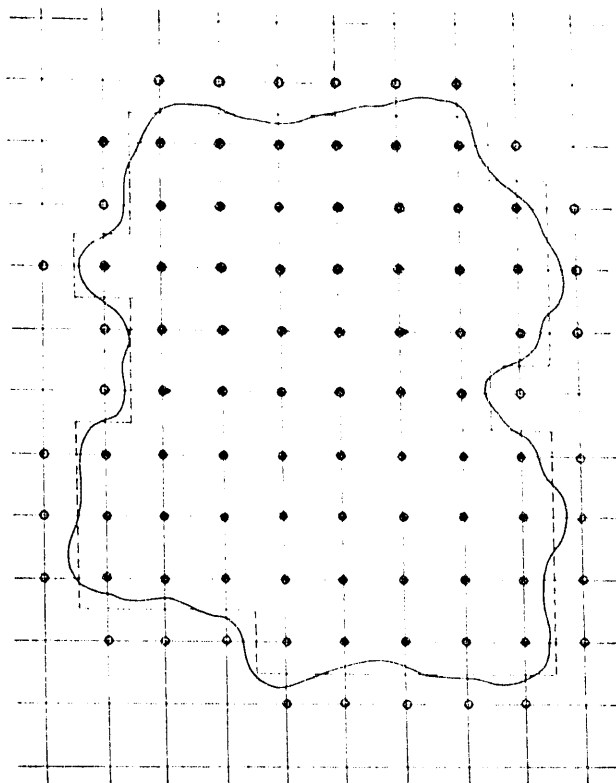


Figura 9.<sup>a</sup>

dientes en dirección paralela a los ejes coordenados podemos tomar:

$$p = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{l - i}{2a}; \quad q = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{n - m}{2a} \quad (9).$$

La pendiente máxima en un cuadrado de lado  $a$  y centro  $K$  será aproximadamente:

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{\frac{(l - i)^2 + (n - m)^2}{2a^2}}.$$

Por tanto, el índice de accidentación será:

$$I = \frac{\sum \sqrt{(l - i)^2 + (n - m)^2}}{2an}.$$

En el caso de la figura 9.<sup>a</sup> el número de puntos es  $n = 63$  (con círculo negro) situados en el interior de la zona a estudiar.

(9) Para las expresiones aproximadas de las derivadas de diversos órdenes, véase, por ejemplo, Beton-Kalender, 1963, pág. 446 y siguientes, "Der Ersatz der Differentiale durch Differenzen". Las ecuaciones en derivadas parciales pueden sustituirse para las aplicaciones prácticas por sistemas de ecuaciones lineales.

Los métodos de *relajación*, utilizados desde hace treinta años, nos permiten abordar la resolución de dichos sistemas de modo más o menos aproximado. Son clásicas las obras de Southwell: "Relaxation Methods in Engineering Science", 1940, y "Relaxation Methods in Theoretical Physics", 1946, y los de F. S. Shaw: "Introduction to Relaxation Methods", 1953, y D. N. G. Allen: "Relaxation Methods".

También, en los cálculos habrá que considerar las cotas de los puntos (con círculo claro) situados en el exterior, junto al contorno.

# 8. Método simplificado para determinar la pendiente media o "índice de accidentación" de una zona representada por curvas de nivel.

Si llamamos (fig. 10):

$S$  == superficie de la zona (en m.<sup>2</sup>).

$h$  == equidistancia entre las curvas de nivel (en metros).

$\Sigma l$  == suma de las longitudes de todas las curvas de nivel de la zona considerada (en metros).

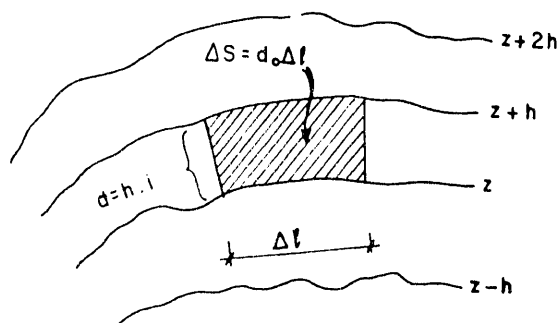


Figura 10.

el índice de accidentación vale:

$$I = \frac{h}{S} \Sigma l.$$

Su demostración es inmediata, ya que si  $d$  es la mínima distancia entre dos curvas de nivel, la máxima pendiente en un punto es  $i = h : d$ .

El elemento de área es:  $S = d \Delta l$ .

Como por definición:

$$I = \frac{\Sigma (i \cdot \Delta S)}{S},$$

sustituyendo los valores anteriores obtenemos:

$$I = \frac{\Sigma \left( \frac{\Delta S}{d} h \right)}{S} = \frac{h}{S} \Sigma l \quad (10).$$

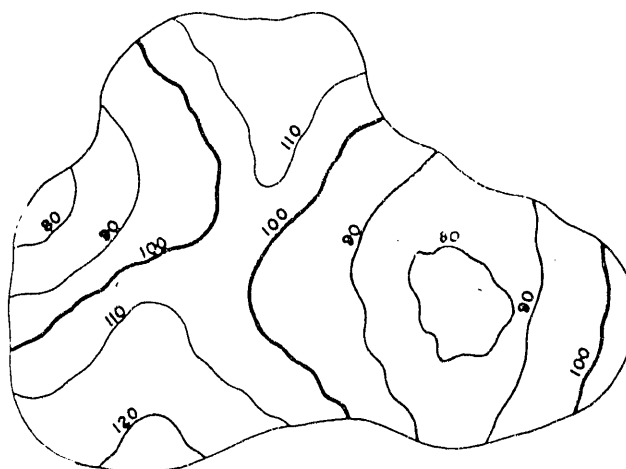
Así es que sólo con el auxilio de un *curvímetro* que nos dé la longitud total de las curvas de nivel  $\Sigma l$  y con un *planímetro* que nos dé la superficie  $S$  considerada, basta dividir la primera cantidad por la segunda y multiplicar el resultado por la equidistancia  $h$  entre las curvas de nivel para obtener el índice de accidentación  $I$ .

(10) J. Tricart et J. Muslin, 1951: "L'étude statistique des versants". *Revue de Géomorphologie Dynamique*.



Ejemplos: en el terreno representado en la figura 11 tenemos:

Longitud total de las curvas de nivel .....	$\Sigma l = 5.000$ m.
Extensión del terreno .....	$S = 250.000$ m. <sup>2</sup> .
Equidistancia entre curvas de nivel .....	$h = 10$ m.
Indice de accidentación: $I = \frac{5.000 \times 10}{250.000} = 20$ %.	



ESCALA

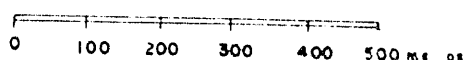


Figura 11.

## 9. Pendiente media de una superficie de ecuación dada.

Ya vimos que si  $Z = f(x, y)$  es su expresión analítica, la pendiente (máxima) en cada punto es (figura 12):

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}.$$

Por pendiente media de una zona o región de la superficie entenderemos la media ponderada de las pendientes puntuales extendidas a la proyección de los elementos de área sobre el plano horizontal. Matemáticamente será:

$$p = \frac{\iint \operatorname{tg} \gamma \, dx \, dy}{\iint dx \, dy} = \frac{\iint \sqrt{p^2 + q^2} \, dx \, dy}{\iint dx \, dy}.$$

Las integrales dobles se extienden a la proyección del área sobre el plano horizontal.

Ejemplos: I. *Pendiente de un plano* (figura 13). Si lo expresamos en la forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

como

$$z = -\frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y + c \quad p = \frac{c}{a} \quad q = \frac{c}{b} \quad \text{tg } \gamma = c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}},$$

luego  $p = \text{tg } \gamma = \text{constante}$ , como ya sabemos.

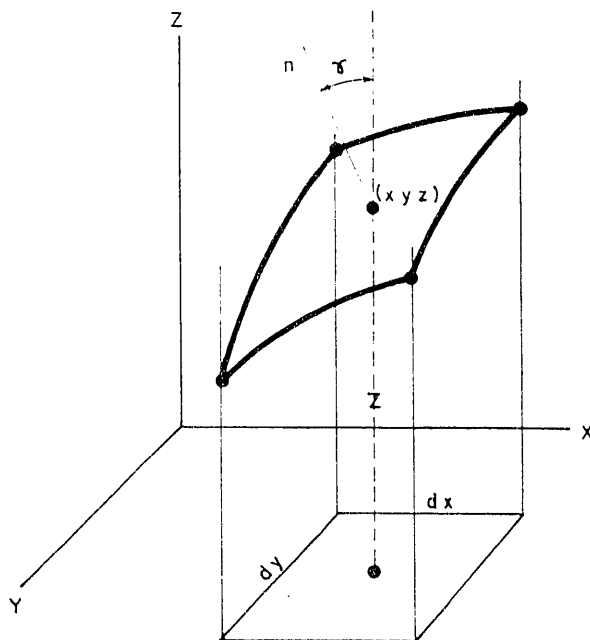


Figura 12.

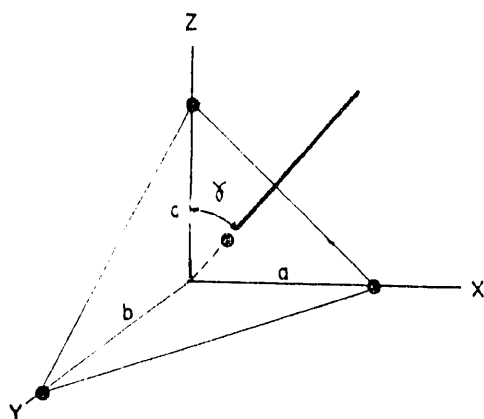


Figura 13

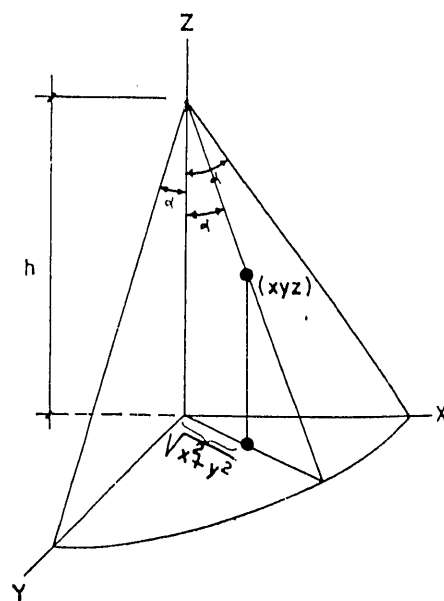


Figura 14.

II. *Pendiente de un cono de revolución* (figura 14) de eje vertical y semiángulo cónico  $\alpha$ . Si su vértice está sobre el eje  $OZ$  y tiene de coordenadas  $(0; 0; h)$ , la ecuación de su superficie es:

$$z = h \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{x^2 + y^2}} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{pend. máx.} = \sqrt{p^2 + q^2} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

también constante, como es evidente.

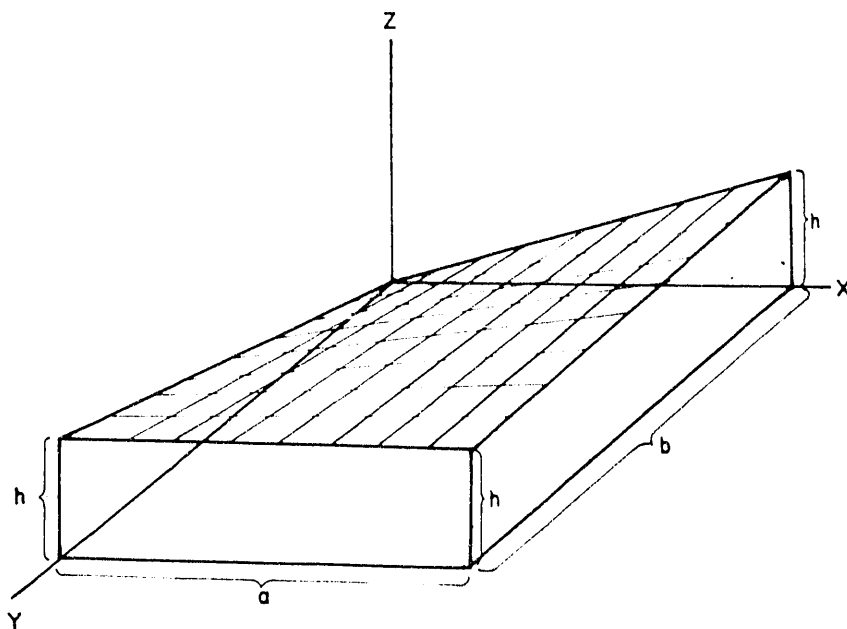


Figura 15.

III. *Paraboloide hiperbólico* (figura 15): — El indicado en la figura (terrazza) tiene por ecuación:

$$Z = h \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \frac{y}{b} \right),$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h}{ab} (b - y),$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h}{ab} (a - x),$$

$$\text{máx. pend.} = \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{h}{ab} \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}.$$

La pendiente media extendida al rectángulo de base horizontal  $a \times b$  será:

$$\text{pend. media} = \frac{h}{a^2 b^2} \int_0^a \int_0^b \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \, dx \, dy =$$

$$= \frac{h \sqrt{a^2 + b^2}}{2ab} + \frac{ha}{4b^2} \log \operatorname{nep} \left( b + \sqrt{a^2 + b^2} \right) + \frac{hb}{4a^2} \log \operatorname{nep} \left( a + \sqrt{a^2 + b^2} \right).$$

En el caso de ser  $a = b$  resulta:

$$\text{pend. media} = \frac{h}{2a} \left( \sqrt{2} + \log_{\text{nep}} (1 + \sqrt{2}) \right) = 1,097 \frac{h}{a},$$

que es un valor intermedio entre la pendiente en el origen que es  $\frac{1}{2} \frac{h}{a}$  y en el punto más alto que es nula.

IV. *Superficies de revolución de eje vertical.* — Como éste es el OZ tiene de ecuación (fig. 16):

$$Z = f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

La pendiente máxima en un punto se deduce sabiendo que como:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{pend. máx.} = \sqrt{p^2 + q^2} = f'(r),$$

lo cual es evidente, pues es la pendiente de un punto de la sección meridiana con respecto a un plano perpendicular al eje.

La pendiente media comprendida entre los paralelos de radios  $r_1$  y  $r_2$  será:

$$I = \frac{\int_{r_1}^{r_2} f'(r) 2\pi r dr}{\pi (r_1^2 - r_2^2)} = \frac{2}{r_1^2 - r_2^2} \int_{r_2}^{r_1} f'(r) \cdot r dr.$$

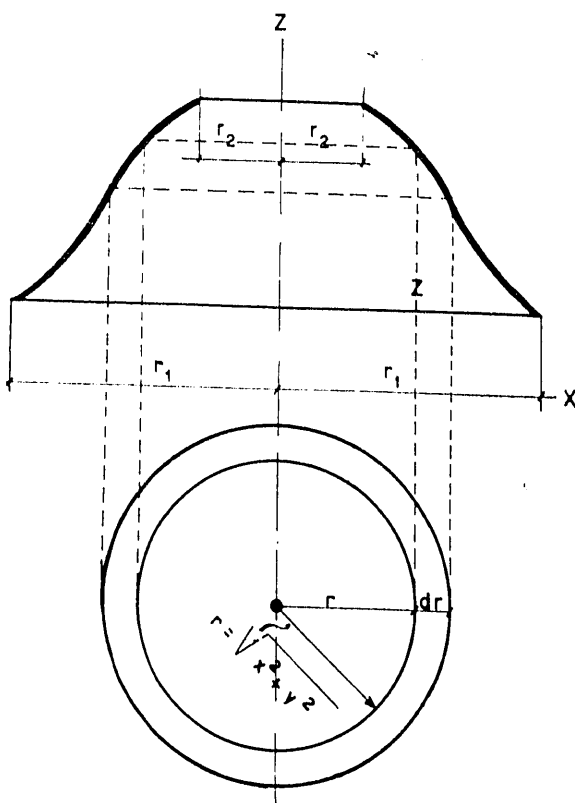


Figura 16.

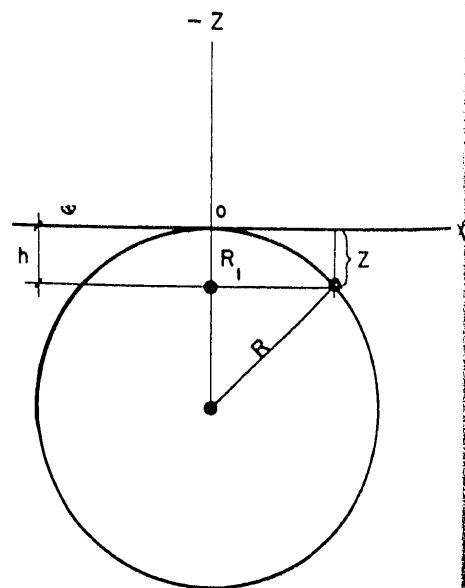


Figura 17.

V. Como ejemplo de lo anterior consideremos el *casquete esférico* de la figura 17. La ecuación de su superficie es:

$$x^2 + y^2 + (Z - R)^2 = R^2 \text{ ó sea } Z = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

$$\text{Como } r^2 = x^2 + y^2 \quad Z = R - \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Aplicando la fórmula anterior, como  $r_1 = 0$   $r_2 = R_1$  resulta

$$I = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{R_1^2} \arcsen \frac{R_1}{R} - \frac{\sqrt{R^2 - R_1^2}}{R_1}.$$

Casquete esférico de altura igual a la mitad del radio:

$$h = \frac{R}{2} \quad R_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} R \quad I = \frac{4}{3} \arcsen \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{9} = 82 \frac{9}{10} \text{ .}$$

Semiesfera:

$$h = R \quad R_1 = R \quad I = \frac{\pi}{2} = 157 \frac{9}{10} \text{ .}$$

## 10. Estudio geométrico de un elemento pequeño de superficie. (De un terreno o de un estrato.)

La determinación de las características geométricas de las proximidades de un punto interesa para multitud de cuestiones.

Ya vimos, por ejemplo, cómo definidas la posición en planta y las cotas de tres puntos próximos se puede hallar gráfica y numéricamente la dirección y magnitud de la *pendiente máxima*.

También vimos la forma en que, dados los puntos correspondientes a los vértices de una cuadrícula del plano puede hallarse fácilmente las pendientes en cada uno a base de cálculos de diferencias de cotas entre los inmediatos, lo cual no es sino un modo aproximado de determinar las derivadas parciales de la función, o sea, de la cota de la superficie, en función de las coordenadas cartesianas horizontales  $x$  e  $y$ .

Puede ser también de utilidad la determinación de la *concauidad* o *convexidad* de la superficie (por ejemplo, respecto a la vertical o cénit del lugar). Será cóncava cuando toda ella quede por encima del plano tangente y convexa si queda por debajo.

Puede ocurrir que se trate de un máximo (*cima* de una elevación (11) si hay *convexidad*) o de un mínimo (punto más bajo de una depresión (12), si hay *concauidad*).

(11) Según la posición relativa, esta elevación se denomina:

*Montaña*, si es de cierta importancia.

*Colina*, si la elevación es menor.

*Cerro*, si es aislada y de menos altura que el monte o la montaña.

*Otero*, (del latín *altarium*, altar) si está aislado y domina un llano.

*Loma*, si es una altura pequeña y prolongada.

(12) Estas depresiones reciben diferentes nombres según las circunstancias. Así, tenemos:

*Hoya*, si es un llano extenso rodeado de montañas.

*Nava* (del vasco *nava*, tierra llana). Tierra baja y llana, a veces pantanosa, situada generalmente entre montañas. En España hay más de 80 pueblos que llevan el nombre de Nava o Navas. Seguramente a sus características especiales deben su nombre: Navacerrada, Navafría, Navahermosa, Navalonda, Navalunga, y otros más.

*Granda* o *gándara*, tierra baja, inculta y llena de maleza. Es sinónimo de Gárriga (catalán).

*Labajo*, es el nombre que dan, en algunos sitios de Castilla, a ciertas depresiones de fondo impermeable, en que se acumula el agua de lluvia. Son como pequeñas lagunas que se utilizan para beber el ganado. No encuentro esta palabra en el Diccionario. Existe la Villa de Labajos, en la provincia de Segovia.

Pueden presentarse puntos en los que el plano tangente deja una parte de superficie a un lado y la otra al otro.

Si, además, dicho plano tangente es horizontal, tenemos el caso de un *puerto* o paso entre montañas (13).

En el caso de que el plano tangente lo sea todo a lo largo de una recta, de la superficie, tendremos que ésta es desarrollable. Puede entonces ser cónica o cilíndrica. Y siendo cilíndrica pueden ser sus generatrices horizontales o no.

Entonces, en el caso de un estrato, corresponderán los puntos cóncavos a los sinclinales y los cóncavos a los anticlinales.

Consideramos debe ser muy importante ver si el terreno y sobre todo el estrato corresponde a una *superficie desarrollable* o no. En el primer caso, si el estrato procede del plegamiento de otro que antes fue horizontal o plano, puede deducirse que no ha experimentado apenas más que deformaciones *por flexión* y no de roturas y deslizamiento. Debemos no olvidar que las superficies que se deforman sin experimentar más que flexiones conservan ciertas relaciones intrínsecas que pueden expresarse matemáticamente como indicaremos más adelante.

El estudio de la curvatura de las distintas secciones dadas en puntos de una superficie nos puede permitir deducir la energía acumulada por deformación de la misma, lo que puede interesar en cuestiones de Geodinámica.

---

(13) Los puertos son *puntos de paso* natural de una vertiente a otra, a través de la divisoria de las aguas que sigue la cresta de una cadena de alturas o de montañas. Según su importancia, se denominan:

*Collado* (del latín *collum*, cuello), si están en las ondulaciones ligeras de la cordillera.

*Puertos*, propiamente dichos los de importancia principal, que marcan los puntos de paso por ser los más bajos y accesibles.

*Garganta*, si es estrecho y profundo.

*Desfiladero*, si está cortado, presentando fuertes pendientes o acantilados.

Como se indica en la figura 20, un puerto o un collado puede ser de dos faldas ascendentes y dos descendentes, en forma de "silla de montar". Más raro es el puerto en forma de "silla de mono" (en alemán Affensattel), de la figura 22. Tiene tres laderas o faldas ascendentes y tres descendentes.

(Ver Dirk J. Struik: "Geometría Diferencial". Ed. Aguilar, 1955, pág. 94.)

(Continuará)