

# CONSIDERACIONES SOBRE EL ESFUERZO CORTANTE

Por JACINTO MARTIN PALANCA  
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

*Estudia el autor algunos puntos que, a su juicio, no se encuentran debidamente tratados, o suficientemente desarrollados, en los libros de Resistencia de Materiales. Demuestra que la ley de distribución de tensiones en una sección maciza, no siempre responde a la clásica forma de tipo parabólico, siendo este sólo un caso particular, si bien el más frecuente. Llega a determinar un procedimiento cómodo para calcular la tensión en la fibra neutra de cualquier sección, y lo tabula para los casos más frecuentes. Por último, se extiende en consideraciones sobre la supuesta ley de distribución uniforme que se propone con frecuencia para el caso de cizallamiento puro, expresando su convicción de que se trata de una burda, aunque cómoda, aproximación por defecto, poco recomendable para cálculos resistentes.*

Al iniciar mi labor al frente de la clase de Resistencia de Materiales, en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación, me he visto obligado, lógicamente, a disponer en línea de combate pedagógico, todos los conocimientos e ideas adecuados al nivel que determina el programa de la referida asignatura en la citada Escuela. No todos los conceptos han sido dóciles al llamamiento, algunos se han resistido, obligándome a trabajar sobre ellos hasta hacerlos entrar en vereda. Uno de los más rebeldes ha sido el esfuerzo cortante, respecto al cual, no se porqué, en los libros que he tenido ocasión de manejar, se detiene el razonamiento en resultados tan poco concretos, que al lector no le es fácil llegar a formarse ideas claras sobre la cuestión. El objeto del presente artículo, es dar a conocer los resultados de mis reflexiones, con absoluta despreocupación del grado de originalidad que puedan ofrecer al especialista en la materia.

Hago gracia al lector del desarrollo analítico de Jouravski, para calcular el valor de la tensión cortante en secciones longitudinales de piezas prismáticas sometidas a flexión, postulando la igualdad de tensiones a lo largo de líneas paralelas a la fibra neutra; lo que en mis tiempos de estudiante con D. Bernardo de Granda, llamábamos el "teorema del baúl", cuya expresión final es la siguiente:

$$\tau_z = \frac{A}{b_z \cdot l} \int_z^Y b_y \cdot dy$$

en donde  $b$ ,  $b_z$  son las anchuras de la sección transversal a las respectivas distancias  $y$ ,  $z$  de la fibra neutra, siendo  $Y$  el máximo de dichas distancias,  $l$  el momento de inercia de la sección completa,  $A$  el esfuerzo de cortadura solicitante de ella, y  $\tau_z$  la tensión cortante a la distancia  $z$  de la fibra neutra.

Si cambiamos los límites de integración, la fórmula anterior tomará este otro aspecto:

$$\tau_z = \frac{A}{b_z \cdot l} \left[ \int_0^Y b_y \cdot dy - \int_0^z b_y \cdot dy \right] = \frac{\eta_x - \eta_z}{b_z \cdot l} \cdot A$$

en donde las  $\eta$  son los momentos de primer grado, respecto a la fibra neutra, de la parte de sección situada a un lado de ella. Esta expresión, en el fondo, no es más sencilla que la anterior, pero desde luego resulta menos imprecisante, y se presta a un manejo más fácil.

Si un prisma elemental (dimensión  $a$  perpendicularmente al plano del papel) está sometido a tensiones cortantes en sus caras, las ecuaciones de proyección del equilibrio estático nos darán:

$$\left. \begin{aligned} \tau_x \cdot a \cdot dx + \tau'_x \cdot a \cdot dx &= 0 \\ \tau_y \cdot a \cdot dy + \tau'_y \cdot a \cdot dy &= 0 \end{aligned} \right\}$$

de donde resulta:

$$\tau_x = -\tau'_x \quad \tau_y = -\tau'_y$$

Aplicando ahora la ecuación de momentos, tomándolos respecto al centro de la sección:

$$2 \tau_x \cdot a \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} = 2 \tau_y \cdot a \cdot dy \cdot \frac{dx}{2};$$

de donde:

$$\tau_x = \tau_y.$$

Es decir, que las tensiones cortantes en las cuatro caras habrán de tener igual valor unita-

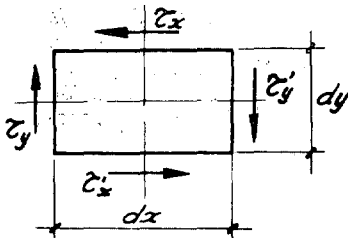


Figura 1.<sup>a</sup>

rio; y deberán estar dispuestas en los sentidos que representa la figura.

Por el razonamiento anterior, la expresión de Jouravski, que había sido deducida para tensiones cortantes en planos longitudinales, será también de aplicación a las tensiones en la propia sección transversal, y nos brinda una ley de distribución de ellas.

La aplicación del estudio anterior a la sección rectangular, nos da como ley de distribución de tensiones:

$$\tau_z = \frac{A}{2l} (Y^2 - z^2);$$

que es una parábola de segundo grado, con máximo en la fibra neutra. Algo parecido ocurre con la sección circular, en que la ley es de aspecto parabólico, aunque no algébrica, teniendo, también, su máximo en la fibra neutra.

Pero no ocurre igual en todos los casos. Por ejemplo, en la sección rómbica, la ley de distribución de tensiones cortantes será:

$$\tau_z = \frac{A}{6l} (Y^2 + Yz - 2z^2);$$

que es también parabólica de segundo grado,

pero su máximo no está en la fibra neutra, sino a  $Y/4$  de distancia de ella, siendo su valor:

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{A}{6l} \cdot Y^2 \\ \tau_{\max} &= \frac{A}{6l} \cdot \frac{9}{8} \cdot Y^2 \end{aligned} \right\} \tau_{\max} = \frac{9}{8} \cdot \tau_0.$$

Algo distinto ocurre en la sección tipo "diábolo", en que la ley (suponiendo  $b_y = 1,5 b_0$ ) será:

$$\tau_z = \frac{A}{3l} (2Y^2 - Yz - z^2);$$

también parabólica de segundo grado, pero con el máximo fuera de la zona considerada, siendo, por tanto, lo que se produce en la fibra neutra, no un máximo, sino un mayor valor.

En la sección triangular, que en realidad es una combinación de las dos anteriores, la ley es parabólica única, con máximo a la mitad de la altura del triángulo, que no es la fibra neutra, ya que, debiendo pasar ésta por el centro de gravedad, estará al tercio de la altura.

Es fácil establecer un criterio general respecto a la cuestión que nos ocupa. Si diferenciamos la función de Jouravski:

$$d\tau_z = \frac{A (-d\eta_z) b_z - (\eta_y - \eta_z) db_z}{l b_z^2};$$

Pero como:

$$d\eta_z = b_z \cdot z \cdot dz;$$

simplificaremos así:

$$\begin{aligned} d\tau_z &= -\frac{A}{l} \cdot z \cdot dz - \frac{A}{l} \frac{\eta_y - \eta_z}{b_z^2} \cdot db_z = \\ &= -\frac{A}{l} \cdot z \cdot dz - \frac{\tau_z}{b_z} \cdot db_z; \end{aligned}$$

y de ahí:

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{A}{l} \cdot z - \frac{\tau}{b_z} \cdot \frac{db_z}{dz};$$

que, particularizada para la fibra neutra, será:

$$\left( \frac{d\tau_z}{dz} \right)_0 = -\frac{\tau_z}{b_z} \cdot \frac{db_z}{dz}.$$

Siendo  $b_z$  y  $\tau_z$  valores esencialmente positi-

vos, se deduce: a) la función  $\tau_z$  tendrá un máximo en la fibra neutra ( $d\tau_z : dz=0$ ), cuando la línea de contorno de la sección tenga en la fibra neutra tangentes paralelas entre sí ( $db_z : dz=0$ ), como ocurre en las secciones rectangular y circular; b) las inclinaciones de las

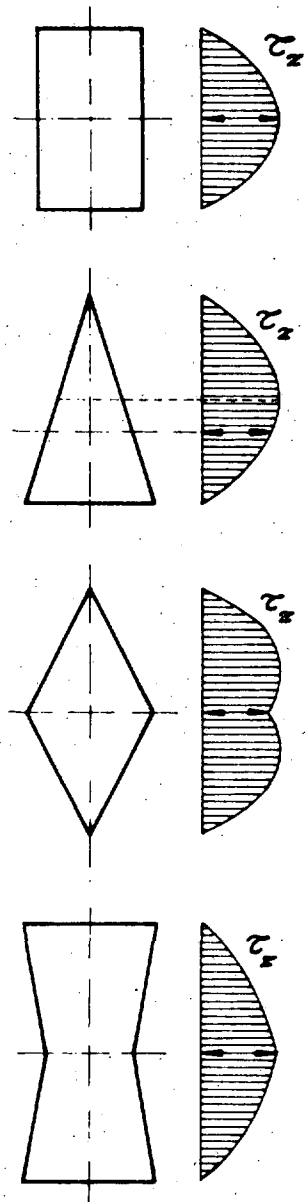


Figura 2.<sup>a</sup>

tangentes a ambas funciones ( $\tau_z$  y  $b_z$ ) en la línea neutra, son siempre de signos contrarios; es decir, que si la sección tiene tangentes convergentes, como el rombo, la ley de distribu-

ción de tensiones cortantes las tendrá divergentes, y habrá, por tanto, un máximo real dentro de la sección, pero no en la fibra neutra; si, por el contrario, las tangentes al contorno fuesen divergentes, como ocurre en el diábolo, las tangentes a la ley de tensiones serán convergentes, y no habrá máximo real, produciéndose un mayor valor en la fibra neutra.

Por tanto, la ley parabólica clásica, única de que se suele hablar, carece de generalidad, refiriéndose sólo al caso en que las tangentes al contorno en la fibra neutra sean paralelas entre sí (ordinariamente, perpendiculares a la fibra neutra), caso desde luego el más frecuente, pero no el único ni mucho menos.

La función  $\tau_z \times b_z$  es, en cambio, la que tiene siempre el aspecto parabólico con máximo en la fibra neutra al que estamos acostumbrados. En efecto:

$$\frac{d(\tau_z \cdot b_z)}{dz} = \frac{A}{l} \cdot \frac{d\eta_z}{dz} = -\frac{A}{l} \cdot b_z \cdot z;$$

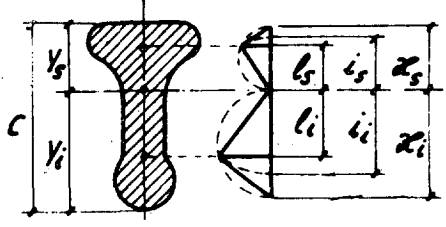
que para  $z = 0$  será siempre nula.

La ley de distribución de tensiones cortantes a lo largo y a lo ancho de la sección transversal, tiene indudablemente sólo un interés teórico. En la práctica, nos conformamos en general con conocer la cuantía de la mayor tensión producida y en qué sitio se produce. Alterando ligeramente los términos del problema, vamos a ocuparnos de calcular la tensión en la fibra neutra; si estuviéramos en el caso de tangentes paralelas, la reputaremos como máxima; si las tangentes fuesen divergentes, la consideraremos como mayor valor; sólo si estuviéramos en el caso de tangentes convergentes, nos veríamos obligados a calcular la relación entre la tensión máxima y la producida en la fibra neutra; que si se tratase de contornos rectilíneos, hemos visto vale 9/8, pero para contornos curvilíneos será preciso estudiarla especialmente.

Según la expresión de Jouravski, el valor correspondiente a la fibra neutra será:

$$\tau_0 = \frac{\eta_y}{b_0 l} \cdot A.$$

El momento de primer grado referido a media sección, puede ser sustituido por el producto de la superficie de dicha media sección, multiplicada por la distancia de la fibra neutra al centro de gravedad de ella; así como también, el

		BRAZO CORTANTE EN DIVERSAS SECCIONES					
		$\frac{y_{si}}{c}$	$\frac{l_{si}}{c}$	$\frac{l_{si}}{c}$	$\frac{z_{si}}{c}$	$\frac{z}{c}$	
SECCIONES SIMÉTRICAS	I ala ancha laminada	0'50	0'40	0'42	0'435	0'87	
	I, P.N. laminada	0'50	0'37	0'39	0'42	0'84	
	□, P.N. laminada	0'50	0'36	0'38	0'41	0'82	
	Tubo rectangular fino (pared 5%)	0'50	0'34	0'36	0'385	0'77	
	Tubo redondo fino (pared 5%)						
	Rectángulo, cuadrado	0'50	0'25	0'29	0'33	0'66	
	Círculo, elipse	0'50	0'21	0'25	0'295	0'59	
	Rombo, cuadrado diagonal	0'50	0'16	0'20	0'25	*0'50	
SECCIONES ASIMÉTRICAS	T de hormigón armado (espesor 20%; q=10%)	S	0'48	0'38	0'39	0'40	0'92
	I	0'52	0'52	0'52	0'52		
	Rectángulo de h. a. (q=10%)	S	0'42	0'21	0'24	0'27	0'85
	I	0'58	0'58	0'58	0'58		
T, P.N. laminada	S	0'28	0'20	0'21	0'21	0'69	
I	0'72	0'36	0'42	0'48			
Triángulo	S	0'33	0'18	0'20	0'23	*0'56	
I	0'67	0'22	0'27	0'33			

\* La mayor tensión de cortadura no se produce en la fibra neutra, y es un 12'5% mayor que la correspondiente a dicho punto.

Figura 3.<sup>a</sup>

momento de inercia de la sección completa, puede sustituirse por la suma de los momentos de inercia de cada una de las partes en que la sección queda dividida por la fibra neutra, siendo cada uno de dichos momentos equivalente al producto de la superficie correspondiente, por el cuadrado del radio de giro de ella, referido a la fibra neutra. Entonces:

$$\frac{A}{b_0 \tau_0} = \frac{I}{\eta_Y} = \frac{\omega_s \cdot r_s^2 + \omega_i \cdot r_i^2}{\omega_s \cdot l_s}$$

Ahora bien, pasando la fibra neutra por el centro de gravedad, los momentos de primer grado de ambas partes, referidos a dicha línea, deben ser iguales, y por tanto:

$$\frac{A}{b_0 \tau_0} = \frac{\omega_s \cdot r_s^2}{\omega_s \cdot l_s} + \frac{\omega_i \cdot r_i^2}{\omega_i \cdot l_i} = \frac{r_s^2}{l_s} + \frac{r_i^2}{l_i}$$

Los dos sumandos del segundo miembro, son las terceras proporcionales entre el radio o brazo de giro o dinámico (como media), y el brazo o radio estático o de primer grado, valor geométrico perfectamente definido, que en lo sucesivo denominaremos "brazo cortante" de cada una de las partes en que la sección queda dividida por la fibra neutra, designando también, como brazo cortante de la sección completa, a la suma de los brazos cortantes de sus dos partes. Tendremos:

$$\frac{A}{b_0 \tau_0} = x_s + x_i = x;$$

y entonces, finalmente:

$$\tau_0 = \frac{A}{b_0 x}$$

Es decir, la tensión cortante en la fibra neutra (sea o no máxima o mayor valor) se obtendrá dividiendo el esfuerzo de cortadura solicitante de la sección, por la superficie de lo que denominaremos "rectángulo de garganta", cuya anchura es la de la sección en la fibra neutra, y cuya altura es el brazo cortante de la sección.

Nos conviene llegar a otra interpretación geométrica más intuitiva del fenómeno. Como la ley de tensiones axiales debidas a la flexión, es un plano pasando por la fibra neutra, la resultante de dichas tensiones nos vendrá expresada por un momento de primer grado respec-

to a la fibra neutra, mientras que el momento de ellas desde la dicha fibra neutra será un momento de segundo grado o de inercia. El cociente del momento de inercia por el de primer grado, de cada una de las partes de la sección divididas por la fibra neutra, a la vez que brazo cortante parcial, será la distancia de la fibra neutra al centro de presiones (en nuestro caso de tensiones), y, por tanto, el brazo cortante total de la sección será la distancia entre los centros de presiones de las zonas comprimidas y tendidas como consecuencia de la flexión, es decir, la distancia entre centros de gravedad de los diedros de tensiones.

Es curioso que la anterior deducción, que no parece tener demasiadas dificultades, haya escapado a los tratadistas clásicos de Resistencia de Materiales, y sólo la encontremos desarrollada en el libro sobre *Hormigón Armado*, de don Alfonso Peña, que estudiando un caso particular, la sección rectangular de hormigón armado, llega a deducir el valor matemático exacto del brazo cortante, que denomina "brazo de palanca a flexión". Es lástima que la definición geométrica del mismo no quedé del todo clara, y que más adelante le asigne un valor medio aproximado unitario de 0,80, que no corresponde a la realidad, que se aproxima más a 0,85.

Una de las ventajas de esta forma de ver las cosas, es que siendo el brazo cortante una característica geométrica lineal perfectamente definida para cada forma de sección, existe proporcionalidad entre ella y las restantes magnitudes lineales, lo que permite fácilmente su tabulación. Incluso en las figuras no del todo semejantes, como son las series de perfiles comerciales de hierro (dobles tes, simples tes, ues, tubos), las relaciones entre el brazo cortante y el canto total son suficientemente parecidas para poder unificar resultados. Se adjunta una tabla de valores del brazo cortante, calculada por el autor, que proporciona extraordinaria comodidad al cálculo de tensiones de cortadura en la fibra neutra de secciones frecuentes.

Los estudios elásticos de Saint-Venant, niegan validez a la expresión de Jouravski, en las proximidades de los puntos de aplicación de fuertes cargas aisladas, entre las cuales hay que considerar siempre las reacciones de apoyo. Tal vez en ello se basa el criterio universalmente admitido para calcular a cortadura los roblones, tornillos, etc. (dos cargas aisladas muy próximas, que prácticamente no producen fle-

xión intermedia), consistente en dividir el esfuerzo cortante por la superficie de la sección, para obtener la tensión cortante.

La diferencia entre ambas formas de proceder, no es en modo alguno despreciable, ya que para la sección circular se obtendrán los dos valores siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{A}{\pi D^2 : 4} = 1,28 \cdot \frac{A}{D^2} \\ \tau_2 &= \frac{A}{D \cdot 0,59 \cdot D} = 1,70 \cdot \frac{A}{D^2} \end{aligned} \right\} \frac{\tau_2}{\tau_1} = 1,33 ;$$

en tanto para secciones rectangulares, la relación es de 1,50, y para secciones rómbicas, 1,78.

No tengo elementos de juicio suficientes para emitir una opinión sobre dicha disparidad de criterios y resultados, pues no conozco el desarrollo de los estudios de Saint-Venant. Pero lo que no cabe duda es que, dividiendo el esfuerzo por la superficie de la sección, lo que obtenemos para la tensión cortante, es un valor medio uniforme en toda ella, inferior, por tanto, a cualquier valor máximo, cualquiera que sea la ley de distribución desigual de las tensiones, por pequeña que sea la desigualdad. Es decir, nos aproximamos al valor real, posiblemente mucho más, pero siempre por defecto, y esto en cálculos resistentes puede ser peligroso.

Creo, sin embargo, que lo más grave del procedimiento anterior, es la falsa idea que sugiere el alumno (al establecer dos criterios de cálculo distintos, sin la debida ponderación de circunstancias), de que una cosa es el esfuerzo cortante debido a la flexión, y otra totalmente distinta, el esfuerzo cortante puro. En primer lugar, no hay esfuerzo cortante debido a la flexión, sino esfuerzo cortante concurrente con la flexión: la resultante de las fuerzas exteriores (solicitaciones y sustentaciones) aplicadas a la izquierda de la sección, si se proyecta sobre un eje de la sección transversal, nos da un esfuerzo cortante, y si se toma su momento respecto a otro eje de la misma perpendicular al anterior, nos da un momento flector; cada uno de dichos esfuerzos (fuerza y momento), produce en la sección determinadas tensiones elásticas, de tipo cortante en un caso, y de tipo axial en

el otro; y cada clase de tensiones tiene su ley de distribución de forma característica. Dentro del amplio ámbito constituido por la simultaneidad de ambos esfuerzos, lo mismo que existe un caso extremo de flexiones sin cortaduras, existe el opuesto de cortaduras sin flexiones o cortadura pura. El fenómeno de la cortadura o cizallamiento es, por tanto, único, y como único debe ser estudiado, lo cual no es obstáculo para establecer criterios de cálculo distintos según las circunstancias, si realmente estuviera justificado.

La evidencia de lo que antecede, se comprueba por el hecho de que la separación entre ambos casos no sea en modo alguno absoluta. Supongamos, por ejemplo, un eje de máquina eléctrica horizontal, en que el devanado del rotor ocupe prácticamente todo el espacio entre cojinetes. Si podemos suponer que el rotor constituye una masa compacta y rígida, el eje debería calcularse por la expresión clásica de cizallamiento puro, en la reducida zona de holgura entre devanado y cojinete, solicitado por la mitad del peso del rotor. Pero la hipótesis es demasiado optimista, o en todo caso, si puede considerarse real en los primeros momentos, va perdiendo validez con el tiempo, al cuartearse el barniz, dejando cierta libertad de movimiento entre los paquetes de hilos; el devanado va pasando a ser una carga más o menos uniformemente repartida, y la tensión cortante deberá calcularse, a igualdad de sollicitación que antes, por la expresión de Jouravski, obteniendo valores apreciablemente mayores que en el caso anterior.

No se ve claro hasta qué punto la variación de circunstancias antes expuesta, puede dar lugar a dos leyes de distribución de tensiones cortantes en la sección de apoyo, tan absolutamente distintas; teniendo en cuenta que hablamos de esfuerzos cortantes, y no de momentos flectores, para los cuales la referida variación de la hipótesis de sollicitación, justifica plenamente la diferencia entre las correspondientes formas de trabajo. Creo merecería la pena revisar estos conceptos, por quien se sienta con fuerzas y medios para ello, pues la impresión que producen es que el supuesto de distribución uniforme de tensiones en el caso de cizallamiento puro, no pasa de ser un artificio cómodo, pero sin justificación real.