DEFORMACIONES POR CORTADURA

Por JACINTO MARTIN PALANCA
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Constituye el presente artículo una continuación del publicado por el autor en el número de abril de 1967 de esta Revista, estudiándose ahora las deformaciones por cortadura, tema casi siempre eludido por los tratadistas de Resistencia de Materiales, y que cuando excepcionalmente se deciden a abordarlo, lo hacen basándose en el establecimiento de hipótesis simplificadoras, que no resultan en modo alguno necesarias; ya que el cálculo rigorista es sencillo utilizando el teorema de Castigliano.

Recuerdo haber leído en alguna parte que el Teorema de Castigliano es algo así como la locomoción pedestre, por cuanto ambos, si bien a expensas de tiempo y esfuerzos de consideración, permiten llegar a cualquier objetivo con absoluta seguridad; afirmando el autor, en su entusiasmo partidista, que sería posible escribir un tratado completo de Resistencia de Materiales, cuyo capítulo primero estuviera dedicado al concepto de trabajo elástico y exposición del teorema que nos ocupa, y todo lo restante se presentara como simples ejemplos de aplicación del mismo.

Renunciamos a juzgar el valor absoluto de las anteriores afirmaciones, pero brindamos al autor de ellas el presente artículo, como prueba a su favor. Vamos a estudiar las deformaciones en una pieza prismática, debidas única y exclusivamente a una cierta ley de cortaduras solicitantes, y para hacerlo no utilizaremos otro instrumento que el teorema de Castigliano, entre otras razones (y esta alabanza escapó al autor de las ideas anteriores), porque para llegar a determinadas metas, no existe hoy, desgraciadamente, ningún otro camino viable, y se hace preciso aceptar el citado a pesar de sus inconvenientes.

Sabemos que, con carácter general, la expresión del trabajo elástico en una sección cualquiera de pieza prismática solicitada por tensiones cortantes (provengan de cortaduras o de torsiones), es la expresión que sigue (totalmente similar, por otra parte, a la de solicitación por tensiones axiales, provengan de esfuerzos axiales o de flexiones):

$$d\mathcal{T} = \int_0 \frac{1}{2}\tau \, . \, d\omega \, . \, \gamma \, . \, dx = \frac{dx}{2}\int_0 \tau \, . \, \frac{\tau}{G} \, . \, d\omega = \frac{dx}{2G}\int_0 \tau^2 \, . \, d\omega \, .$$

Para obtener el trabajo elástico en toda la barra, habrá que integrar primero lo que ocurre en una sección cualquiera, haciendo una segunda integración a lo largo de la pieza.

Aplicando la expresión anterior al caso de tensiones cortantes producidas en la sección por una cortadura solicitante:

$$d\mathcal{T} = \frac{dx}{2G}\int_0 \tau_z^2 \, . \, b_z \, . \, dz \, ,$$

en la que las notaciones utilizadas (las mismas que figuraban en nuestro artículo "Consideraciones sobre el esfuerzo cortante", publicado en el número de abril último de esta misma Revista) significan: z, la ordenada respecto a la fibra neutra;

b_z, la anchura de la sección a la altura z; y τ_z, la tensión cortante, postulada por Jouravski como constante para todos los puntos de igual distancia z.

En el artículo antes citado, llegamos a establecer que la tensión unitaria de cortadura en la fibra neutra de una sección, adopta siempre la forma:

$$\tau_0 = \frac{A}{\chi \cdot C \cdot b_0},$$

siendo A la cortadura solicitante, b_0 la anchura de la sección en la fibra neutra, C el canto de la misma, y χ un coeficiente, que llamábamos "brazo cortante unitario", y calculábamos para las secciones de mayor aplicación práctica.

Puesto que, según la expresión anterior:

$$\frac{A}{\chi \cdot C \cdot b_0 \cdot \tau_0} = 1,$$

podemos modificar la definición del trabajo elástico elemental, de la siguente forma:

$$d\,\mathcal{T} = \frac{d\,x}{2\,G} \cdot \frac{A^2}{\chi^2 \cdot C^2 \cdot b_0^2 \cdot \tau_0^2} \int_0 \tau_z^2 \quad b_z \cdot d\,z = \frac{d\,x}{2\,G}\,\frac{A^2}{\nu\,b_0\,C},$$

en la cual hemos adoptado la notación:

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\chi^2} \cdot \frac{1}{\tau_0^2 \cdot b_0 \cdot C} \int_0 \tau_z^2 \cdot b_z \cdot d\,z\,.$$

Obsérvese que el coeficiente ν así definido, carece de dimensiones, ya que las de la integral coinciden con las del segundo denominador, y en el primer denominador el brazo cortante unitario es un número.

El problema queda reducido, por tanto, a determinar el valor del coeficiente ν para la sección de que se trate. El cálculo es, en general, engorroso, pero no difícil. Por ejemplo, para la sección rectangular, partiendo de las expresiones indicadas en el artículo tantas veces citado:

$$\tau_z = \frac{A}{b_z \cdot I}\left(\eta_Y - \eta_z\right);$$

$$b_z = b_0 \qquad \eta_z = \frac{b_0\,z^2}{2} \qquad \eta_Y = \frac{b_0\,Y^2}{2},$$

$$\tau_z = \frac{A}{2\,I}\left(Y^2 - z^2\right) = \tau_0\,\frac{Y^2 - z^2}{Y^2}\,.$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\chi^2}\,\frac{1}{\tau_0^2 \cdot b_0 \cdot C}\int_0 \left(\tau_0\,\frac{Y^2 - z^2}{Y^2}\right)^2 \cdot b_0 \cdot d\,z = \frac{1}{\chi^2\,C\,Y^4}\int_{-Y}^{Y}\left(Y^4 - 2\,Y^2 z^2 + z^4\right) d\,z =$$

$$= \frac{1}{2\,\chi^2 \cdot Y^5}\left[Y^4\,z - \frac{2}{3} \cdot Y^2 z^3 + \frac{1}{5}\,z^5\right]_{-Y}^{Y} = \frac{1}{2\,\chi^2\,Y^5}\left[Y^5 - \frac{2}{3}\,Y^5 + \frac{1}{5}\,Y^5\right] \cdot 2 = \frac{8}{15\,\chi^2}\,.$$

Como el valor de χ para la sección rectangular nos resulta conocido

$$\nu = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{15}{8} = \frac{5}{6} = 0{,}83\,.$$

No queremos cansar la atención del lector con otros cálculos semejantes. En el cuadro adjunto se resumen algunos resultados, de los cuales los correspondientes a las secciones circular y rómbica son absolutamente generales, en tanto que para el de de la doble te, ha sido preciso simplificar, considerando que, como los espesores de alma y cabezas son en general pequeños respecto a la anchura y al canto totales, pueden despreciarse sin grave error los valores relativos de las segundas potencias y de los productos de los mismos:

SECCION	ν
Doble te	0,97
Rectángulo.	0,83
Círculo	0,71
Rombo	0,27

Hasta aquí ha llegado el cálculo de valores previos, indispensable para poder entrar en materia, a base de la aplicación del teorema de Castigliano. De momento nos limitaremos a determinar las flechas en el centro, debidas a las deformaciones por cortadura.

Si la solicitación fuese una fuerza aislada en el centro de la pieza prismática:

$$0 < x < \frac{l}{2} \qquad A = \frac{P}{2} \qquad \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{l}{2} < x < l \qquad A = -\frac{P}{2} \qquad \frac{\partial A}{\partial P} = -\frac{1}{2}.$$

$$f = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial P} = \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\int_0^l A \cdot \frac{\partial A}{\partial P} \cdot dx = \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\left[\int_0^{l/2} \frac{P}{4} \cdot dx + \int_{l/2}^{l} \frac{P}{4}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\left[\frac{P\,x}{4}\right]_0^l = \frac{P\,l}{4\,G\,\nu\,b_0\,C}.$$

Si la solicitación fuera una carga uniformemente repartida, consideraremos además de ella, la existencia de una fuerza aislada ficticia en el centro de la viga, que nos servirá para realizar la derivación parcial respecto a la misma, y que anularemos después:

$$0 < x < \frac{l}{2} \qquad A = g\left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{P}{2} \qquad \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{l}{2} < x < l \qquad A = g\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{P}{2} \qquad \frac{\partial A}{\partial P} = -\frac{1}{2};$$

$$f = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial P} = \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\int_0^l A \cdot \frac{\partial A}{\partial P} \cdot dx = \frac{2}{G\,\nu\,b_0\,C}\int_0^{l/2}\left[g\left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{P}{2}\right]\frac{1}{2} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\left[g\left(\frac{l}{2}\,x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{P}{2}\,x\right]_0^{l/2} = \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\left(\frac{g\,l^2}{8} + \frac{P\,l}{4}\right) = \frac{g\,l^2 + 2\,P\,l}{8\,G\,\nu\,b_0\,C},$$

y si ahora anulamos el valor de la fuerza aislada ficticia:

$$f = \frac{g\,l^2}{8\,G\,\nu\,b_0\,C}.$$

El problema anterior lo estudia Timoshenko, en su magistral libro "Resistencia de Materiales", por consideraciones geométricas basadas en suponer que la tensión unitaria en la fibra neutra se mantiene uniforme en toda la sección, llegando a un resultado similar:

$$\delta = \frac{g\, l^2}{8\, G\, \omega} \,.\, \alpha \,.$$

Su coeficiente α es la relación entre las superficies de la sección transversal, y la del rectángulo de garganta. En el caso de la sección rectangular, α se identifica con la inversa de χ, llegando al siguiente resultado:

$$\delta = \frac{3}{2} \frac{g\, l^2}{8\, G\, b_0\, C} = 0{,}188 \frac{g\, l^2}{G\, b_0\, C},$$

en tanto que nuestros cálculos nos dan:

$$f = \frac{g\, l^2}{8 \,.\, 0{,}83 \,.\, G\, b_0\, C} = 0{,}150 \frac{g\, l^2}{G\, b_0\, C} \,.$$

Para la sección en doble te, considerando el caso particular que se estudia por el autor, estableceremos también la comparación de resultados:

$$\delta = 2{,}42 \frac{g\, l^2}{8\, G \,.\, 194} = 0{,}00156 \,.\, \frac{g\, l^2}{G} \,;$$

$$f = \frac{g\, l^2}{8 \,.\, 0{,}97 \,.\, 1{,}56 \,.\, 60 \,.\, G} = 0{,}00138 \,.\, \frac{g\, l^2}{G} \,.$$

A. Feige, autor del capítulo "Estructuras estáticamente determinadas" del libro *Stahlbau,* traducido por nuestro compañero Agustín Ramos, indica sin demostración alguna, para la sección en doble te:

$$f = \frac{g\, l^2}{8\, G\, b_0\, C},$$

que para el ejemplo antes considerado da coeficiente 0,00134.

Pero el maravilloso teorema de Castigliano permite llegar aún más lejos, facilitándonos la flecha en cada uno de los puntos, es decir, la elástica. Supongamos como hipótesis de carga un reparto uniforme de ella y además establezcamos una fuerza aislada ficticia, situada a las distancias unitarias α y β, respectivamente, de los apoyos izquierdo y derecho:

$$0 < x < \alpha\, l \qquad A = g\left(\frac{l}{2} - x\right) + \beta\, P \qquad \frac{\partial A}{\partial P} = \beta \,;$$

$$\alpha\, l < x < l \qquad A = g\left(\frac{l}{2} - x\right) - \alpha\, P \qquad \frac{\partial A}{\partial P} = -\alpha \,;$$

$$y = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial P} = \frac{1}{G\, \nu\, b_0\, C} \int_0^l A \,.\, \frac{\partial A}{\partial P} \,.\, d\,x =$$

$$= \frac{1}{G\, \nu\, b_0\, C} \left\{ \int_0^{\alpha l} \left[g\left(\frac{l}{2} - x\right) + \beta\, P \right] \beta \,.\, d\,x + \int_{\alpha l}^{l} \left[g\left(\frac{l}{2} - x\right) - \alpha\, P \right] (-\alpha)\, d\,x \right\} =$$

$$= \frac{\alpha\, \beta\, l}{2\, G\, \nu\, b_0\, C} (g\, l + 2\, P) \,.$$

Si ahora hacemos:

$$P = 0 \qquad \alpha = \frac{x}{l} \qquad \beta = \frac{l - x}{l},$$

tendremos finalmente:

$$y = \frac{g\,x\,(l - x)}{2\,G\,\nu\,b_0\,C}\,.$$

Es decir, que la elástica de cortadura para hipótesis de carga uniforme es una parábola de segundo grado, contra lo que ocurre en el mismo caso con la elástica de flexión, que es parabólica de cuarto grado. A igual resultado llega Timoshenko en la obra citada.

Si aplicamos el mismo cálculo a una hipótesis de cargas aisladas, suponiendo que la fuerza ficticia P (a distancias α y β de los apoyos izquierdo y derecho, respectivamente) está situada entre dos fuerzas aisladas P_i y P_d (a distancias respectivas α_i y α_d del apoyo izquierdo), tendremos:

$$\alpha_i\,.\,l < x < \alpha\,.\,l \qquad A = K + \beta P \qquad \frac{\partial A}{\partial P} = \beta\,,$$

$$\alpha\,.\,l < x < \alpha_d\,.\,l \qquad A = K - \alpha P \qquad \frac{\partial A}{\partial P} = -\alpha\,,$$

en donde K es una constante, entre las abscisas consideradas, función de la magnitud y posición de las fuerzas del sistema:

$$y = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial P} = \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\int_0 A\,.\,\frac{\partial A}{\partial P}\,.\,d\,x =$$

$$= \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\left[\int_{\alpha_i l}^{\alpha\,l} (K + \beta\,P)\,\beta\,.\,d\,x + \int_{\alpha\,l}^{\alpha_d\,l} (K - \alpha\,P)\,(-\,\alpha)\,d\,x\right] =$$

$$= \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\left[(K + \beta\,P)\,\beta\,(\alpha - \alpha_i)\,l - (K - \alpha\,P)\,\alpha\left(\alpha_d - \alpha\right)l\right],$$

en donde, si hacemos:

$$P = 0 \qquad \alpha = \frac{x}{l} \qquad \beta = \frac{l - x}{l}\,,$$

y simplificamos, llegaremos finalmente a una expresión de la forma:

$$y = \frac{1}{G\,\nu\,b_0\,C}\,(B\,x + D)\,,$$

en donde *B* y *D* son constantes. La elástica, por tanto, es una línea recta entre cada dos fuerzas aisladas consecutivas, y en conjunto tendrá el aspecto de una línea poligonal, una especie de funicular de las cargas.

La conclusión es sorprendente. La elástica de cortadura en el presente caso es una línea sin continuidad de derivada, algo así como si cada fuerza lograse dar un quiebro, un plegado, a la pieza prismática. Sin embargo, el resultado obtenido coincide con el que indica A. Feige en el capítulo y obra citados, si bien él llega a dicha consecuencia por un razonamiento no muy convincente, a partir del paralelepípedo elemental.

A modo de conclusión, deberíamos comparar las deformaciones de cortadura con las de flexión, para llegar a establecer que su importancia relativa es, en general, pequeña, aunque no despreciable; pero no creemos necesario hacerlo, pues Timoshenko, en la obra citada, analiza la cuestión de una manera perfecta, y no resulta preciso agregar al respecto ni una palabra más.