PENDIENTES, CURVATURAS Y ALABEOS DE LA SUPERFICIE DE UN TERRENO O DE UN ESTRATO

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENITEZ
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Concluye en el presente artículo el importante trabajo sobre el tema epigrafiado iniciado en nuestro número anterior.

11. Expresiones aproximadas de las derivadas parciales.

Para todo lo indicado hay que operar no sólo con las derivadas parciales de orden:

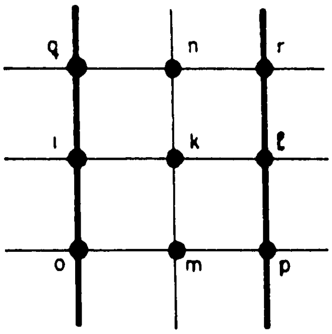

Figura 18.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\,; \qquad q = \frac{\partial z}{\partial x}\,,$$

sino también con las de segundo orden:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,; \qquad S = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,; \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,.$$

Para que resulte práctico damos a continuación sus valores, conocidas las cotas o valores de puntos próximos de una malla cuadrada. Es suficiente para cada punto considerar los ocho más próximos (fig. 18).

Así resulta que de modo aproximado (tanto mayor precisión cuanto más próximo están los puntos) podemos escribir:

$$p = \frac{l - i}{2a}\,; \qquad q = \frac{n - m}{2a}\,;$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{l - k}{a} - \frac{k - i}{a}\right) = \frac{1}{a^2}(l - 2K + i)\,;$$

$$S = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{r - q}{2a} - \frac{p - o}{2a}\right) = \frac{1}{4a^2}(r - q + o - p)\,;$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{n - k}{a} - \frac{k - m}{a}\right) = \frac{1}{a^2}(n - 2k + m)\,.$$

12. Cuádrica y paraboloide osculador en un punto de una superficie.

Al considerar un punto de una superficie y ocho puntos de la misma próximos al primero, podemos definir (de manera unívoca en general) una cuádrica o superficie de segundo orden que pase por dichos nueve puntos. Si hacemos que los ocho puntos se aproximen indefinidamente al primero, obtendremos la cuádrica osculatriz a la superficie en dicho punto.

Para simplificar más tomaremos como representación aproximada de la superficie, en las proximidades de un punto, el paraboloide de expresión:

$$z = z_0 + p_0\, x + q_0\, y + \frac{1}{2}\,(r_0\, x^2 + 2\, s_0\, x\, y + t_0\, y^2)\,,$$

en que los coeficientes p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 son las derivadas parciales primeras y segundas de la superficie en el punto considerado.

Esta paraboloide (con un punto en la dirección del infinito de la vertical puede, por tanto, sustituir, para todos los estudios de curvaturas, alabeos, etc., a la superficie, en las proximidades de un punto (14).

13. Concavidad, convexidad e inflexión.

Como evidentemente $z = z_0 + p_0\, x + q_0\, y$ es la ecuación del plano tangente la variación del trimonio $r_0\, x^2 + 2\, s_0\, x\, y + t_0\, y^2$, para distintos valores de x e y, nos da la posición de la superficie con respecto a dicho plano tangente.

Este trinomio tendrá un signo constante si $r_0\, t_0 - s_0^2 > 0$.

Se trata entonces de un punto de *tipo elíptico.* La superficie es cóncava o convexa en las proximidades del punto (para lo primero basta que r_0 ó t_0 sea positivo (figura 19).

Si $r_0\, t_0 - s_0^2 < 0$ el plano tangente atraviesa la superficie. Se trata de un punto *hiperbólico* (fig. 20).

Si $r_0\, t_0 - s_0^2 = 0$ el punto es *parabólico* (fig. 21 y 22) (15).

14. Plegamientos cilíndrico y cónico.

Entre las superficies desarrollables que, repetimos, son en las que se verifica que $rt - s^2 = 0$ en *todos* sus puntos, consideraremos como más importantes los cilindros y los conos.

1. Podemos determinar la dirección de las *generatrices* cilíndricas conociendo sólo las coordenadas de dos puntos ($x_1\, y_1\, z_1$ y $x_2\, y_2\, z_2$) y sus derivados parciales pri-

---

(14) En el libro Edited by G. H. Dury: "Essays in Geomorphology", tiene un capítulo muy interesante de Richard J. Chorley, sobre "The Application of Statiscal Methods to Geomorphology".
En la página 360, para el estudio de la superficie en las proximidades de un punto, aconseja tomar una expresión de 2.°, 3.° ó 4.° grado, según la forma de la superficie del terreno o del estrato.

(15) La condición necesaria y suficiente para que una superficie sea desarrollable es que *todos* sus puntos sean parabólicos, o sea, que $rt - s^2 = 0$. Ya veremos más adelante como esto equivale a que la curvatura total K o de Gauss sea nula. Véase C. Mataix: "Cálculo Diferencial", o Sixto Cámara "Geometría Analítica", 3.ª ed. Madrid, 1945, pág. 708; u obra citada de Struik, pág. 103.)

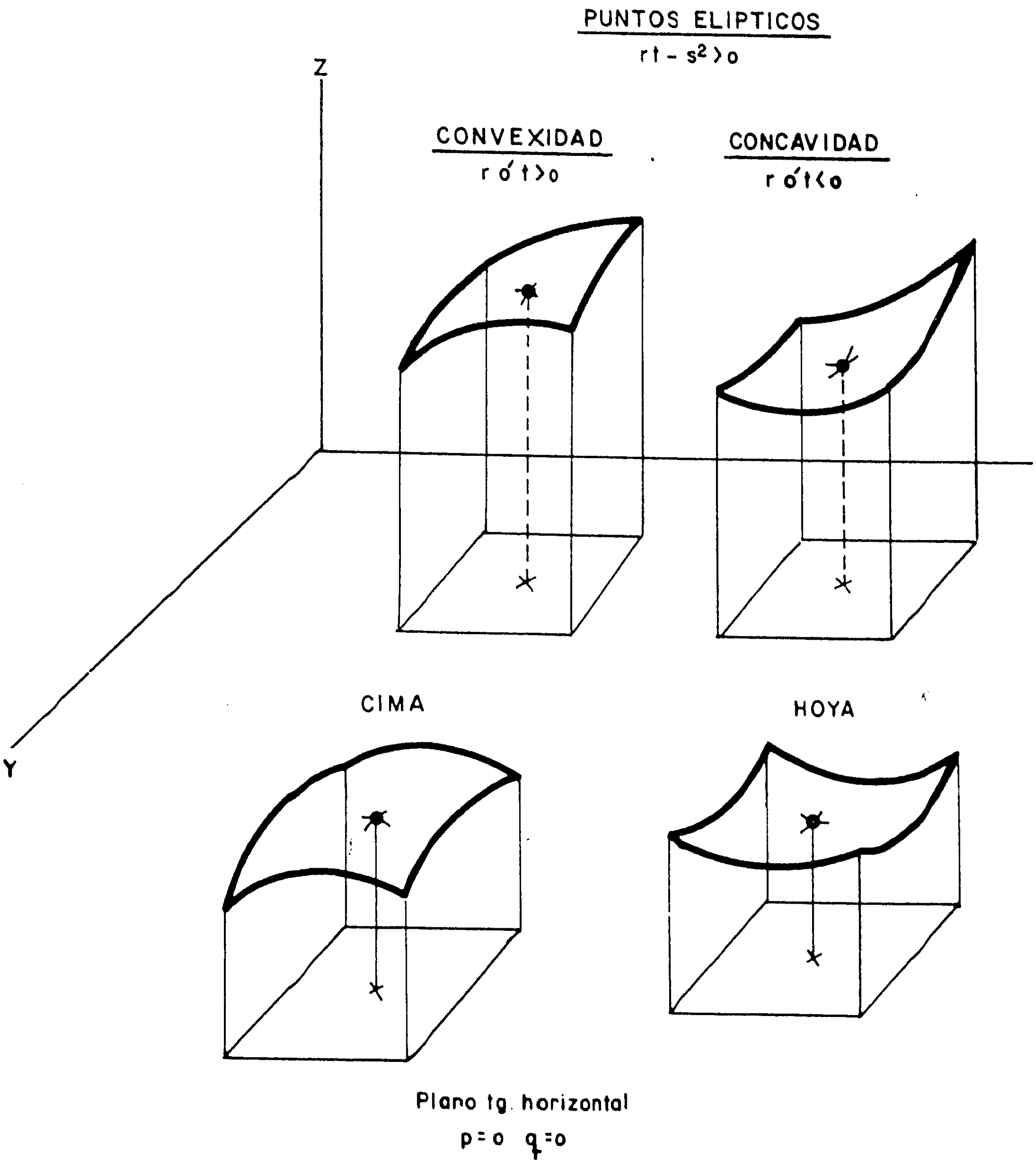

Figura 19.

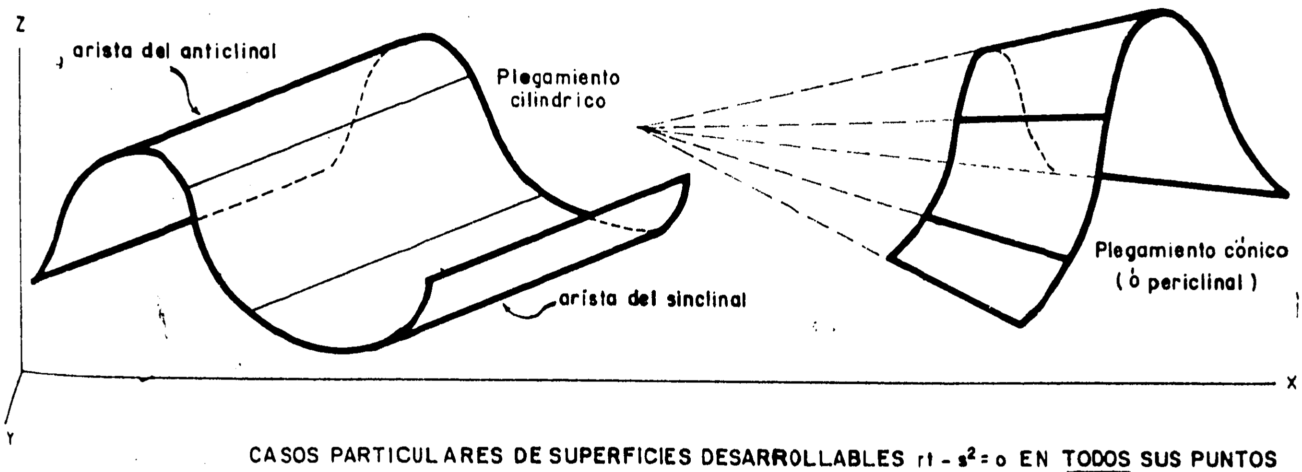

Figura 21.

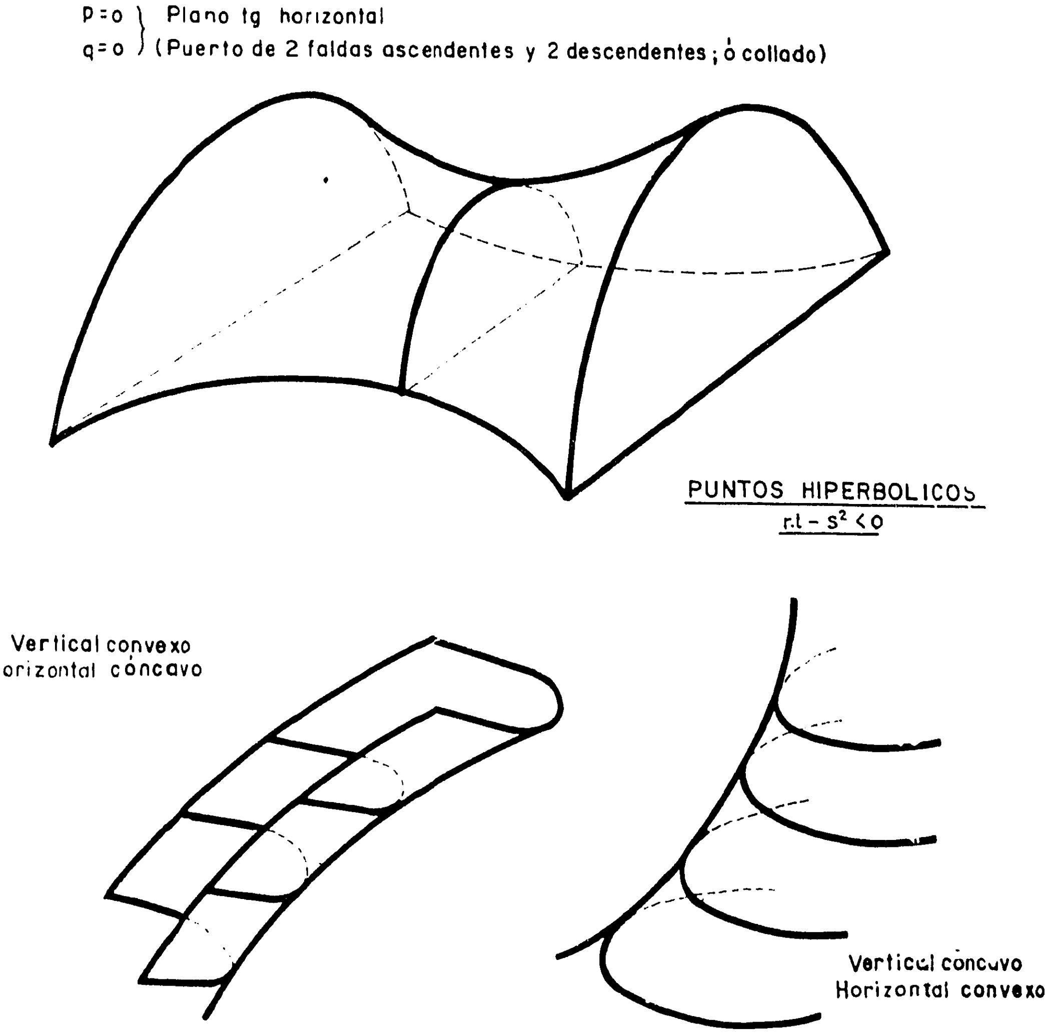

Figura 20.

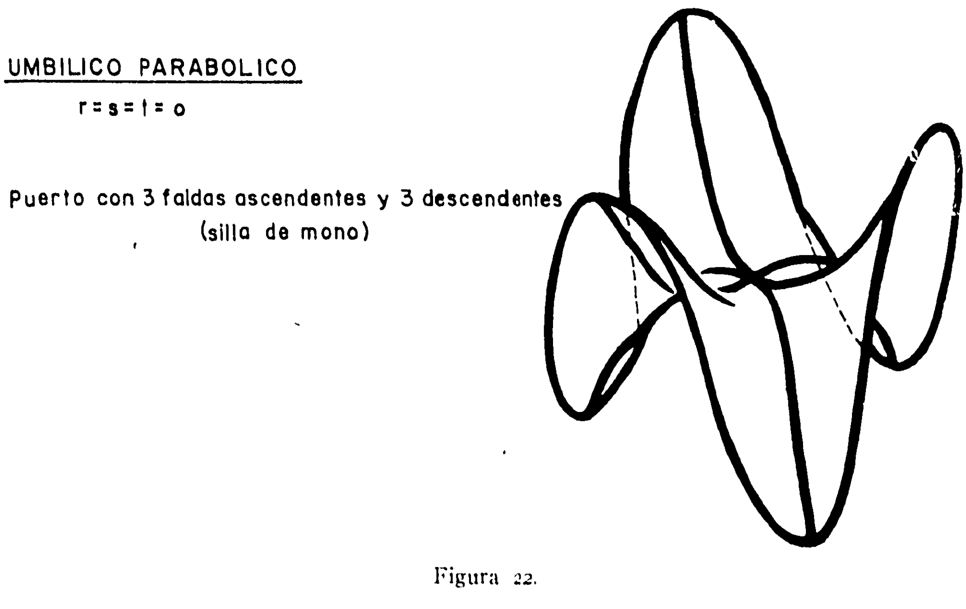

Figura 22.

meras p_1, q_1; p_2, q_2, respectivamente (esto último es lo mismo, según vimos, que conocer las cotas de dos puntos y las de sus cuatro puntos más próximos de la malla cuadrada).

Como el plano tangente en un punto (x_i y_i z_i) de la superficie $Z = Z(x, y)$ tiene por ecuación $Z - Z_i = p_i\,(x - x_i) + q_i\,(y - y_i)$ y en toda superficie cilíndrica de generatrices paralelas a la dirección $x = azy = bz$, la normal al plano tangente es perpendicular a dicha dirección, se verificará que: $a\,p_i + b\,q_i - 1 = 0$.

Por tanto, los dos parámetros a y b, que definen la dirección buscada, se deducen del sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a\,p_1 + b\,q_1 - 1 = 0 \\ a\,p_2 + b\,q_2 - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

II. La determinación del *vértice de un plegamiento de tipo cónico* (*periclinal*) se reduce a resolver un sistema de tres ecuaciones en tres incógnitas (coordenadas del vértice $x_0\,y_0\,z_0$).

Como el plano tangente en cualquier punto de la superficie del cono debe pasar por dicho vértice, no hay más que resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} z_0 - z_1 = p_1\,(x_0 - x_1) + q_1\,(y_0 - y_1) \\ z_0 - z_2 = p_2\,(x_0 - x_2) + q_2\,(y_0 - y_2) \\ z_0 - z_3 = p_3\,(x_0 - x_3) + q_3\,(y_0 - y_3)\,. \end{array}\right.$$

Corolario de lo indicado antes son los siguientes:

I. *a*) Para que varios puntos pertenezcan a un mismo plegamiento o superficie cilíndrica se ha de verificar entre las derivadas de 3 cualesquiera de ellos:

$$\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_j & q_j & 1 \\ p_k & q_k & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

I. *b*) Los planos tangentes en dos puntos (o sus derivadas parciales primeras) definen una dirección de generatrices cilíndricas (que es la de intersección de dichos planos tangentes).

II. *a*) Para que varios puntos pertenezcan a un mismo plegamiento o superficie cónica se verificará, entre las derivadas de 4 de ellos, que:

$$\begin{vmatrix} p_i & q_i & p_i\,x_i + q_i\,y_i & 1 \\ p_j & q_j & p_j\,x_j + q_j\,y_j & 1 \\ p_k & q_k & p_k\,x_k + q_k\,y_k & 1 \\ p_l & q_l & p_l\,x_l + q_l\,y_l & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

II. *b*) Las coordenadas de *tres puntos* y sus derivadas parciales primeras (o sea, sus planos tangentes, determinan el vértice del cono (que es la intersección de dichos tres planos).

15. Curvaturas de una superficie.

Cuando se estudia una superficie como lugar de puntos del espacio, cuyas coordenadas (x, y, z) son funciones de los parámetros (u, v) de la forma:

$$X = x\,(u, v)\,; \qquad y = (u, v)\,; \qquad Z = Z\,(u, v) \quad \text{(fig. 23)},$$

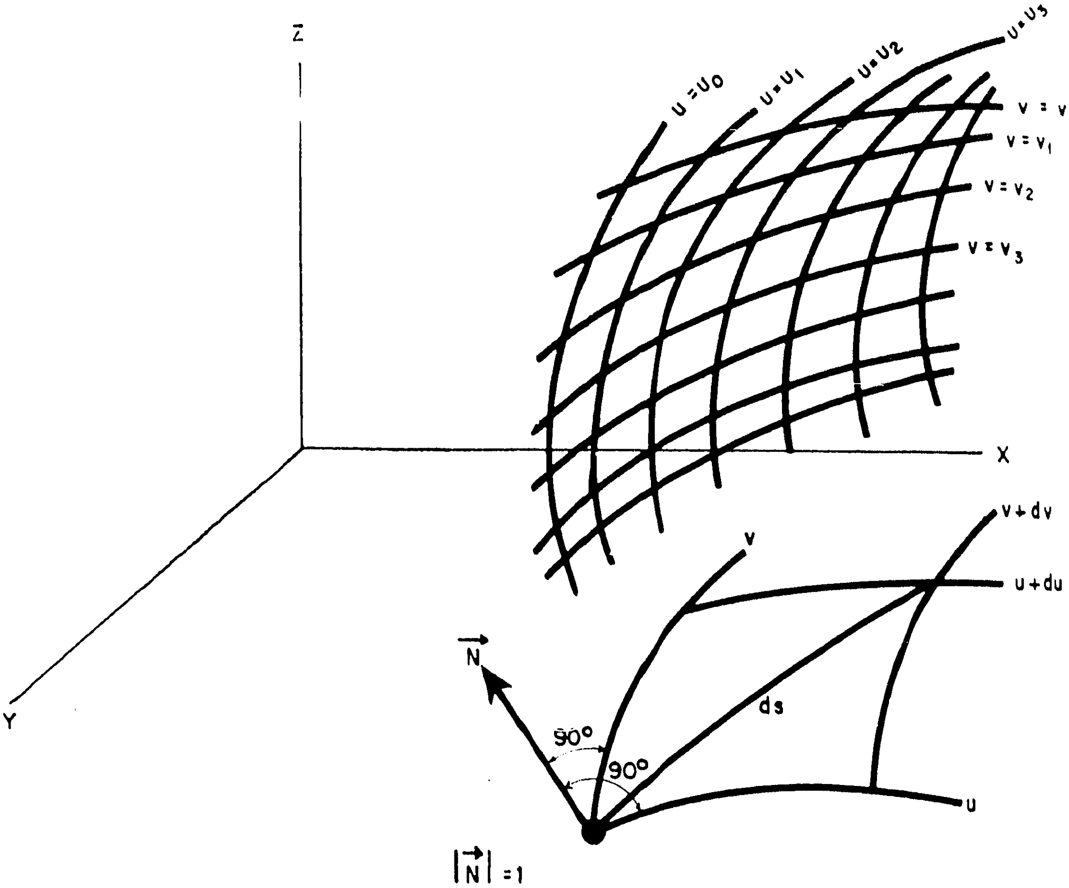

Figura 23.

se establecen llamadas "formas fundamentales" primera y segunda, que designamos por I y II. La I viene a representar el elemento diferencial de arco elevado al cuadrado, o sea ds^2.

La II es, cambiado de signo, el producto escalar del elemento de arco por la diferencial $d\vec{N}$ del vector *unitario* normal $\vec{N}$ a la superficie.

I *depende sólo de las derivadas parciales primeras de* x y Z con respecto a u y v.

II depende de ellas y, *además, de las derivadas parciales segundas.*

$$\mathrm{I} = (\vec{ds}.\,\vec{ds}) = ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$\mathrm{II} = -\,(\vec{ds}.\,\vec{dN}) = e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + dv^2 \quad (16),$$

El radio de curvatura de una curva cualquiera, contenida en la superficie, sabemos que es (teorema de Meusnier) la proyección sobre su plano osculador del radio de curvatura de la sección *normal* a la superficie (que pase por la tangente a dicha curva).

El radio de curvatura R de dicha sección *normal* es precisamente el cociente de las formas fundamentales I y II (fig. 24):

$$R = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}} = \frac{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}{e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2}$$

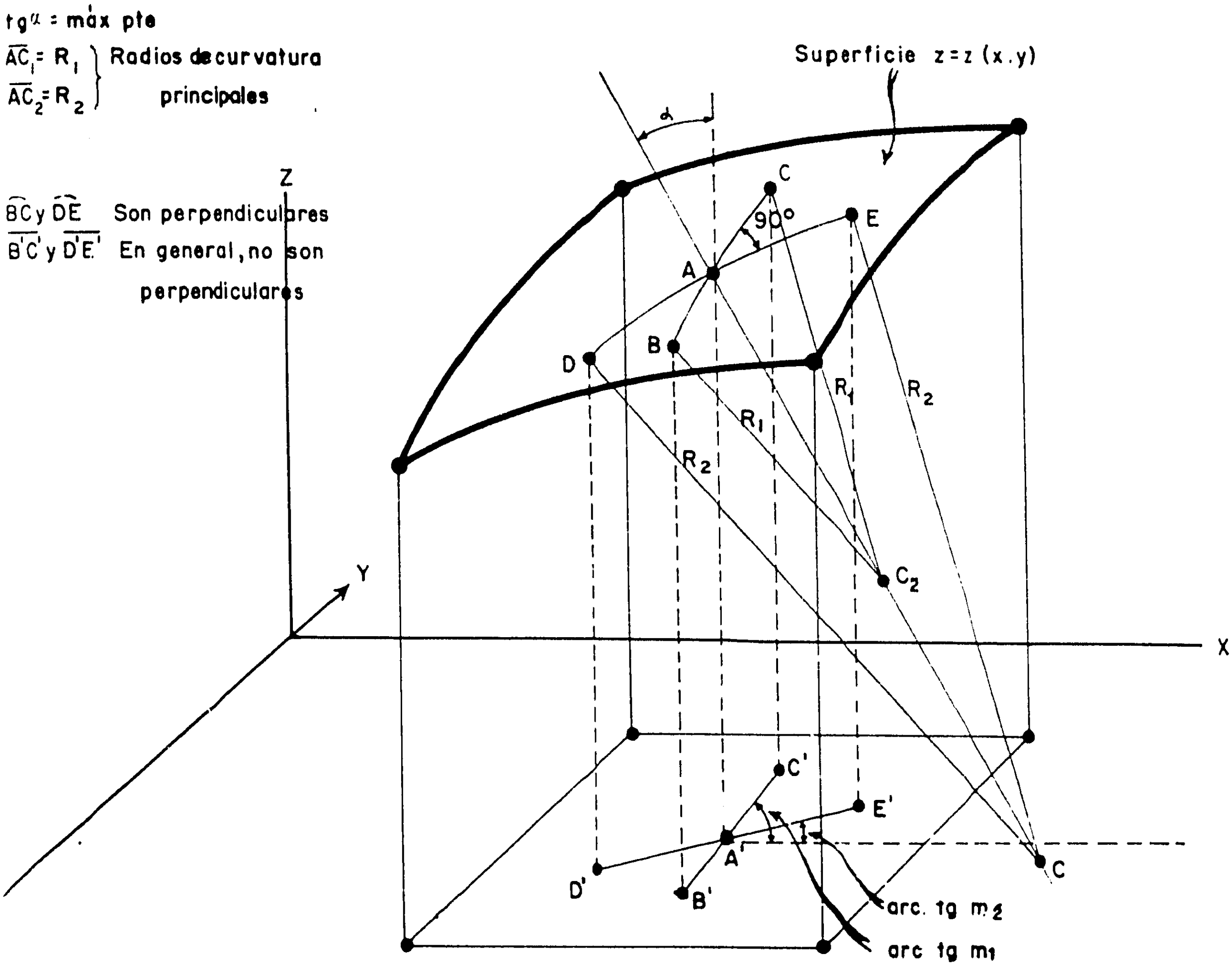

Figura 24.

Si la superficie viene dada en la forma $Z = Z\,(x,\ y)$, utilizaremos las fórmulas anteriores sin más que hacer:

$$u = x\,; \qquad v = y\,; \qquad w = z = z\,(x,\,y)\,,$$

(16) Se introduce, a veces, una "tercera forma fundamental", $\mathrm{III} = (d\vec{N}\,.\,d\vec{N})$, que está relacionada con las I y II y con la curvatura total K y la media M por la ecuación:

$$K\,.\,\mathrm{I} - 2\,M\,\mathrm{II} + \mathrm{III} = 0.$$

como se puede comprobar inmediatamente.

resultando:

$$E = 1 + p^2; \qquad F = p \cdot q; \qquad G = 1 + q^2;$$

$$e = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \qquad f = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \qquad g = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Así, queda:

$$R = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}} \frac{(1 + p^2)\, dx^2 + 2\, p\, q\, dx\, dy + (1 + q^2)\, dy^2}{r\, dx^2 + 2\, s\, dx\, dy + t\, dy^2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Para diversas direcciones en planta, o sea, para cada $m = \frac{dy}{dx}$, obtendremos como radio de su sección normal:

$$R = \frac{1 + p^2 + 2\, p\, q\, m + (1 + q^2)\, m^2}{r + 2\, s\, m + t\, m^2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Sus valores máximos y mínimos corresponden a hacer $dR : dm = 0$, con lo que obtendremos después de efectuar operaciones los dos valores de m, raíces de la ecuación.

$$[(1 + q^2)\, s - pqt]\, m^2 + [r\, (1 + q^2) - t\, (1 + p^2)]\, m + pqr - (1 + p^2)\, s = 0.$$

Sustituidos en la anterior, se obtiene R_1 y R_2 que son los radios de curvatura principales.

Con ellos se definen dos curvaturas:

La *curvatura media*, o media aritmética de las curvaturas principales, que vale:

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2} \frac{r\, (1 + q^2) + t\, (1 + p^2) - 2\, pqs}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \quad (17),$$

y la *curvatura total de Gauss*, producto de dichas curvaturas principales, que vale:

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{r \cdot t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} \quad (18)$$

---

(17) Es sabido que la suma de las curvaturas de las secciones normales perpendiculares cualesquiera es constante e igual a $2\,M$. Esto se puede generalizar, ya que si R_1, R_2..., R_m son los radios de curvatura de secciones normales a la superficie que forman entre sí ángulos iguales a: $2\pi/m$, tenemos que:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{R_m}\right) = M.$$

(Véase L. P. Eisenhart: "An Introduction to Differential Geometry". Princeton University Press. 1947, pág. 227.)

(18) Para una superficie dada en la forma general, tendríamos que:

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Eg - 2fF + eG}{2\,(EG - F^2)} \qquad K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

(Ver Geom. Diferencial de D. J. Struik, Cap. II Ed. Aguilar, 1955.)

Lo más importante que podemos decir de la *curvatura de Gauss* (que pensamos debe tomarse en cuenta en la deformación de los estratos en determinadas condiciones) es que *invariante de las flexiones*. Es el conocido *Teorema egregium* (que Gauss indicó ser *verdaderamente excelente*).

Con ello se indica que permanece invariable para toda deformación que no suponga dilatación, contracción o rasgadura.

16. Vaguadas y divisorias.

Son líneas de la superficie de un terreno en cuyos puntos uno al menos de los dos planos, que contienen la normal a la superficie y las tangentes a sus líneas de curvatura, es vertical.

O, lo que es lo mismo, que el plano osculador de por lo menos una de sus líneas de curvatura (de las dos que pasan por cada punto de la línea de vaguada o divisoria considerada) es vertical.

Analíticamente, esto equivale a decir que en los puntos de dicha línea la proyección horizontal de la normal al plano tangente a la superficie, en el punto considerado, se confunde con la proyección de la tangente a una de sus líneas de curvatura. O sea, que la ecuación de segundo grado que nos da (véase párrafo anterior) el valor de m se verifica para $m = q : p$.

Efectuando esta sustitución obtenemos, después de efectuar operaciones, la expresión:

$$p \cdot q\,(1 + p^2 + q^2)\,r + [q^2\,(1 + q^2) - p^2\,(1 + p^2)]\,s - pq\,(1 + p^2 + q^2)\,t = 0\,,$$

que es de primer grado en las derivadas parciales segundas r, s, t.

Observaciones.

1.º Los puntos en los que se verifica que *los dos planos osculadores* de las dos líneas de curvatura son verticales, corresponden a cimas, hoyas y puertos o collados.

2.º Las aristas de los sinclinales y los anticlinales corresponden, respectiva y geométricamente, a vaguadas y divisorias rectas.

3.º Los puntos representativos de cimas, hoyas, etc., y las líneas de máxima pendiente, vaguadas y divisorias, no dependen, en realidad, de la forma de la superficie, sino de su posición con respecto al plano horizontal. Es decir, que si "basculamos" en bloque el terreno (sin deformarlo) variará la posición de estos puntos y de estas líneas. En cambio, la curvatura media y total son valores *intrínsecos* de la superficie, y no variarán porque el terreno bascule o se mueva en bloque. Examinemos a continuación cómo se desplazan dichas líneas al moverse el terreno. Creemos es esto interesante, pues se relaciona, por ejemplo, con el desplazamiento (lateral) que sufriría el cauce de un río.

Consideremos el movimiento de una parte de un terreno en bloque. Como tiene 6 grados de libertad (3 traslaciones paralelas a los ejes OX, OY y OZ; y 3 rotaciones alrededor de los mismos ejes), para la representación sobre plano, las traslaciones no influyen. De las rotaciones, la que tiene por eje el vertical OZ no produce variaciones (en el *interior* del trozo de terreno que consideramos se mueve). Las dos rotaciones alrededor de OX y OY pueden componerse (sin son pequeñas) reduciéndose a una única rotación alrededor de un eje *horizontal*.

No se quita generalidad alguna al problema, suponiendo que se tome este último eje como OY.

Si llamamos e al pequeño ángulo que gira OZ hacia OX, un punto de coordenadas (x, y, z) pasará a tener $(x + ez;\ y;\ z - ex)$.

Por tanto, si la ecuación de la superficie del terreno o del estrato era: $Z = f(x, y)$, después del basculamiento será:

$$Z - ex = f\,[x + ef\,(x, y)\,;\,y]\,.$$

Por ser e pequeño y, por tanto, el producto $e, f(x, y)$, desarrollando el segundo miembro por la fórmula de Taylor, queda:

$$Z - ex = f(x, y) + ef(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Efectuando operaciones:

$$Z = f(x, y) + e\left[x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} f(x, y)\right].$$

Ejemplo I. — Paraboloide elíptico de ecuación (de eje vertical y vértice en el origen):

$$Z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}.$$

La ecuación que da las líneas de vaguada y divisoria por su proyección horizontal resulta ser, aplicando la fórmula obtenida anteriormente:

$$\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{x}{a} \\[2ex] q = \dfrac{y}{b} \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = \dfrac{1}{a} \\[1ex] s = 0 \\[1ex] t = \dfrac{1}{b} \end{array}$$

$$\frac{x}{a}\frac{y}{b}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{1}{a} - \frac{x}{a}\frac{y}{b}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{1}{b} = 0,$$

que tienen como soluciones las rectas $x = 0$, $y = 0$.

Ejemplo II. — Paraboloide hiperbólico de ecuación $Z = h\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{x, y}{a b}\right)$,

$$\left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{h}{a b}(b - y) \\[2ex] q = \dfrac{h}{a b}(a - x) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} r = 0 \\[1ex] s = -\dfrac{h}{a b} \\[1ex] t = 0 \end{array}\right.$$

sustituyendo en la ecuación de las líneas buscadas obtenemos:

$$\frac{h^2}{a^2 b^2}(a - x)^2\left[1 + \frac{h^2}{a^2 b^2}(a - x)^2\right] - \frac{h^2}{a^2 b^2}(b - y)^2\left[1 + \frac{h^2}{a^2 b^2}(b - y)^2\right] = 0.$$

Efectuando operaciones y simplificando resulta:

$$x + y = a + b; \qquad x - y = a - b.$$

O sea, que las vaguadas y divisorias son la intersección de la superficie con dos planos proyectantes verticales que, además, son perpendiculares entre sí y pasan por el punto (a, b, h).

17. Energía de deformación elástica de un estrato plano.

Si un estrato, supuesto inicialmente plano, lo consideramos equivalente a una placa de espesor e, si se deformase ligeramente por flexión de *modo elástico*, y de tal forma que la superficie resultante tuviese como radios principales de curvatura en un punto R_1 y R_2, la *energía potencial* de la placa, *por unidad de área*, sería:

$$\frac{1}{2} D\left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2 - 2(1-\sigma)\frac{1}{R_1 R_2}\right],$$

siendo:

$$D = \frac{1}{12} E e^3,$$

la llamada rigidez de flexión de la placa; E, el coeficiente de elasticidad o módulo de Young del material, y σ, su coeficiente de Poisson.

De acuerdo con las definiciones dadas de curvatura media M y la curvatura total K, la energía potencial por unidad de área puede escribirse en la forma:

$$D\left[2M^2 - (1-\sigma)K\right]. \quad (19)$$

Claro que esto no se verifica jamás en la realidad. Al no ser las deformaciones perfectamente *elásticas* no es aplicable esta fórmula, pero podría también abordarse su estudio teniendo en cuenta la *plasticidad*, y, en general, el comportamiento *reológico* del material constitutivo de las rocas.

En todo caso, en estudios de geología estructural de regiones *paratectónicas* en que las estructuras no estén destruidas por el plegamiento, tendrán mejor aplicación estas teorías.

18. Curvatura integral, imagen esférica y alabeo medio de una porción de superficie.

Se define como *curvatura integral* de una superficie al valor de:

$$\iint_A K\,dA \text{ extendida al área } A \text{ de dicha superficie.}$$

Si se considera como *imagen esférica* de los puntos de una superficie limitada por un contorno (C), los extremos de un vector unitario, con origen en un punto fijo, trazados paralelamente a los vectores unitarios N normales a dicha superficie, contenidos en el interior de (C), se prueba que "la curvatura de Gauss K es el límite del cociente de las áreas correspondientes en la imagen esférica y sobre la superficie, al tender a cero dichas áreas".

Así, resulta que en una esfera de radio R la *curvatura en cada punto* es $\frac{1}{R^2}$ *y* su *curvatura integral* 4π.

(19) Véase Love: "The Mathematical Theory of Elasticy". Chap. XXII. N. York. Dover Publications, 1944.

Pensamos si podría definirse la curvatura (media) de Gauss de una porción de la superficie de un terreno o de un estrato como el cociente de $\frac{1}{A}\int\int_A |K|\, dA$ (en integral figura el *módulo* de K).

Vendría a dar una idea del grado de alabeo medio (cero si es desarrollable: cono, cilindro, etc.).

19. Ejemplo de aplicación.

Consideremos en un plano un punto K y los ocho puntos que forman cuadrícula a su alrededor, de $a = 100$ m. de lado y con las cotas indicadas en la figura 25.

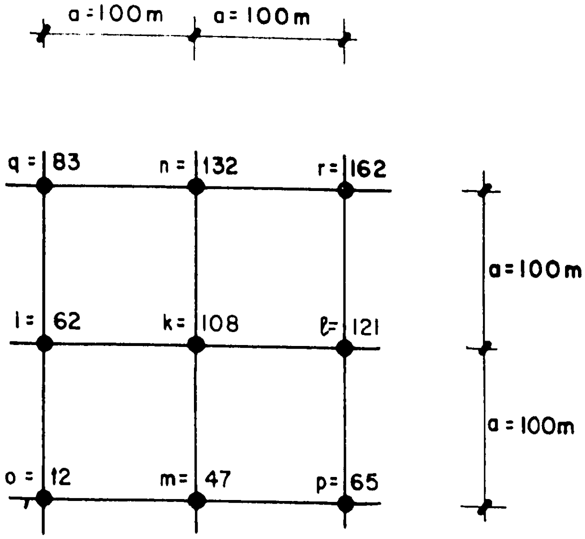

Figura 25.

Si por las letras indicamos las cotas de los puntos respectivos, *las derivadas parciales* en el punto K valen aproximadamente:

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial Z}{\partial X} = \dfrac{l - i}{2a} = \dfrac{121 - 62}{2 \times 100} = \mathbf{0{,}295} \\[2ex] q = \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{n - m}{2a} = \dfrac{132 - 47}{2 \times 100} = \mathbf{0{,}425} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{l - 2k + i}{a^2} = \dfrac{121 - 216 + 62}{100.000} = -0{,}0033 \\[2ex] S = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{r - q + 0 - p}{4a^2} = \dfrac{162 - 83 + 12 - 65}{4 \times 10.000} = \\ \qquad = 0{,}0009 \\[2ex] t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{n - 2k + m}{a^2} = \dfrac{132 - 216 + 47}{10.000} = - \\ \qquad = -0{,}0037 \end{cases}$$

Pendiente máxima en el punto K.

Su valor es:

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{0{,}295^2 + 0{,}425^2} = 0{,}517 = \mathbf{51{,}7\ \%}.$$

Su dirección es tal que proyectada sobre el plano horizontal XOY forma con el eje OX un ángulo α tal que:

$$\operatorname{tg} \alpha = q : p = 0{,}425 : 0{,}295 = \mathbf{1{,}44}\,.$$

Paraboloide osculador.

$$Z = Z_0 + p\,x + q\,y + \frac{1}{2} r\,x^2 + s\,x\,y + \frac{1}{2} t\,y^2 =$$

$$= 108 + 0{,}295\,x + 0{,}425\,y - 0{,}00165\,x^2 + 0{,}0009\,xy - 0{,}00185\,y^2\,.$$

Por ser: $rt - s^2 = 0{,}0033 \times 0{,}0037 - 0{,}0009^2 = +\,0{,}0000114$ (positivo) el *punto es elíptico.* Como además los tres últimos términos de la expresión de Z dan un valor negativo (para cualquier par de valores x, y), el plano tangente queda por encima de la superficie.

La superficie en el mismo es, por tanto, *convexa* (con respecto al cénit o vertical del lugar).

Curvaturas.

Las direcciones de $m = \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{dy}{dx}$, que dan los valores máximos y mínimos, R_1 y R_2, de los radios de curvatura de las secciones normales, se deducen de la ecuación:

$$[(1 + q^2)\,S - p\,q\,t]\,m^2 + [r\,(1 + q^2) - t\,(1 + p^2)]\,m + p\,q\,r - (1 + p^2)\,S = 0\,,$$

que en nuestro caso es:

$$(1{,}180 \,.\, 0{,}0009 + 0{,}295 \,.\, 0{,}425 \,.\, 0{,}0037)\,m^2 + (-\,0{,}0033 \,.\, 1{,}180 + 0{,}0037 \,.\, 1{,}087)\,m +$$

$$+ (-\,0{,}295 \,.\, 0{,}425 \,.\, 0{,}0033 - 1{,}087 \,.\, 0{,}0009) = 0{,}001527\,m^2 + 0{,}000128\,m - 0{,}001392 = 0\,,$$

que tiene por raíces:

$$m_1 \;\; \mathbf{0{,}91} \quad m_2 = -\,\mathbf{1{,}00} \text{ (fig. 26)}.$$

La curvatura total de Gauss es:

$$K = \frac{1}{R_1} \,.\, \frac{1}{R_2} = \frac{rt - S^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{0{,}0000114}{(1 + 0{,}087 + 0{,}180)^2} = 0{,}0000071\,m^{-2}\,.$$

y la curvatura media:

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{r\,(1 + q^2) + t\,(1 + p^2) - 2\,p\,q\,s}{(1 + p^2 + q^2)\,3/2} =$$

$$= \frac{-\,0{,}0033 \,.\, 1{,}180 - 0{,}0037 \times 1{,}087 - 2 \times 0{,}295 \times 0{,}425 \times 0{,}0009}{2 \times 1{,}267^{1{,}5}} = -\,0{,}00285\,m^{-1}\,.$$

La ecuación que da $\dfrac{1}{R_1}$ y $\dfrac{1}{R_2}$ será: $\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + 0{,}057\,\dfrac{1}{R} + 0{,}0000071 = 0 \;\left\{\begin{array}{l} R_1 = 540 \text{ m.} \\ R_2 = 258 \text{ m.}\end{array}\right.$

Comprobemos estos radios sustituyendo en la expresión deducida anteriormente que da R en función de m:

$$R = \frac{1 + p^2 + 2\,p\,q\,m + (1 + q^2)\,m^2}{r + 2\,s\,m + t\,m^2}\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.$$

Para:

$m_1 = 0{,}092$ y $m_2 = -1{,}00$ obtenemos respectivamente.

$$R_1 = \frac{1{,}087 + 2.0{,}295.0{,}425.0{,}92 + 1.180.0{,}92^2}{-0{,}0033 + 2.0{,}0009.0{,}92 - 0{,}0037.0{,}92^2}\,1{,}267 = \mathbf{549}\ \text{m}\ .$$

$$R_2 \quad \frac{1{,}087 - 2\ 0{,}295.0{,}425 + 1{,}180}{0{,}0033 - 2.0{,}0009 - 0{,}0037}\,1{,}267 = -\mathbf{259}\ \text{m}.\ ,$$

que son casi iguales que los anteriores.

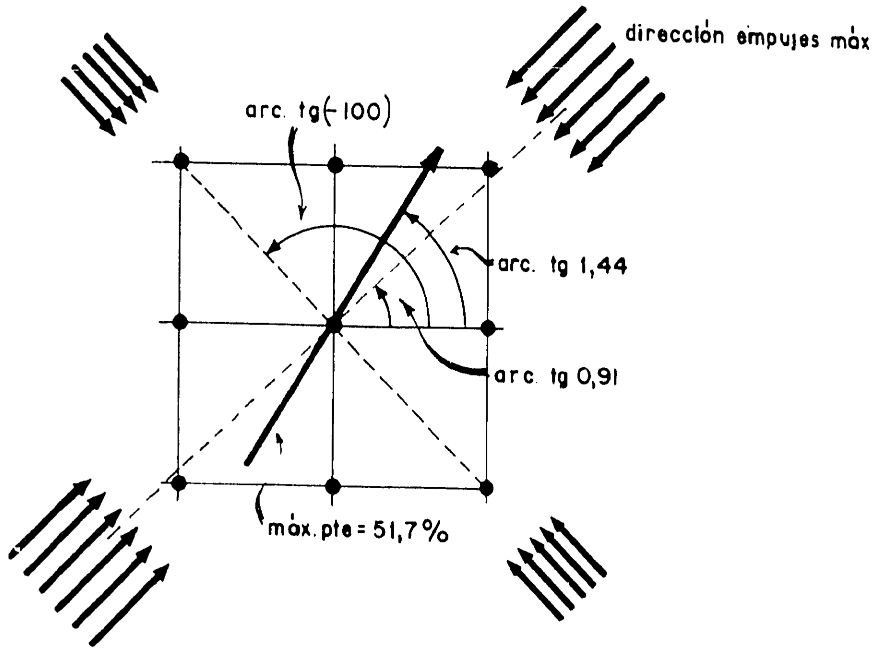

Figura 26.

20. Conclusiones.

Lo expuesto en las páginas anteriores no es más que un intento de aplicar las ideas elementales de Geometría Diferencial al estudio de una superficie, que puede ser la del terreno exterior en contacto con la atmósfera, o la de una capa o estrato profundo.

En ambos casos, la superficie se define o por las cotas de diversos puntos fijados en un plano (que pueden o no formar una malla en cuadrícula, triangular, etc.) o por la representación clásica de curvas de nivel de equidistancia conveniente.

Para facilitar el razonamiento, indicamos, a veces, que la superficie tiene por ecuación $Z = Z\ (x,\ y)$. Esto no es sino decir que a cada punto de coordenadas cartesianas $(x,\ y)$, referidas a unos ejes rectangulares del plano, le corresponde una cota o altura Z definidas por la citada ecuación.

Utilizamos también derivadas parciales de 1.° y 2.° orden de Z con respecto a x e y. En la práctica, su determinación aproximada es muy fácil, utilizando las cotas de puntos $(x,\ y)$ situados en los nudos de una malla cuadrada.

Obtenida la máxima pendiente en cada punto y hallando la media ponderada de la misma en una superficie determinada, obtenemos la pendiente media o *índice de accidentación* de la citada superficie. Damos diversos procedimientos sencillos para calcularlo, ya sea conociendo las cotas de puntos aislados, o ya sea teniendo la representancia con curvas de nivel de la zona que interesa.

Como ejercicio matemático hemos hallado las pendientes medias de algunas superficies sencillas.

La determinación no sólo de las pendientes, sino de la *forma* de la superficie en las proximidades de un punto exige, además, la determinación de las tres derivadas parciales seguidas de Z con respecto a x e y.

Con ellas se puede ya determinar si el punto está en una concavidad o convexidad del terreno (que si es en un punto bajo o alto será el fondo de una hoya o la cima de una elevación, respectivamente), o en una inflexión (que si es horizontal es el punto de paso de un puerto o collado), etc.

Muy importante es ver si la superficie es o no desarrollable. En el primer caso, podría tratarse de un plegamiento cilíndrico o cónico. La determinación entonces de la dirección de las generatrices o del vértice del cono se logra de manera muy sencilla.

Parece en cierto modo lógico que cuanto más se acerque la superficie de un estrato (supuesto en unas condiciones *ideales* sin falla alguna, o sea, relativamente poco plegado) a las condiciones de una superficie *desarrollable* (por ejemplo, cilindro o cono) menos posibilidades tiene de estar roto.

El estudio de las curvaturas de los distintos puntos de la superficie nos puede orientar acerca de la *dirección en que fueron más importantes los empujes* que originaron los plegamientos, y que es uno de los objetivos de la Geodinámica. Será, en general, la correspondiente a la curvatura mayor.

° ° °

Agradezco las indicaciones que me hizo el profesor D. Clemente Sáenz García, acerca del interés que puede tener el estudio de las pendientes de un terreno, y a D. Carlos García Valdeavellano y Armicis las orientaciones y referencias bibliográficas sobre el tema estudiado.