

NUEVAS PERSPECTIVAS EN EL CALCULO DE PRESAS DE MATERIALES SUELTOS

Prof. Ing. C. C. P. J. A. SALAS

Ing. C. C. P. A. SERRANO

En los últimos treinta años, el concepto sobre la presa de materiales sueltos ha evolucionado esencialmente. Antes se la consideraba como un tipo de construcción secundario, empleado preferentemente en obras de poca importancia, y cuya seguridad era relativamente dudosa, si se la comparaba con la que podían ofrecer las presas de fábrica más consistentes, de comportamiento más conocido y calculables por métodos más científicos.

Hoy, sin embargo, no existe una diferencia de estimación entre ambas clases de estructuras, y más bien se cree que la presa de materiales sueltos es más apta para conseguir garantía suficiente en los casos de condiciones geológicas dudosas, ya que no impone al terreno tensiones tangenciales ni gradientes hidráulicos tan grandes como las presas compactas.

El camino recorrido en el arte de construir presas de materiales sueltos ha sido largo, y el ingeniero, al estampar hoy su firma en un proyecto de esta clase, siente incluso menos ansiedad por la responsabilidad contraída que en el caso de otro tipo de presas. Esto se debe a que la experiencia demuestra que bien pocas veces el terreno de cimentación, o las canteras de materiales, dejan de guardar incógnitas, y las presas de materiales sueltos se adaptan con facilidad mucho mayor a variaciones respecto a las condiciones previstas.

Por otra parte, al aumentar la altura de las obras, las solicitudes sobre el cimiento crecen. Las rocas, aun las mejores, no tienen una resistencia infinita, por lo cual parece claro que se alcanzará un límite de altura, por encima del cual tan sólo la presa de materiales sueltos resultará viable.

Los brillantes resultados obtenidos se deben a perfeccionamientos en las técnicas de proyecto y construcción. De la presa homogénea hemos pasado, en la mayor parte de los casos, a la de zonas diferenciadas, y entre estas últimas, los materiales de transición o los filtros graduados impiden la erosión interna aun en el caso extremo de formación de grietas. En cuanto a la construcción, el enorme desarrollo de la maquinaria de todo género permite desmenuzar, seleccionar, mezclar y compactar cada vez mejor y más económicamente.

Todo este progreso ha sido bastante para hacer pasar inadvertido un hecho que, sin embargo, es impor-

tante: el método empleado en la comprobación de los taludes de las presas de materiales sueltos, no ha evolucionado apenas desde que fue creado, en 1917, y es, por otra parte, tan primitivo, que no ha sido capaz de aportar progresos apreciables a la técnica de las mismas.

El perfil de las presas no ha variado de aspecto. En cuanto a sus taludes, a pesar de estar constituidos por materiales mejores, son más tendidos que en las presas antiguas, lo cual conduce evidentemente a mayor seguridad, sin necesidad de comprobación por cálculo alguno.

El método de cálculo empleado es un procedimiento de comprobación a la rotura, a lo largo de líneas escogidas arbitrariamente, y no nos da información alguna sobre la manera real de trabajar de la presa, de distribuirse las tensiones ni sobre la aparición y propagación de zonas plásticas locales.

El primitivismo del método fue reforzado durante muchos años por la trivialidad en su aplicación. El método original de la circunferencia de rozamiento, si bien elemental en su planteamiento, tiene cierto rigor teórico, especialmente a partir de las precisiones de Taylor, pero pronto quedó desplazado para el cálculo de presas de tierra por una versión simplificada del método de las fajas de Fellenius, presentada por May en el Congreso de Grandes Presas de 1936 (May, 1936).

La circunstancia, que estimamos desgraciadas, de que tan esquemático método quedase recogido en el Manual de presas del Bureau of Reclamation, aseguró su difusión. El método de May, sin embargo, no tiene en cuenta la transmisión lateral de fuerzas entre las diversas fajas, y ni siquiera insinúa la existencia de la misma. El error debido a ignorar las presiones efectivas en los planos verticales de separación de las fajas es apreciable, pero, en el caso de presas de tierra, no es grande, especialmente si son altas, ya que entonces el efecto de la cohesión se difumina y las posibles líneas de rotura son de curvatura relativamente pequeñas. Pero, como ha sido mostrado por diversos autores, y en particular por V. Escario (1961), el error cometido al no tener en cuenta la transmisión de fuerzas por medio de las presiones neutras es ya decididamente inaceptable.

El período de mayor difusión del método de May

debe considerarse, por lo tanto, como de regresión en el tratamiento del problema. Coincide con un período especial de relativo decaimiento en la *Mecánica del Suelo*, en el que, después de los entusiasmos iniciales, según los cuales parecía que en plazo breve esta rama de la técnica iba a ser tan precisa y sistemática como el cálculo de las estructuras fabricadas, se comprueba la gran complejidad de las propiedades de los suelos y la dificultad de definir las, dadas las heterogeneidades de las masas en estudio.

En este período, en el que los filos de los machetes de los primeros pioneros se han mellado, y todavía no se han forjado otros nuevos, prolifera la idea de que, siendo el suelo tan complejo, no merece la pena aplicar métodos analíticos complicados para estudiarlo. Poco faltaba para darle póstumamente la razón a Fillunger (1936), en su célebre polémica, y reconocer que lo más a que podía aspirarse era a una Geología ingenieril con un mejor conocimiento fundamental de los procesos de deformación del suelo, pero con pretensiones cuantitativas casi nulas.

Esta regresión, cuya causa principal fue, sin duda, las catastróficas circunstancias mundiales, llegó precisamente a truncar la línea señalada en un momento muy prometedor. En las Memorias del citado Congreso de Grandes Presas, de Washington, hay varios trabajos de análisis realmente profundo de las condiciones de estabilidad de las presas, como son los de Frontard y Mayer y los de Ehrenberg, Jonson y Brahtz, este último particularmente interesante, por ser la primera tentativa que conocemos de introducir en el análisis el hecho de que la presa no es un cuerpo creado fuera de la acción de la gravedad, y sometido luego a ella, sino que está construida paulatinamente, capa a capa, de forma que cada masa de tierra añadida incide sobre un cuerpo ya deformado por su peso propio, y, por lo tanto, con un estado tensional ya existente. Intenta igualmente apreciar, por medio de un coeficiente, el efecto de precompresión que el apisonado induce en las tierras, imponiéndoles ciertas tensiones residuales que se sobreponen a las de peso propio.

El método de Brahtz no era, evidentemente, correcto, ya que no tomaba en cuenta la variación que en el estado

de tensiones inicialmente calculado produce el hecho de que se alcance la condición de plasticidad en una zona determinada. Por otra parte, estaba presentado en una forma de complicada aplicación práctica, demasiado complicada para las tendencias de aquel momento, en el que se suponía que la complejidad matemática diluía la realidad física. Aun así, este método daba una cierta idea de las zonas débiles del macizo de la presa, que no podía obtenerse de otra manera, y así lo aplicamos en su día, conjuntamente con el método sueco, a los estudios preliminares para el Proyecto Reformado de la Presa de la Sotonera. En la figura 1.^a vemos los resultados de esta comprobación. A la derecha, el estado del talud aguas abajo, para embalsar lleno, y a la izquierda, el del talud de aguas arriba para desembalse instantáneo. Los números significan el coeficiente de seguridad de cada punto respecto a la aparición del estado plástico. Vemos que, en el caso de embalse lleno, ningún punto llega a entrar en este estado, por lo cual el método empleado resulta teóricamente lícito.

El trabajo de Brahtz, sin embargo, no alcanzó resonancia notable. Quizá uno de los pocos casos en que pudo realmente utilizarse sea éste de la comprobación del perfil antiguo de la Sotonera (homogéneo), pero carece de flexibilidad para adaptarse a heterogeneidades, formas complicadas y, especialmente, a zonas de materiales distintos.

En el proyecto definitivo de La Sotonera (con espaldones permeables), no pudo, por esta causa, aplicarse. Faltaban todavía algunos años para que la complejidad matemática dejase de inspirar temor, lo cual llegó con el desarrollo de los ordenadores electrónicos, y para que se reconociese que es precisamente aquella la que permite que el aparato analítico se ciña, como una piel, a la presencia viva del fenómeno. Es necesario llegar a 1952, dieciséis años después del Congreso de Washington, para encontrar un progreso importante, con la tesis doctoral de Bishop (1952).

El método de Bishop, sin embargo, no difiere esencialmente del método sueco original, sin la simplificación indicada por Fellenius y vulgarizada por May. No tiene en principio más valor que el de marcar el momento del

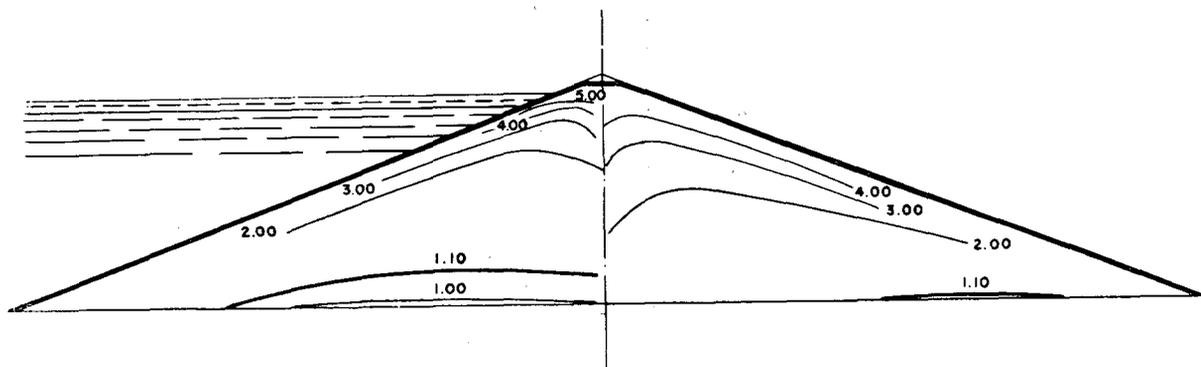


Fig. 1.^a—Resultados de la aplicación del método de Brahtz al perfil tipo original de la presa de la Sotonera.
(Results of the application of the Brahtz's method to the original section of the Sotonera dam).

retorno de la marea y, por otra parte, el de sustituir el delicado método gráfico propugnado por Fellenius y Ehrenberg por un método analítico en diferencias finitas. El desarrollo de los ordenadores electrónicos alcanzó muy pronto a este método, y permite hoy calcular el coeficiente de seguridad de un círculo en algunos segundos.

Con todo, este mismo método, así como el de Janbu y el reciente de Nonveiller, aplicables estos dos últimos a líneas de forma cualquiera, no ha servido tampoco para perfeccionar la concepción de la obra, siendo así que ésta es la principal misión de los estudios de resistencia de materiales. No es difícil, por ejemplo, llegar a formular leyes empíricas para construir un determinado tipo de bóveda, pero la creación de una nueva forma conduce a una indeterminación de grado tan alto, que sólo se puede salvar si conocemos la influencia que en la distribución de tensiones tiene cada variación introducida. Todavía es más sensible este problema en ingeniería mecánica. Nada más fácil que proyectar una pieza de máquina, probando una forma tras otra, hasta encontrar aquélla que resista. Pero sólo un estudio por medio de la resistencia de materiales nos indicará la forma racional en la que todo el material resulte aprovechado y en la que no existan concentraciones peligrosas de tensiones.

La razón de la incapacidad del método de comprobación de taludes para promover el progreso de las presas de materiales sueltos, radica en que no nos ha dado una pintura real del estado de tensiones. Sólo este análisis permite averiguar dónde sobra material y dónde falta, y distribuirlo adecuadamente. Una presa de materiales sueltos, además, no es un elemento que se construya de una vez, ni tampoco es una pieza de máquina en la que las tensiones originadas por el peso propio son insignificantes o, al menos, secundarias: una presa de materiales sueltos se construye poco a poco, y el peso propio es la fuente principal de tensiones. En consecuencia, el estado de tensiones depende esencialmente del proceso de construcción y, dadas las propiedades de los materiales empleados, de los asientos relativos posteriores.

Un ejemplo muy claro del primitivismo de los métodos de cálculo empleados en las presas de materiales sueltos lo constituye la comprobación de la estabilidad de presas con núcleo delgado, para el caso de embalse lleno. Durante mucho tiempo el cálculo se efectuó por círculos cóncavos hacia arriba hasta que quedó claro por medio del trabajo de Samsioe (1954) que la forma probable de rotura tenía la convexidad en esa dirección. Pero la forma real de calcular esta línea de rotura sigue sin conocerse, ya que no se sabe la dirección de las tensiones en el contacto entre el núcleo y los espaldones, que dependen sin duda de la deformabilidad y de los asientos en el tiempo de los materiales respectivos.

Tan sólo recientemente se ha llegado a sospechar que el empuje de los espaldones tiene necesariamente que provocar en muchos casos condiciones de plasticidad contenida en el núcleo, situación que, de acuerdo con Nonveiller (1961), resultaría muy favorable ya que impediría la producción de grietas en aquél. Sin embargo, se de-

duce también que esta condición de plasticidad se produce con mayor facilidad en núcleos relativamente anchos y no puede por menos de pensarse si las grietas longitudinales observadas en las presas de la T. V. A. pudieran ser debidas a un efecto desfavorable de esta condición.

Resulta necesario, por lo tanto, hacer un esfuerzo para reanudar el camino olvidado y poner el cálculo de las presas de tierra a una altura teórica comparable al cálculo de las demás estructuras. Este esfuerzo es similar al que permitió pasar de la Resistencia de Materiales clásica a la Mecánica Elástica en el primer cuarto de este siglo. Tenemos que prever que la tarea será mucho más complicada, ya que las tierras presentan características de heterogeneidad, anisotropía, y de plasticidad y de deformación retardada muy complejas, y aun en los casos en que decimos que permanecen en estado elástico aplicamos el sentido más lato de esta expresión. Es decir, que existe una ley, por complicada que sea, que permite relacionar tensiones con deformaciones. Afortunadamente, si bien la tarea es de una complejidad mucho mayor que aquella con la que se enfrentaron los creadores de la Mecánica Elástica, también nuestros recursos son mayores, especialmente en lo que se refiere a los métodos que descomponen el continuo en elementos finitos y a la aplicación a los mismos de los ordenadores.

Las fases en la resolución del problema del estado tensional de un macizo de materiales sueltos, en general, y de una presa constituida por ellos, en particular, son dos: por una parte, está el planteamiento del sistema o sistemas de ecuaciones diferenciales que, junto con las condiciones de borde describen el estado tensional del macizo. Por otra parte, está la resolución de este sistema de ecuaciones.

La primera fase constituye por sí sola uno de los temas básicos de la Mecánica del Suelo e implica el conocimiento del comportamiento real del terreno para cada nivel de carga. Dicho de otra manera: para resolverla, es necesario saber la relación entre tensiones y deformaciones en cualquier estado de sollicitación.

No vamos a entrar ahora a estudiar este complejísimo asunto que de manera permanente es uno de los campos favoritos de los investigadores, y en el cual queda aún una enorme extensión sin explorar. Con todo, conocemos hoy ya lo suficiente para, mediante algunas simplificaciones, llegar a formular modelos matemáticos suficientemente aproximados. Este es, al fin y al cabo, el mismo camino que se sigue en el estudio de los estados de tensión de macizos de otros materiales, en los que se suele tomar la primera aproximación, expresada por la ley de Hooke. Se llega así a soluciones básicas, muchas veces adecuadas para los casos usuales, y en otros, en los que por una u otra razón se requiere exactitud, se introducen los demás factores (retracción, temperatura, fluencia, etc.), como efectos secundarios que se suponen al principio, y que se añaden en forma de corrección.

En principio, la superposición es raramente aplicable al caso de suelos. No es lícita cuando existen áreas en plasticidad, ni tampoco cuando las leyes de tensión-de-

formación toman la forma habitual en materiales sueltos, más compleja que la lineal de Hooke.

Sin embargo, siempre que la corrección sea pequeña respecto al efecto principal, puede dar aproximación aceptable, conduciendo al mismo tiempo a simplificaciones a veces enormes en el planteamiento del sistema de ecuaciones.

La resolución de éste representa, como hemos dicho, la segunda y última fase del problema. Durante mucho tiempo, ha constituido una dificultad insalvable, aun para condiciones en los bordes muy sencillas y adoptando un modelo matemático del suelo extremadamente simple. Basta que recordemos que fue necesario esperar a 1935 para que Mindlin resolviera el problema fundamental de la carga aislada en el interior de un semiespacio de Bousinesq.

Hoy en día el panorama se ha transformado por completo, gracias a los ordenadores electrónicos, y esta parte del problema ha pasado a un segundo plano de dificultad, cediendo el puesto a la primera fase de planteamiento de las ecuaciones y previa selección del modelo matemático apropiado.

Con todo, es necesario que el método de resolución esté de acuerdo con la naturaleza intrínseca del problema. Hoy comprendemos que la expresión matemática está ligada a la realidad en un plano fundamental, y no es solamente una pintura aproximada con la que queremos remedar a aquélla.

Desde este punto de vista podemos clasificar los problemas que aquí estudiamos en elípticos e hiperbólicos, según el tipo de ecuaciones diferenciales implicadas.

Si el problema que tratamos de resolver acepta una representación según un modelo matemático elástico, su trama consistirá en un sistema elíptico de ecuaciones diferenciales. En un modelo de esta clase, la modificación del estado de un punto modifica el estado de todos los puntos del cuerpo, produciéndose en ellos una perturbación que se reduce a medida que aumenta la distancia al punto modificado inicialmente. Claramente se ve que a este tipo de problemas se adaptan bien los métodos de relajación, en los que han de producirse convergencias relativamente rápidas.

Contrariamente, hay casos en los que todos los puntos del dominio estudiado alcanzan la condición de plasticidad. En estos casos, la perturbación introducida en un punto se propaga solamente a una región, sin influir en general en la totalidad del macizo. Un problema de este género entraña un sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas, y el método adecuado para su estudio es el de las características, ya que a lo largo de estas líneas se puede decir que se propaga el estado tensional a partir de las condiciones impuestas por los bordes.

Pero existen casos de una complejidad mayor, que son precisamente los que prácticamente habían quedado sin tocar hasta el comienzo de la aplicación de los ordenadores electrónicos. Son aquellos de "plasticidad contenida", en los que coexisten zonas en estado plástico con otras en estado elástico, con fronteras que generalmente no se conocen. Cada zona se rige por su propio sistema

diferencial, debiéndose mantener la compatibilidad de tensiones y deformaciones en las fronteras.

La presa de materiales sueltos, en general, se supone que se encuentra en un estado de plasticidad contenida, por lo cual cae por completo en el tercer grupo citado de problemas. Bishop indicó que un determinado tipo de talud, representativo del caso general de estas presas, encierra zonas plásticas aun cuando su coeficiente de seguridad respecto al deslizamiento total sea relativamente elevado, por ejemplo, de 1,8, superior a lo habitual en este tipo de estructuras.

No es muy seguro que este supuesto corresponda en todos los casos a la realidad, lo que tan sólo podrá averiguarse cuando se ejecuten los cálculos teniendo en cuenta las leyes reales de deformación de los suelos, el modo de construirse las presas, y no tan sólo el esquema elástico simple empleado por Bishop. Observemos, por ejemplo, en la figura 1.^a antes citada, que aguas abajo, con un talud cuyo coeficiente de seguridad es de 1,5, según el método de Bishop, no aparece zona plástica alguna según el método de Brahtz.

En todo caso, resulta claro que el procedimiento de cálculo empleado deberá tener en cuenta la posibilidad de aparición de zonas plásticas, y tener prevista la forma de tratarlas.

En el momento actual, esto sólo es posible por los métodos de la clase antes indicada, preparando las ecuaciones para el uso del ordenador electrónico. Todavía no se ha llegado a planteamientos lo suficientemente generales para que podamos decir que los problemas hayan sido ya resueltos en forma susceptible de aplicación práctica, pero las dificultades parecen salvables, y creemos que el plazo necesario para alcanzar esa meta es ya breve.

Vamos a intentar hacer, en lo que sigue, una breve síntesis de los distintos caminos de ataque que hoy se recorren. Como veremos, el problema de la presa de materiales sueltos no puede por menos de ser vencido a partir de alguno de ellos, y probablemente por varios. Ese día llegaremos a comprender, efectivamente, la forma de trabajar los materiales en los distintos puntos del perfil, y podremos proyectar éste de una manera racional, abriéndose así una nueva época para esta clase de estructuras.

Método de Allen y Southwell.

Comenzaremos con la exposición del método de relajación de D. N. de G. Allen y R. Southwell, aparecido en 1950 y que, aunque poco generalizado, tiene el mérito de ser uno de los primeros resultados prácticos del cálculo tenso-deformacional de un material elastoplástico perfecto.

Aunque hoy en día el método de Allen y Southwell ha quedado algo anticuado y su validez, como veremos más adelante, es discutible, ha proporcionado valiosas indicaciones sobre la marcha de la plastificación en algunos casos especiales de materiales puramente cohesivos.

Para el cálculo de presas de tierra este método es completamente inadecuado, pero podría haber sido una vía de investigación que, por desgracia, no fue seguida en absoluto.

Allen y Southwell calculan un estado bidimensional con las siguientes hipótesis básicas:

1.º El material es elastoplástico perfecto y la condición de plasticidad es el criterio de Mises-Hencky.

2.º En el dominio elástico las deformaciones están regidas por las ecuaciones de Hooke generalizadas y en dominio plástico por las de Prandtl-Reuss.

3.º Simplifican el criterio de Mises-Hencky para el caso de deformación plana suponiendo en el dominio plástico que el coeficiente de Poisson es $\frac{1}{2}$.

4.º Hay continuidad tanto en tensiones como en deformaciones en el límite entre regiones plásticas y elásticas.

5.º El contorno es simplemente conexo.

6.º No existen fuerzas de masa.

7.º Se llega al estado de carga mediante un proceso monótono creciente.

La determinación de tensiones y deformaciones se realiza para una serie de escalones de carga hasta llegar a la carga total a partir de aquél, para el cual aparece el primer punto en estado plástico.

Para cada escalón de carga se distinguen dos etapas de cálculo. En la primera se obtienen las tensiones en todo el plano mediante un proceso de relajación. En la segunda, se calculan las deformaciones y corrimientos: en el dominio elástico, directamente a partir de las tensiones; en el dominio plástico, por un proceso iterativo, a partir de la frontera entre las zonas, en las que se conocen los movimientos (ya calculados para la zona elástica). En este proceso iterativo lo que se determina son los incrementos de deformaciones y corrimientos que se han producido sobre los del escalón de carga anterior.

Allen y Southwell parten de que la solución elástica de un estado plano es una función de Airy, biarmónica, definida por las condiciones de contorno.

Por medio de una relajación en diferencias finitas tratan de encontrar la correspondiente función de Airy, ajustada a los valores del contorno y biarmónica en cada punto de una malla cuadrangular, que sustituye al continuo.

Durante la marcha de la relajación se comprueba mediante el criterio de Mises-Hencky, que cada punto sigue en estado elástico. En caso contrario, la condición que ha de mantenerse en dicho punto no es ya la de biarmónica, sino la de plasticidad, para el cumplimiento de la cual debe modificarse entonces, en ese punto, el procedimiento de relajación.

Cuando un punto cambia de estado pasando de elástico a plástico, suele arrastrar consigo a varios otros, ya que se modifican grandemente los residuos de la relajación de los puntos contiguos, al variar el criterio de relajación del punto en cuestión. Esto hace que la zona plástica, una vez iniciada, se propague rápidamente.

Ajustada completamente la malla, después de llegar con los residuos de la relajación a un límite prefijado, se determinan las tensiones, que están ligadas a las segundas derivadas de la función de Airy, cuyos valores se conocen en los puntos nodales de la malla.

La segunda etapa del cálculo comienza con la determinación de las deformaciones y corrimientos en la región elástica, a partir de los valores de las tensiones.

Desde la frontera entre regiones, se determinan los incrementos de las deformaciones y corrimientos en la zona plástica, lo que se realiza por iteración. Las ecuaciones de iteración están basadas en las expresiones de Prandtl-Reuss, que se apoyan a su vez en los valores de las tensiones, calculadas en la primera etapa del cálculo.

Varias limitaciones reducen, en principio, el interés de este método para la Mecánica del Suelo y, en particular, para el estudio de las tensiones en el interior de una presa de materiales sueltos.

Los materiales que constituyen una presa, en general, no son puramente cohesivos, sino que disponen de un cierto rozamiento interno; el criterio de plasticidad de Mises-Hencky no es entonces aplicable, debiendo ser sustituido por el de Mohr-Coulomb.

Las fuerzas máxicas, aparte de algún problema de cimentaciones en que carecen de importancia, frente a los esfuerzos transmitidos por la estructura al terreno, tienen una influencia no despreciable, especialmente en los estudios sobre la estabilidad de las presas de tierra y escollera.

Hay otros aspectos, que este método tampoco considera, que, aunque son más de detalle, no dejan de ser influyentes. Tales son las distintas anisotropías del terreno; geométrica, tensional e inducida, etc., que hacen al método de Allen y Southwell inadecuado para el cálculo de las tensiones y deformaciones en un macizo granular.

Sin embargo, no parece difícil introducir en él algunas modificaciones para conseguir un modelo del suelo bastante simplificado, aunque útil en una primera aproximación.

Se podría sustituir el criterio de Mises-Hencky por el

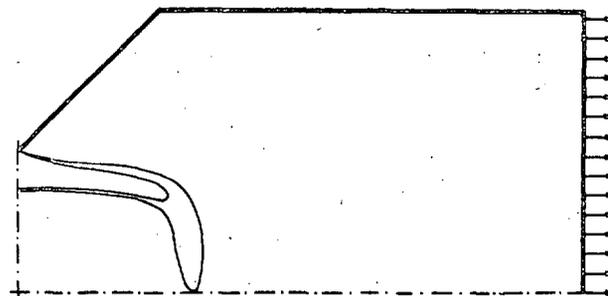


Fig. 2.ª — Avance de la plastificación en un elemento plano con dos entalladuras simétricas sometidas a tracción, según Allen y Southwell.

(Progression of tensioned plastic regions in a symmetrical notched plane element. After Allen and Southwell).

de Coulomb introduciendo, claro está, las correspondientes modificaciones en las ecuaciones de Prandtl-Reuss. También parece posible introducir las fuerzas de masa, ya que éstas no intervienen en la función de tensiones; la relajación en las regiones elásticas permanecería igual, complicándose, en cambio, bastante en las regiones plásticas.

La validez del método de Allen y Southwell, aunque adoptado por muchos autores para el análisis de problemas elastoplásticos, es discutida por Hill (1956) y D. Jurisci (1964).

Según este último autor, las condiciones de compatibilidad en la región plástica no son consideradas en absoluto por Allen y Southwell. Se sigue, en consecuencia, que las componentes de la deformación en la región plástica pueden tener una magnitud arbitraria.

Toda consideración adicional sobre las condiciones de compatibilidad, como la que Allen y Southwell propone, parece inaceptable. Suponen que la solución para la función de tensiones está ya de acuerdo con la compatibilidad entre tensiones-deformaciones y desplazamientos-deformaciones. Sin embargo, esta función se ha determinado considerando solamente las ecuaciones en tensiones, que no tienen conexión con deformaciones o desplazamientos en la región plástica.

Por todo esto, la unicidad de la solución en las tensiones puede ser puesta en duda.

Sin embargo, según Hill, aunque este método da resultados que llegan a ser cada vez menos seguros según aumenta la carga, la extensión general de la zona plástica y su forma de progresar debe ser aproximadamente la real.

Método de las características.

El método de las características para el cálculo de las tensiones en un macizo bidimensional totalmente plastificado, es una aplicación de un método matemático muy general de resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo hiperbólico, iniciado por D'Alembert, seguido más tarde por Monge y desarrollado finalmente por Riemann.

El método consiste, en esencia, en determinar dos familias de líneas (las características), y que en el caso de la plasticidad son las de deslizamiento, que gozan de la propiedad de que sobre ellas se mantienen unas ciertas funciones invariantes (invariantes de Riemann).

Es precisamente en esta propiedad donde radica la bondad del método, ya que se puede llegar a los puntos del interior del macizo por dos líneas características, que parten del contorno, en el cual se pueden determinar previamente los valores de los invariantes.

Para cada punto del interior del macizo plastificado existen, pues, dos valores de los invariantes correspondientes a las características que pasan por él.

En función de estos dos invariantes se puede determinar la elipse de tensiones y su inclinación.

El método es un procedimiento iterativo en que, a par-

tir de un contorno y siguiendo las líneas características, se van determinando las tensiones en los distintos puntos de cruce de las dos familias de líneas.

Dos caminos se han seguido para la ejecución práctica: gráfico y numérico.

El método gráfico de Josselin de Jong, es muy expresivo y de gran utilidad para casos sencillos, sin embargo, participa de los inconvenientes que adolecen todos los métodos gráficos: la gran dificultad de sistematizar la marcha del cálculo.

El método numérico ha sido puesto a punto por V. V. Sokolovski. Su aplicación está revolucionando los métodos clásicos de cálculo de muros, cimentaciones y taludes.

Es precisamente en este último punto, donde radican las esperanzas puestas en el método para su aplicación a las presas de materiales sueltos.

S. Uriel (1967) lo adopta para el dimensionamiento de presas isorresistentes, es decir, que bajo la pérdida de un coeficiente de seguridad dado, entraría toda ella en plasticidad, iniciando un camino absolutamente nuevo en el proyecto de presas de tierras.

Grandes perspectivas quedan abiertas y es de esperar rápidos progresos en lo sucesivo.

Método de elementos finitos estructurales.

La aparición de los ordenadores electrónicos en la década de los años cincuenta, significó una revolución para la técnica en general, en lo que se refería al enfoque matemático de todos los problemas de cálculo.

Los métodos de aproximación de sistemas diferenciales por elementos finitos, rehuidos hasta entonces por la prolijidad de los cálculos, comienzan a emplearse profusamente. En particular, la determinación del estado tensional de un medio continuo es tratada mediante un modelo matemático, que lo representa por un conjunto de elementos conectados entre sí en un número finito de puntos nodales.

Turner, Clough y otros introducen en 1956 este concepto de elementos finitos, suponiendo en los puntos nodales unas fuerzas virtuales que equilibran a las tensiones sobre el contorno de los elementos.

El método consiste simplemente en una aplicación del cálculo matricial a la teoría de las estructuras, consecuencia de la linealidad de las relaciones entre tensiones y deformaciones en el estado elástico, estado para el cual fue concebido inicialmente.

La introducción de otras hipótesis reológicas complica el método, debiendo realizarse un proceso de linealización de las leyes reológicas por medio de incrementos finitos.

Siguiendo de cerca a Zienkiewicz, gran expositor de este método y uno de sus creadores, resumiremos sus ideas básicas, para el caso bidimensional, que es el que nos interesa.

1.º El continuo se divide por líneas imaginarias que, para mayor sencillez, deben ser rectas. Se define así un conjunto de elementos poligonales que lo representan.

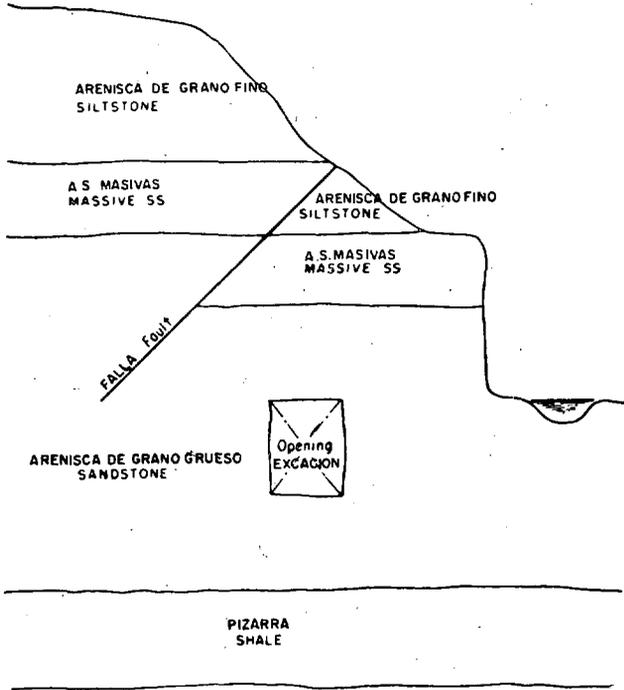
2.º Los elementos se suponen enlazados en los puntos nodales, que deben tomarse sobre los vértices de los polígonos.

3.º Se fija una ley que define unívocamente los corrimientos de los puntos de cada elemento, en función de los corrimientos de los puntos nodales, que serán las incógnitas básicas del problema.

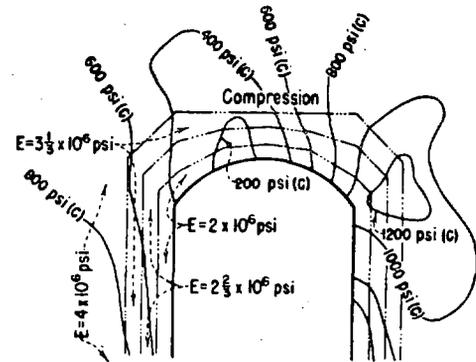
8.º Se expresan las condiciones que deben satisfacer los nodos en el contorno general del continuo.

9.º Se resuelve el sistema planteado en 7.º y 8.º, determinando los corrimientos. A partir de ellos se obtienen las deformaciones y las tensiones.

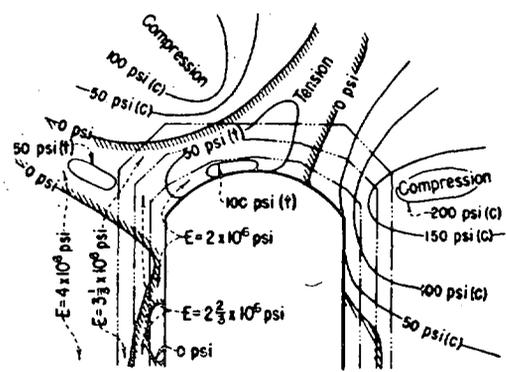
En este método las ecuaciones de compatibilidad de los corrimientos en los nodos quedan establecidas auto-



Macizo rocoso.
(Typical rock mass.)



Tensiones principales mayores.
(Major principal stress.)



Tensiones principales menores.
(Minor principal stress.)

Figs. 3.^a y 4.^a—Aplicación del método de elementos finitos estructurales a terrenos elásticos heterogéneos con accidentes singulares. Según I. G. Taylor y otros.

(Application of the structural finite elements method to elastics and heterogeneous rock mass with singular accidents after I. G. Taylor and alter).

4.º La ley de corrimientos liga unívocamente las deformaciones con los corrimientos nodales.

5.º Las tensiones vienen relacionadas a las deformaciones y a las deformaciones iniciales según la reología del material.

6.º Se determina un sistema de fuerzas, concentradas en los nodos, que equilibran las tensiones del contorno del elemento y las fuerzas de masa.

7.º Se expresa el equilibrio de cada punto nodal bajo todas las fuerzas que le transmiten los distintos elementos.

máticamente, ya que satisfacen las ecuaciones planteadas en 7.º y 8.º para todo el continuo, sin embargo, la compatibilidad puede no verificarse en las líneas de separación, ya que ello depende de las leyes adoptadas para los corrimientos en cada elemento. La convergencia de la solución obtenida a la solución exacta del continuo ha sido demostrada, comprobando que este proceso es equivalente a buscar el mínimo de la energía total del sistema.

Para la extensión del procedimiento a un material elastoplástico se puede seguir un proceso incremental por

escalones sucesivos de carga, como en el método de Allen y Southwell, partiendo de aquella carga para la cual se alcanza la condición de plasticidad en un elemento.

Como supuestos básicos del cálculo hay que fijar la condición de plasticidad y las relaciones tensión-deformación.

Cualquiera que sea la relación tensión-deformación durante el escalón de carga considerado, pueden tomarse constantes los parámetros que la definen, asimilándose, por lo tanto, a una relación lineal, siendo aplicable entonces el método matricial.

La complicación radica en que la matriz general del sistema se va modificando en los escalones de carga sucesivos, según van entrando en plasticidad nuevos elementos y según se va modificando el estado tensional en los anteriormente plastificados.

También se puede aplicar el método a la consideración de estados viscosos, solos o combinados con estados elastoplásticos, la deformación viscosa se añade a la elástica y a la plástica, la solución se encuentra ahora procediendo por escalones sucesivos de tiempo.

El método descrito tiene una potencia extraordinaria si se considera la facilidad con que puede adaptarse a cualquier contorno. Por el mismo motivo, es adecuadísimo para atacar problemas de heterogeneidad de los materiales, ya que se puede dar a cada elemento sus propias leyes reológicas y delimitar perfectamente las zonas heterogéneas; condiciones de anisotropía pueden introducirse también fácilmente.

Para la Mecánica de las Rocas como para la Mecánica del Suelo, aparte de las limitaciones que hemos señalado sobre la complejidad del cálculo para casos fuera del dominio elástico, tiene la extraordinaria ventaja de que, además de la introducción de condiciones de heterogeneidad y anisotropía, pueden incluirse con gran sencillez los accidentes singulares del terreno, tales como lechos de estratificación, fracturas, etc., con su comportamiento especial.

La aplicación de este método al cálculo del estado tensional en una presa de materiales sueltos es posible, pero no hay que olvidar que los resultados obtenidos corresponderían siempre a un modelo de la misma en el

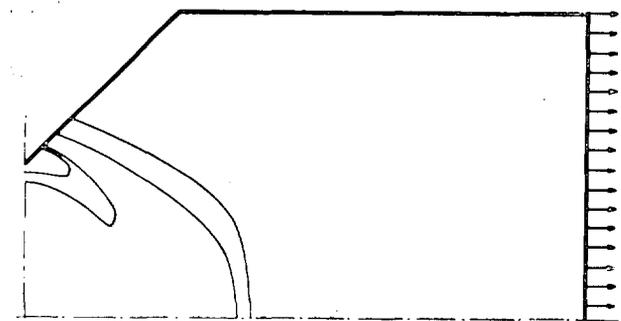


Fig. 5.^a—Avance de la plastificación en una barra entallada con simetría axial. Según Marcal y King.

(Progression of plastic regions in a notched axi-symmetrical bar. After Marcal and King.

que se ha simplificado el comportamiento reológico. Sin embargo, es indudable que esos resultados darían una visión más clara y más real del estado de la presa que el proporcionado por los métodos convencionales actuales.

Como ejemplo de aplicación de este método a la determinación del estado tensional de un macizo heterogéneo afectado también por accidentes singulares, presentamos en las figuras 3.^a y 4.^a un caso resuelto por I. G. Taylor y otros, suponiendo que el suelo se mantiene en estado elástico.

Finalmente, damos en la figura 5.^a un caso de plasticidad contenida resuelto por Marsal y King.

Método de Ang y Harper.

Alfredo H. S. Ang. y Goin N. Harper pusieron a punto, en 1964, un nuevo método para abordar los problemas de fluencia plástica contenida.

Este método, desarrollado posteriormente en el Instituto Tecnológico de Massachusetts por Whitmann y colaboradores, se presenta extraordinariamente fecundo para el cálculo del estado tensional de materiales cuya conducta reológica sea complicada.

En particular, su aplicación a la Mecánica de las Rocas y a la Mecánica del Suelo se está iniciando actualmente, y esperamos que no pase mucho tiempo antes de su directa utilización en el cálculo y dimensionamiento de presas de materiales sueltos. Por nuestra parte, hemos iniciado algunas investigaciones en este sentido que parecen ser prometedoras.

El modelo matemático propuesto por Ang y Harper está formado por una red cuadrangular regular con puntos nodales de dos tipos: puntos de masa y puntos de tensión. Cada punto de masa está enlazado a los contiguos del mismo tipo a través de puntos de tensión, y viceversa. El contorno del continuo debe estar constituido por puntos de masa. En la figura 6.^a se representa un esquema del modelo.

En los puntos de tensión se definen las tres componentes de la deformación y las tensiones correspondientes. En los puntos de masa se definen en cambio los corrimientos y las fuerzas máscas. Se produce, pues, una disyunción del continuo, agrupando en unos puntos las características reológicas, es decir, las relaciones entre tensiones y deformaciones, y en otros las fuerzas externas al sistema y las características inerciales.

El problema planteado por la fluencia plástica contenida, en un proceso de carga cuasi-estático, se transforma en este modelo en la determinación de los campos de corrimientos y de los incrementos de los corrimientos. Los campos de tensiones asociadas deben entonces satisfacer, para cada nivel de carga, las ecuaciones de equilibrio interno.

Ang y Harper calculan un estado bidimensional bajo los siguientes supuestos:

1. El proceso de carga es monótono creciente.
2. El material es elastoplástico perfecto.
3. El criterio de plasticidad es el de Mises-Hencky.

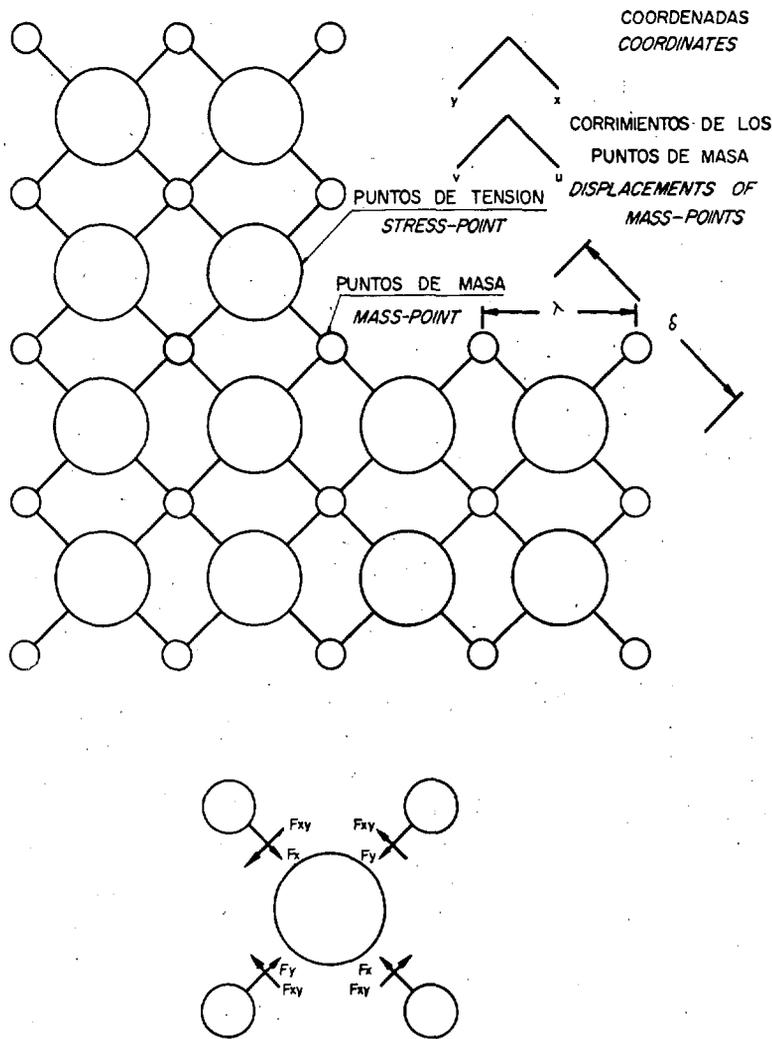


Fig. 6.^a — Modelo matemático con parámetros integrados de Ang y Harper.

(The lumped parameter model by Ang and Harper).

4. En el estado elástico las deformaciones vienen dadas por las ecuaciones de Hooke generalizadas.

5. En el estado plástico, en cambio, los incrementos de deformaciones siguen las ecuaciones de Prandtl-Reuss.

6. En el caso de deformación plana se simplifica el criterio de Mises-Hencky suponiendo $\nu = \frac{1}{2}$.

El procedimiento de cálculo consiste en determinar el campo de incrementos de *corrimientos*, en los puntos de masa, que se producen al pasar de un escalón de carga al siguiente. A partir de ellos se determinan los incrementos de las deformaciones y de éstos, los incrementos de las tensiones por las ecuaciones de Hooke o de Prandtl-Reuss, según que el punto esté en estado elástico o en estado plástico, respectivamente. En ambos casos las tensiones resultantes deben satisfacer las ecuaciones de

equilibrio interno, lo mismo que los *corrimientos* y deformaciones las ecuaciones diferenciales que los ligan.

El proceso de cálculo al dar un nuevo escalón de carga, supuesto calculado el anterior, es como sigue:

1.º Se da al primer punto de masa unos incrementos de *corrimientos*. Se calculan los incrementos de las deformaciones correspondientes en los puntos de tensión que rodean al punto de masa.

2.º Se comprueba mediante el criterio de plasticidad el estado de esos puntos de tensión.

3.º Se determinan los incrementos de tensiones en los puntos de tensión que rodean al punto de masa, a partir de los incrementos de deformación, y las fórmulas de Hooke o Prandtl-Reuss, según el estado del punto.

4.º Se plantean las ecuaciones de equilibrio interno en el punto de masa, determinando las tensiones residuales que actúan en él, según los ejes coordenados.

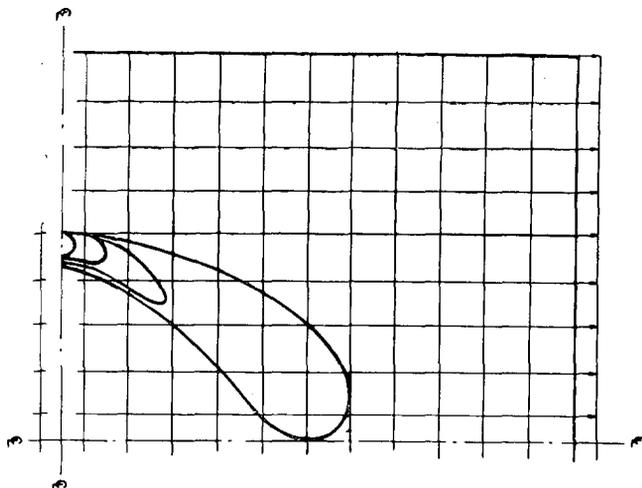
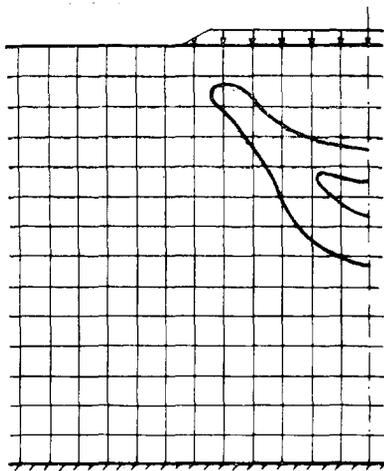


Fig. 7.^a—Avance de la plastificación en un semiespacio cargado y en un elemento plano con dos entalladuras simétricas sometido a tracción, según Ang y Harper.

(Progression of plastic regions in a partially loaded half-plane and a plane element symmetrically notched tensioned. After Ang and Harper).

5.^o Se dan unos nuevos incrementos de corrimientos al punto de masa, iguales a los productos de la flexibilidad del punto por las tensiones residuales.

6.^o Se repite todo el proceso anterior hasta conseguir que se cumplan las condiciones de equilibrio interno, o que las tensiones residuales sean menores que un valor dado.

7.^o Se pasa al punto siguiente, repitiendo el proceso.

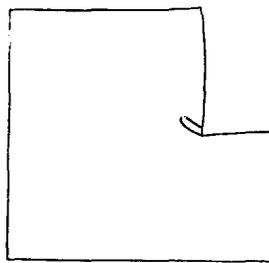
8.^o Una vez terminado con todos los puntos de masa, se comprueba si todos satisfacen simultáneamente las ecuaciones de equilibrio interno y las relaciones entre deformaciones y corrimientos. En caso afirmativo, se ha terminado el proceso. En caso negativo, hay que volver a comenzar con el primer punto de masa, repitiendo el proceso.

El modelo propuesto por Ang y Harper es matemáticamente consistente con una de las formas de diferencias finitas centrales de la teoría clásica del continuo plano.

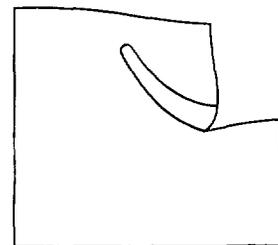
Al contrario del método de Allen y Southwell, Ang y Harper determinan los corrimientos directamente y en consecuencia, teniendo en cuenta la monotonía del proceso de carga, la unicidad de la solución queda asegurada *a priori*.

Entre las aplicaciones más recientes de este método a la Mecánica del Suelo, están los trabajos de Lorente de Nó Cabezas (1966) y L. Fort (1967).

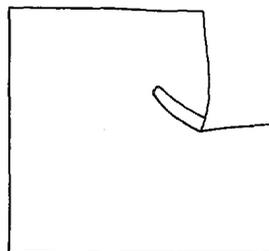
Lorente de Nó Cabezas, en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, siguiendo a Whitmann, estudió el avance de la plastificación de una excavación según aumenta su profundidad. Para evitar los inconvenientes de que algunos puntos se descarguen, utiliza el artificio de mantener las dimensiones constantes, y con ello la malla, incrementando las fuerzas de peso. Los resultados conseguidos por Lorente de Nó, los presentamos en las figuras 8.^a y 10.



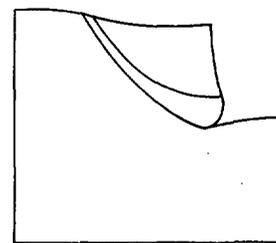
Situación para $\gamma H/C = 2,30$.
(Situation at $\gamma H/C = 2,30$.)



Situación para $\gamma H/C = 2,85$.
(Situation at $\gamma H/C = 2,85$.)



Situación para $\gamma H/C = 3,70$.
(Situation at $\gamma H/C = 3,70$.)



Situación para $\gamma H/C = 4,00$.
(Situation at $\gamma H/C = 4,00$.)

Fig. 8.^a—Avance de la plastificación al profundizar una excavación. Según Lorente de Nó.

(Progression of plastic regions deepening a vertical excavation. After Lorente de No Cabezas).

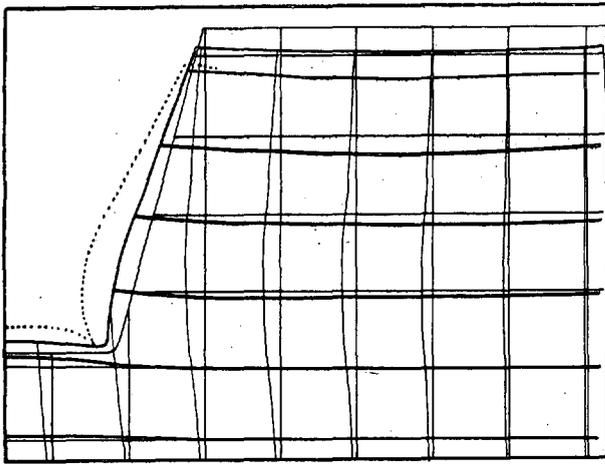


Fig. 9.ª — Deformaciones de un modelo de gelatina al ser recortado. La línea punteada representa la deformación una semana después. Según J. Scheiblaueer.

(Deformations of a gelatine model after removing the form, the lineated line shows the deformation one week after removing the form. After Scheiblaueer.)

En la figura 9.ª reproducimos las experiencias de Scheiblaueer con un modelo de gelatina, y puede observarse la concordancia con los resultados de Lorente de Nó.

L. Fort aplica también el modelo de Ang y Harper al cálculo de la cimentación de una viga flotante sobre un material visco-elastoplástico. Consigue dimensionar la viga para que, transcurrido un determinado lapso de tiempo, el coeficiente de seguridad al hundimiento sea el especificado por el proyectista.

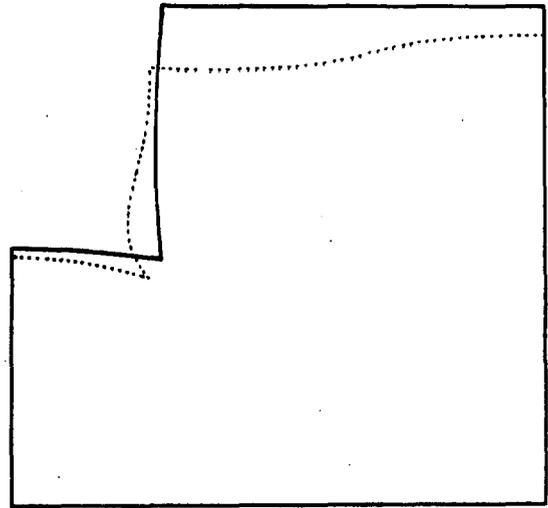
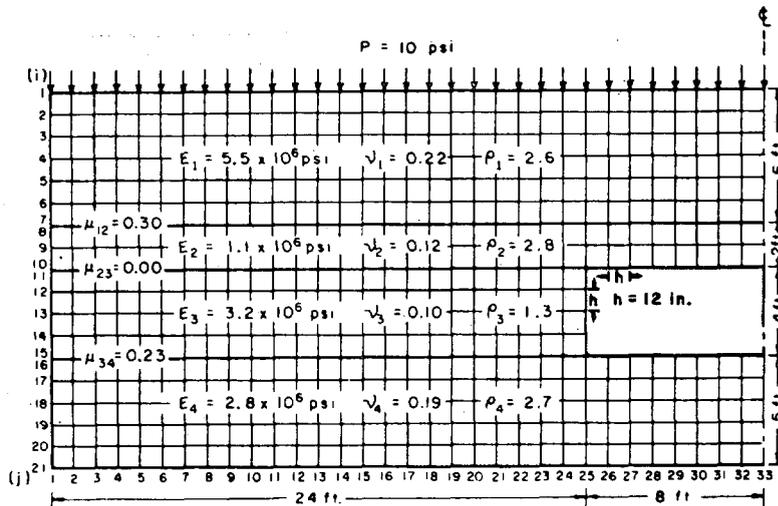


Fig. 10. — Deformaciones de una excavación, según el modelo matemático de parámetros integrados, al iniciarse la plastificación. La línea punteada representa la deformación en rotura. Según Lorente de Nó.

(Deformations of the lumped parameter model when first-yielding develops. The lineated line show the deformations of the model, at failure. After Lorente de Nó.)

Finalmente, Yih-Jian Wang y Madam M. Singh, siguiendo a Ang y Harper, calculan las tensiones y deformaciones inducidas por la excavación de un túnel de sección rectangular, en un terreno heterogéneo formado por varios estratos horizontales. En su análisis consideran las rocas elásticas y homogéneas en cada capa, pero distintas las características físicas de una capa a otra, y tienen



Dimensiones y características del modelo.

(Dimensions and properties of model.)

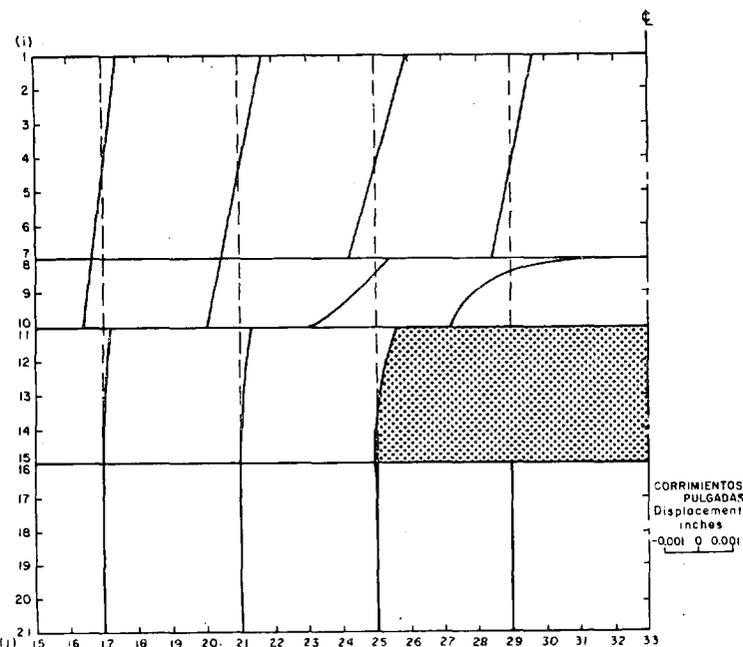
Fig. II. — Aplicación del método de Ang y Harper a un terreno heterogéneo. Según Y. Wang y M. M. Singh. (Application of the Ang and Harper's method to heterogenous rock mass. After Y. Wang y M. M. Singh).

en cuenta también el rozamiento entre las diversas capas (figuras 11 y 12).

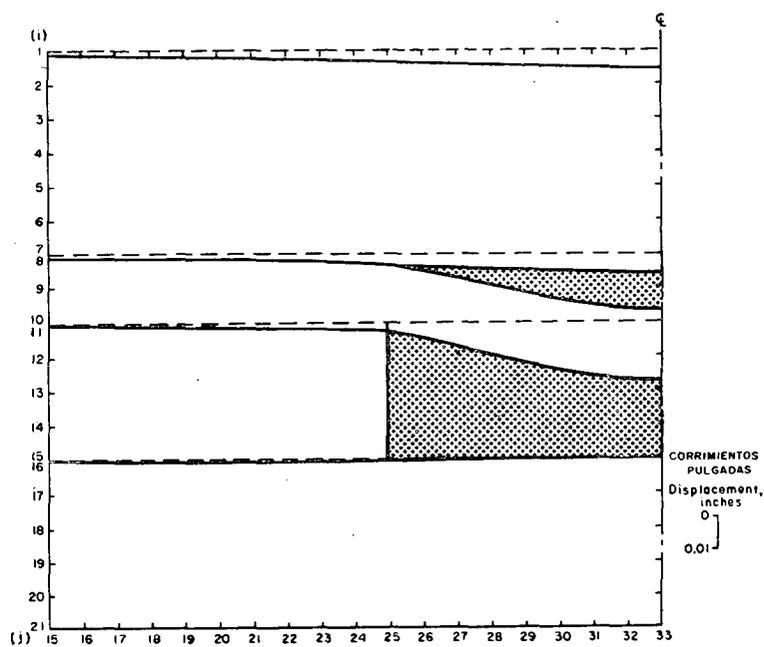
Las aplicaciones del método de Ang y Harper que hemos reproducido, aunque se apartan de nuestro objeto, es decir, el cálculo de presas de materiales sueltos, nos

indican la potencia del método y su extraordinaria flexibilidad.

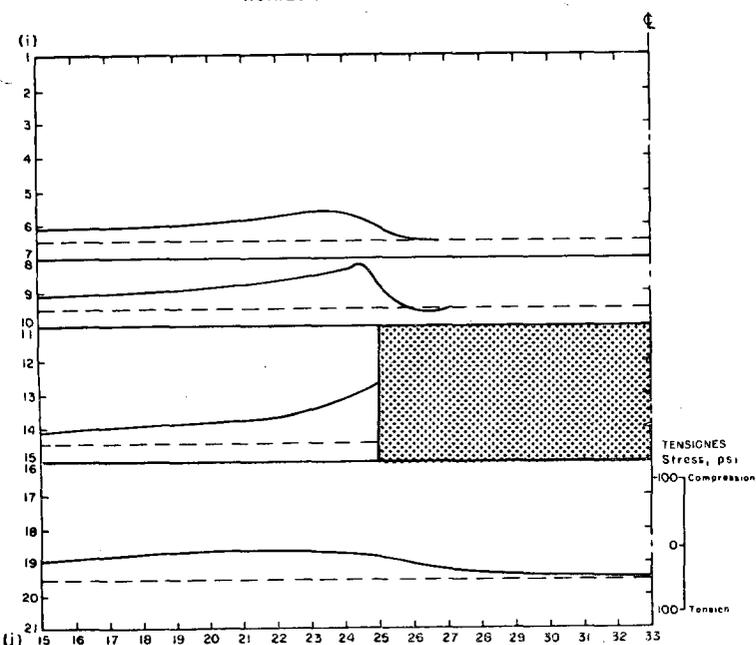
Su ventaja radica fundamentalmente en la facilidad con que se pueden introducir las más variadas condiciones reológicas. Basta para ello modificar solamente en el pro-



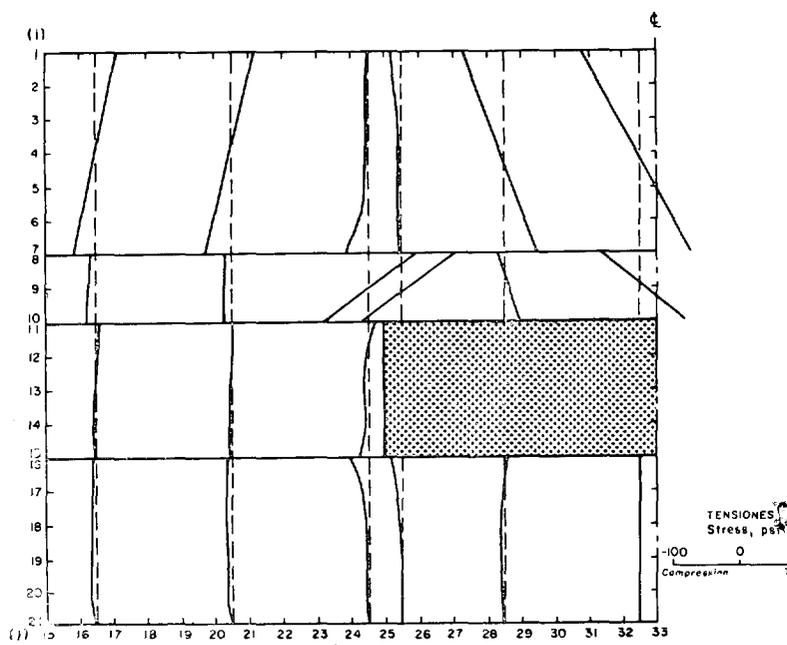
CORRIMIENTOS HORIZONTALES
HORIZONTAL DISPLACEMENT



CORRIMIENTOS VERTICALES
VERTICAL DISPLACEMENT



TENSIONES NORMALES SOBRE PLANOS HORIZONTALES
NORMAL STRESS ALONG



TENSIONES NORMALES SOBRE PLANOS VERTICALES
NORMAL STRESS ALONG

Fig. 12.— Aplicación del método de Ang y Harper a un terreno heterogéneo. Según Y. Wang y M. M. Singh.

(Application of the Ang and Harper's method to heterogenous rock mass. After Y. Wang y M. M. Singh).

grama de cálculo las relaciones entre tensiones y deformaciones. Aunque no se dispone de la enorme facilidad del método de los elementos finitos estructurales para acomodarse exactamente a la forma de los contornos, puede adaptarse, en cambio, con la aproximación deseada, escogiendo adecuadamente la magnitud de la malla.

Por todas esas razones creemos que el método de Ang y Harper es de enorme interés para las presas de materiales sueltos. Una modificación sugerida por Lorente de Nó, consistente en la utilización de mallas romboidales, puede facilitar su aplicación a este caso.

Conclusiones.

Hemos intentado hacer una ligera exposición de los métodos disponibles en la actualidad y de las perspectivas que brindan al cálculo del estado tensional de las presas de materiales sueltos.

Mucho es el camino recorrido y, si bien es verdad que la meta aún no ha sido alcanzada, estamos ya más cerca de ella.

Los métodos de elementos finitos son un buen punto de partida. Las perfecciones y refinamientos que habrá de introducir, hasta que representen la realidad de estas

presas, serán muchos. Sin embargo, estamos seguros que, aun ahora, en esta etapa inicial, con leyes reológicas simplificadas, los resultados de su aplicación son de más valor para el proyectista que la escasa información suministrada por los métodos todavía en boga.

En un futuro no lejano, se podrá programar para un ordenador electrónico el cálculo completo de una presa de materiales sueltos. Cada zona de la presa tendrá su propia ley reológica, ley que incluiría todas las anisotropías del suelo y que, en general, podría ser de la forma de la respuesta hiperbólica de Kodner, más ajustada a la realidad que las de elastoplasticidad. Correcciones adicionales por deformaciones viscosas podrán ser introducidas.

El cálculo seguirá de cerca la historia tensional de la presa, con la adición, en las sucesivas etapas constructivas, de las tensiones residuales debidas a la propia ejecución.

El llenado del embalse y su vaciado posterior se dejan sentir por la presa a través de unos estados transitorios, cuya traducción tensorial podrán ser determinada en cada instante.

Finalmente, algunas sollicitaciones extraordinarias como los efectos sísmicos, cuyo carácter dinámico dificulta extraordinariamente el problema, parece posible incluirlos también en estos métodos de elementos finitos.

NOTACION

- E = módulo de Young
- G = módulo de rigidez transversal
- K = módulo de compresibilidad volumétrica
- X, Y = componentes de las fuerzas de masa
- k = constante, en Ang y Harper = $\sigma_0 / \sqrt{3}$; en Allen y Southwell = $\sigma_0 / 4\sqrt{3}$
- l = dimensión de la malla
- u, v = corrimientos en las direcciones x e y
- x, y = coordenadas
- $[B]$ = relaciones diferenciales deformación corrimientos
- $[D]$ = leyes reológicas
- $\{F\}^e$ = matriz de las fuerzas virtuales nodales
- $\{F\}_p^e$ = matriz de las fuerzas nodales ligadas a las fuerzas de masa en el elemento e
- $\{F\}_{e_0}^e$ = matriz de las fuerzas nodales ligadas a las deformaciones residuales
- $\{K\}^e$ = matriz de flexibilidad del elemento e

- $[N]$ = función de corrimientos
- $\{f\}$ = matriz de los corrimientos en los puntos de un elemento
- α = inclinación de la fuerza de masa respecto al eje y
- ϵ, γ = deformaciones axial y transversal
- γ = fuerza de masa
- ν = coeficiente de Poisson
- σ, τ = tensiones normales y cortantes
- σ_0 = tensión límite
- ϕ = ángulo de rozamiento interno
- χ = función de Airy
- ψ = inclinación de la tensión principal mayor respecto al eje x
- $\{\delta\}^e$ = matriz de los corrimientos nodales en el elemento e
- $\{\epsilon\}$ = matriz de deformaciones
- $\{\sigma\}$ = matriz de tensiones

METODO DE ALLEN Y SOUTHWELL

Deformación plana.

Condición de plasticidad.

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = \frac{16 K^2}{3}.$$

Funciones de tensión.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}; & \phi &= \sigma_x + \sigma_y = \Delta^2 \chi; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}; & \psi &= -(\sigma_x - \sigma_y) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \chi \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}; & \psi &= -2 \tau_{xy} = 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Relaciones tensión-deformación.

a) En la elasticidad:

$$\begin{aligned} d\epsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu) d\sigma_x - \nu d\sigma_y] \\ d\epsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu) d\sigma_y - \nu d\sigma_x] \\ d\gamma_{xy} &= 2 \frac{(1+\nu)}{E} d\tau_{xy}. \end{aligned}$$

b) En plasticidad:

$$\begin{aligned} d\epsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu) d\sigma_x - \nu d\sigma_y] + \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right) d\lambda; \\ d\epsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu) d\sigma_y - \nu d\sigma_x] + \left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x \right) d\lambda; \\ d\gamma_{xy} &= 2 \frac{(1+\nu)}{2} d\tau_{xy} + 3 \tau_{xy} d\lambda. \end{aligned}$$

Criterios de relajación.

a) En elasticidad:

$$\nabla^4 \chi = 0.$$

b) En plasticidad:

$$\phi^2 + \psi^2 - \frac{16 K^2}{3} = 0.$$

Proceso iterativo para el cálculo de corrimientos.

a) Variables de cálculo:

$$\begin{aligned} a &= \Delta \epsilon_x = \frac{\partial (\Delta u)}{\partial x}; \\ b &= \Delta \epsilon_y = \frac{\partial (\Delta u)}{\partial y}; \\ c &= \Delta \gamma_{xy} = d + e; \\ f &= a + b + c; \\ d &= \frac{\partial (\Delta u)}{\partial y}; \quad e = \frac{\partial (\Delta v)}{\partial x}. \end{aligned}$$

b) Iteración:

$$\begin{aligned} &P(00, 01, 10) - P(11); \\ f_{11} &= 2 (\Delta u_{01} - \Delta u_{10} - \Delta v_{01} + \Delta v_{10}) \times \frac{1}{l} - \\ &\quad - b_{01} - a_{10} + d_{01} + e_{10}; \\ \Delta \lambda_{11} &= \left[\frac{\frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu) (\Delta \sigma_x + \Delta \sigma_y) - 2 \Delta \tau_{xy}] - f}{3 \tau_{xy}} \right]_{11} \\ a_{11} &= (\Delta \epsilon_x)_{11}; \quad b_{11} = (\Delta \epsilon_y)_{11}; \quad c_{11} = (\Delta \gamma_{xy}); \\ \Delta u_{11} &= \frac{a_{10} + a_{11}}{2} + \Delta u_{10}; \quad \Delta v_{11} = \frac{b_{01} + b_{11}}{2} + \Delta v_{01}; \\ d_{11} &= 2 (\Delta u_{11} - \Delta u_{01}) - d_{01}; \\ e_{11} &= 2 (\Delta v_{11} - \Delta v_{10}) - e_{10}. \end{aligned}$$

Ecuaciones del equilibrio plano:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma \operatorname{sen} \alpha; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \gamma \operatorname{cos} \alpha.$$

Condición de plasticidad.

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

Variables de cálculo.

$$\sigma_x = \sigma (1 + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} 2\psi) - H;$$

$$\sigma_y = \sigma (1 - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} 2\psi) - H;$$

$$\tau_{xy} = \sigma \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} 2\psi.$$

Invariantes.

$$\gamma = \frac{\cot \varphi}{2} \log \frac{\sigma}{\sigma_0} + e \psi + e \int_{x_0}^x \frac{\gamma \operatorname{cos} (\alpha + \psi - e \mu)}{2 \sigma \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{cos} (\psi + e_y \mu)};$$

$$e = \pm 1; \quad 2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Ecuaciones diferenciales de las características.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\psi + e \mu); \quad e = \pm 1.$$

Esquema de la iteración.

$$P(12) \rightarrow P(3).$$

Marcha de la iteración.

$$y_3 = y_1 + \Delta y_1 = y_2 + \Delta y_2; \quad x_3 = \varphi_1 + \Delta \varphi_1 = \varphi_2 + \Delta \varphi_2;$$

$$\Delta y_1 = \operatorname{tg} (\psi_1 + \mu) \Delta x_1; \quad \Delta y_2 = \operatorname{tg} (\psi_2 - \mu) \Delta x_2;$$

$$\frac{\cot \varphi}{2} \ln \frac{\sigma_3}{\sigma_0} + \psi_3 = \frac{\cot \varphi}{2} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \psi_1 + \frac{\gamma_1 \operatorname{cos} (\alpha + \psi_1 - \mu)}{2 \sigma_1 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} (\psi_1 + \mu)} \Delta x_1;$$

$$\frac{\cot \varphi}{2} \ln \frac{\sigma_3}{\sigma_0} + \psi_3 = \frac{\cot \varphi}{2} \ln \frac{\sigma_3}{\sigma_0} - \psi_2 - \frac{\gamma_2 \operatorname{cos} (\alpha_2 + \psi_2 + \mu)}{2 \sigma_2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} (\psi_2 - \mu)} \Delta x_2.$$

Función de corrimientos.

$$\{f\} = [N] \cdot \{\delta\}^e.$$

Relación entre deformaciones y corrimientos.

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\delta\}^e$$

Relación entre tensiones y deformaciones.

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}).$$

Expresión de las fuerzas nodales.

$$\{F\}_p^e = [K]^e \cdot \{\delta\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e$$

$$[K]^e = \int [B]^T \cdot [D] \cdot [B] d(\text{vol})$$

$$\{F\}_p^e = - \int [N]^T \cdot \{P\} d(\text{vol})$$

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = - \int [B]^T [D] \cdot \{\varepsilon_0\} d(\text{vol})$$

Equilibrio de fuerzas en los nodos.

$$[K] \{\delta\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0}$$

Deformación plana.

Ecuaciones del equilibrio plano.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y.$$

Condición de plasticidad.

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 - 4 k^2 = 0.$$

Relaciones tensión-deformación.

a) En elasticidad:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y]; \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y]; \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}. \end{aligned}$$

b) En plasticidad:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x &= \Delta \epsilon_x \left[\frac{3K+4G}{3} + \frac{G}{k^2} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \right] + \Delta \epsilon_y \left[\frac{3K-2G}{3} + \frac{G}{k^2} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \Delta \gamma_{xy} \left[-\frac{G}{k^2} \cdot \tau_{xy} \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \right]; \\ \Delta \sigma_y &= \Delta \epsilon_x \cdot \left[\frac{3K-2G}{3} + \frac{G}{k^2} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \right] + \Delta \epsilon_y \left[\frac{3K+4G}{3} + \frac{G}{k^2} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \Delta \gamma_{xy} \left[-\frac{G}{k^2} \cdot \tau_{xy} \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \right]; \\ \Delta \tau_{xy} &= (\Delta \epsilon_y - \Delta \epsilon_x) \left[\frac{G}{k^2} \cdot \tau_{xy} \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \right] + \Delta \gamma_{xy} \left[\frac{G}{k^2} (K^2 - \tau_{xy}^2) \right]. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- Abott, M. B. (1966): "An introduction to the Methods of Characteristics", *Thames and Hudson*, Londres.
- Allen, D. N. de G., y Southwell, R (1950): "Relaxation method applied to engineering problems XIV. Plastic straining in two dimensional stress systems", *P. T. of the Royal Society of London*, núm. 850, vol. 242, páginas 379-414.
- Anderson, H. W., y Dodd, J. S. (1966): "Finite element method applied to rock mechanics", *Proc. 1.º Congress of Int. Soc. of Rock Mech.*, vol. II, pp. 317-328.
- Ang, A. H. S., y Harper, G. N. (1964): "Analysis of contained plastic flow in plane solids", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, EM5, pp. 397-418.
- Bishop, A. W. (1952): *The Stability of Earth Dams*. Tesis doctoral.
- Brahtz, J. H. (1936): *Rational design of Dams*. II Congress on Large Dams, Washington, vol. IV, p. 543.
- Escario, V. (1961): *Error arising from the simplified method of Slices*. V Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., París, vol. II, p. 585.
- Fillunger, P. (1936): "Erdbaumechanik?", *Friedrich Jasper*, Viena.
- Fort, L. (1967): *Cálculo de cimentaciones con la consideración de los fenómenos viscoelastoplásticos en el terreno y en la estructura de cimentación*. Tesis doctoral no publicada.
- Hill, R. (1964): *The mathematical theory of plasticity*, Oxford, Univ. Press, Londres, 4.ª edición.
- Jaeger, J. C. (1956): *Elasticity, Fracture and Flow with Engineering and Geological applications*, Methuen and Co. Ltd., Londres.
- Juriscic, D. A. (1965): "Discussion to the Analysis of contained plastic flow in plane solids", *Journal of the Engineering Division*, ASCE. EM 3, pp. 286-292.
- Lorente de No, C. (1966): *Plastic flow behind a vertical excavation*. Tesis para el grado de M. S. en el Instituto Tecnológico de Massachusetts.
- Marcal, P. V., y King, I. P. (1967): *Elastic-plastic analysis of two dimensional stress systems by the finite element method* (no publicado). Citado por Zienkiewicz (O. C.) y Cheung (Y. K.), en *The finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, p. 200.
- May, D. R. (1936): "Application of the planimeter to the Swedish method of analyzing the Stability of earth slopes", *II Congress on Large Dams*, Washington, volumen IV, p. 540.
- Nonveiller, E., y Anagnosti, P. (1961): *Stresses and Deformations in Cores of Rockfill Dams*, V Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., París, vol. II, p. 673.
- Samsioe, R. (1954): Citado por Reinus, E. "The Stability of the Slopes of Earth Dams". *European Conf. on Stability of Earth Slopes*, Estocolmo, vol. I, p. 150.
- Scheiblaue, J. (1963): "Modell versuche zur Klärung des Spannungs Zustandes in steilen Böschungen", *Felsmechanick und Ingenieurgeologic*, Viena, vol. 1/1, pp. 72-77.
- Sokolovski, V. V. (1965): "Statics of Granular Media", *Pergamon Press Oxford*.
- Spencer, A. S. M. (1964): "The Solution of Planes Elastic Plastic problems by relaxation Methods", *Applied Scientific Research*, Section A, vol. 12, pp. 391-406.
- Taylor, I. G. (1966): *The influence of discontinuities on the stability of and underground opening*. Proc. I Congress of Int. Soc. of Rock Mech. Vol. II, pp. 329-333.
- Turner, M. J.; Clough, R. W.; Yactin, M. C., y Topp. L. S. (1956): "Stiffness and deflection analysis of complex structures". *J. Aero. Sci.*, 23, pp. 805-823.
- Uriel, S. (1967): "Cálculo de taludes isorresistentes por el método de las características y su aplicación al proyecto de materiales sueltos". *Revista de Obras Públicas*, núm. ext., sep. 1967.
- Wang, Y., y Singh, M. M. (1966): "A numerical method for the determination of stresses around underground openings". Proc. I Congress of Int. Soc. of Rock Mech. vol. II, pp. 363-373.
- Whitman, R. V.: "Multidimensional analysis of stress and strain in soils". *Stanford Research Institute Project P.H.U. 4637*.
- Zienkiewicz, O. C., y Cheung, Y. K. (1967): "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics". McGraw-Hill. Londres.