

IDEAS PRELIMINARES EN TORNO A LA MECANIZACION DEL CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por FEDERICO ALICART

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Subdirector del Gabinete de Cálculo del C. de E. y E. de O. P.

El trabajo que a continuación se ofrece es una síntesis de otro estudio más extenso que publicará el Gabinete de Cálculo en fecha próxima.

0. GENERALIDADES

0.1. Hace pocos decenios pudo observarse la tendencia de los matemáticos a servirse del cálculo matricial en determinadas ramas de sus trabajos para aprovechar las ventajas indiscutibles que las matrices y los determinantes ofrecen cuando se trata de efectuar ciertos planteamientos matemáticos y obtener resultados formales.

Desde entonces, el cálculo matricial es una pieza básica en los campos de la Matemática y de la Física Teórica.

En aquella misma época, se observan intentos de utilizar el cálculo matricial en Mecánica Elástica y aunque las notaciones compactas simplifican el aparato matemático de los problemas ingenieriles, sin embargo, al sustituir valores numéricos para obtener los resultados concretos que el Ingeniero busca, desaparecían aquellas ventajas formales y el cálculo aritmético nunca se simplificaba e incluso a veces se hacía más complejo.

El cálculo matricial tan grato al matemático teórico, no convenía al ingeniero práctico.

Fue entonces cuando surgieron métodos ingeniosos como los de Cross, Southwell y otros, que representaron un indudable progreso respecto a los procedimientos clásicos, aunque todos ellos descansaban en los mismos principios teóricos (Castigliano, Maxwell, Mohr, etc.).

Estos métodos, y particularmente el de Cross, han tenido una difusión inmensa y mercedísima.

Pero en 1950, comienzan a utilizarse los llamados cerebros electrónicos que se caracterizan por la rapidez y seguridad de sus cálculos numéricos.

Además, la ordenación matricial de los datos y las leyes del cálculo de matrices se ajustan perfectamente a la lógica interna de aquellas máquinas, capaces de ejecutar cientos de miles de operaciones elementales por segundo.

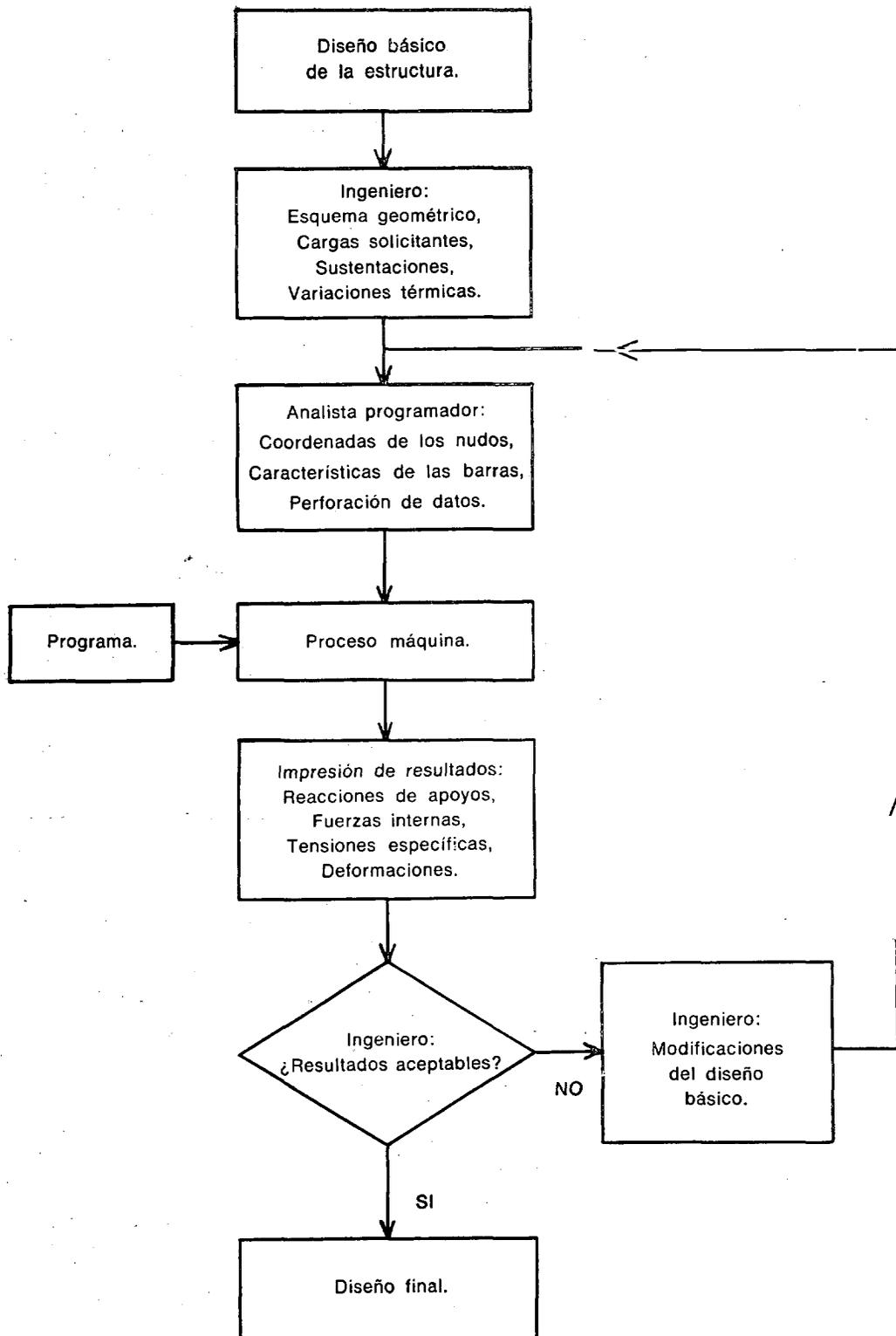


Figura 0.1.

El veto que pesaba sobre el Cálculo Matricial en Mecánica Elástica, había desaparecido y nuevas perspectivas se abrieron a la ingeniería, que hoy dispone de métodos cómodos, rápidos y seguros para efectuar el cálculo de estructuras empleando un ordenador electrónico.

En poco más de un decenio se han puesto a punto interesantísimos programas que han permitido mecanizar la ejecución de estos cálculos.

El objeto del presente trabajo es ofrecer, en cuanto sea posible, una visión clara, sencilla y razonada de dichos métodos a nivel de analista, aunque también trataremos, con menor detalle, aspectos de la programación y codificación en lenguaje automático.

La figura 0.1 representa un organigrama funcional para el cálculo de una estructura, donde se ve la posición clave que ocupa el computador electrónico dotado del correspondiente programa de trabajo.

Suponemos que el lector conoce los principios básicos de la Resistencia de Materiales y la parte más elemental del Cálculo de Matrices. De este modo, intentaremos condensar nuestra exposición en el menor número posible de páginas.

1. MATRICES DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UNA ESTRUCTURA

1.1. Dada una estructura reticular, isostática o hiperestática, sometida a un sistema de fuerzas solicitantes (figs. 1.1 y 1.2).

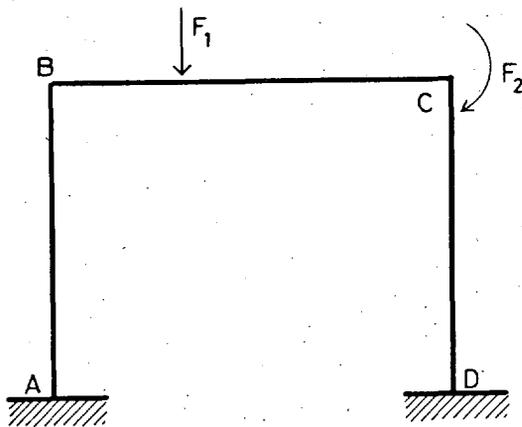


Figura 1.1.

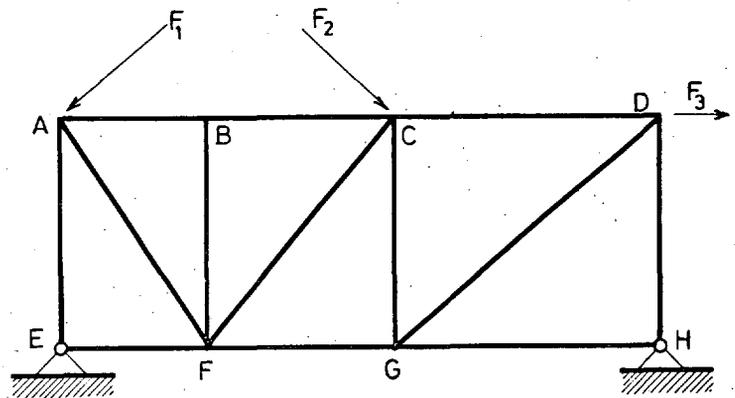


Figura 1.2.

nos interesan los siguientes elementos:

1.2. La matriz de fuerzas solicitantes o cargas, que en el caso del pórtico es:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

y en el caso de la viga es:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

1.3. La matriz de desplazamientos es:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

en el caso del pórtico.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

en el caso de la viga.

1.4. En general, tendremos:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \text{ matriz de cargas;} \quad (1;1)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ matriz de desplazamientos.} \quad (1;2)$$

1.5. u_i es la componente según F_i del desplazamiento de la sección i ; u_i será positiva o negativa según que tenga el mismo o opuesto sentido que F_i .

Cuando F_i sea un par, el elemento u_i representará un giro medido en radianes.

1.6. Cuando la estructura sea hiperestática conviene a veces poner de manifiesto las fuerzas hiperestáticas, actuando juntamente con las fuerzas solicitantes sobre una estructura básica.

En el caso del pórtico podemos elegir la estructura básica de la figura 1.3 o la figura 1.4.

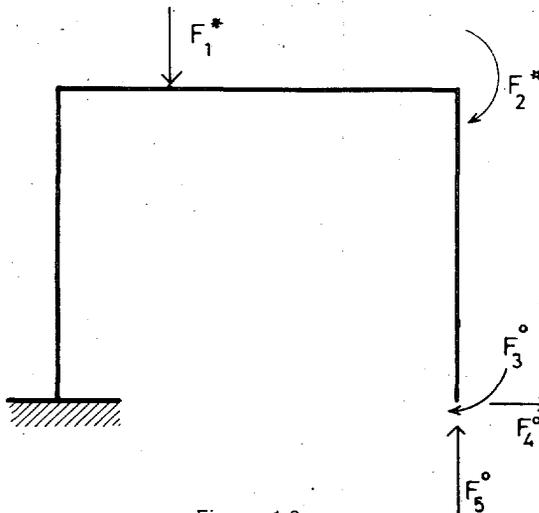


Figura 1.3.

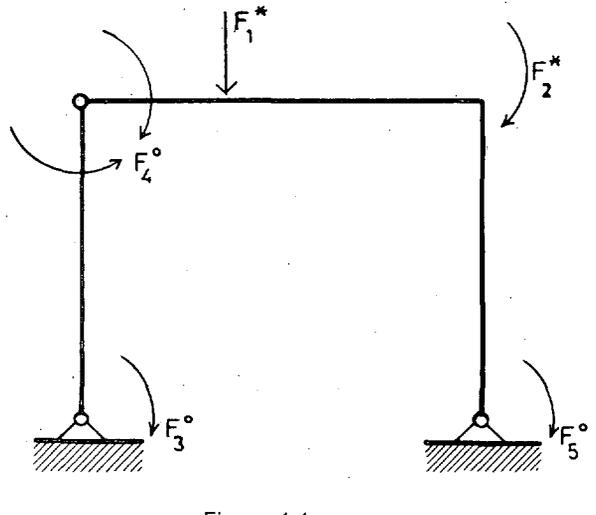


Figura 1.4.

1.7. En ambos casos hemos distinguido con un asterisco y con índice nulo las fuerzas solicitantes y las fuerzas hiperestáticas.

Ello nos permite en todo caso particionar la matriz en la forma:

$$F = \begin{pmatrix} F^* \\ F^o \end{pmatrix} \quad (1,3)$$

1.8. Análogo razonamiento nos permitirá particionar la correspondiente matriz de desplazamientos:

$$u = \begin{pmatrix} u^* \\ u^o \end{pmatrix} \quad (1,4)$$

No es preciso advertir que en el caso de nuestro pórtico con empotramiento perfecto en D , la matriz u^o vale:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.9. Tratándose de estructuras isostáticas conviene a veces poner de manifiesto las reacciones de sustentación.

En el caso de la viga tendríamos (fig. 1.5):

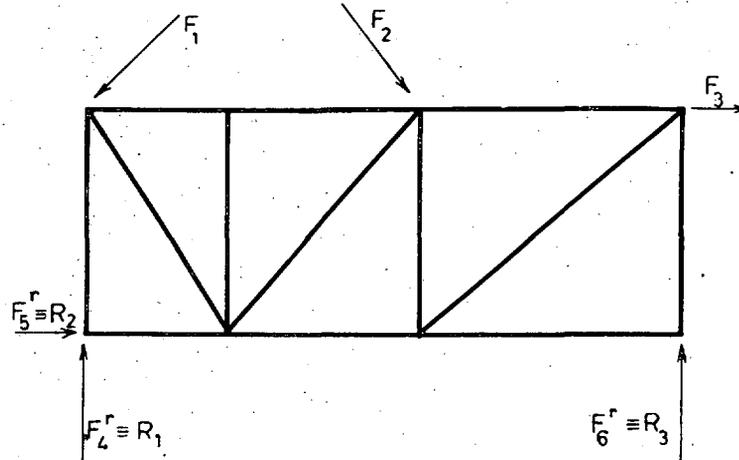


Figura 1.5.

y aparecerían las matrices:

$$F = \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \\ F_4^r \\ F_5^r \\ F_6^r \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^r \\ u_5^r \\ u_6^r \end{pmatrix} \quad (1,5)$$

que pueden escribirse en forma particionada:

$$F = \begin{pmatrix} F^* \\ F^r \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u^* \\ u^r \end{pmatrix} \quad (1,6)$$

No es preciso advertir que en el caso de nuestra viga, suponiendo indeformables los apoyos, tendríamos:

$$u^r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.10. Teniendo en cuenta el principio de linealidad entre causas y efectos, que tanto se aplica en el cálculo elástico de estructuras, podemos escribir las ecuaciones matriciales:

$$F = k u \quad (1;7)$$

$$u = a F \quad (1;8)$$

donde a y k son respectivamente las matrices de flexibilidad y de rigidez de la estructura referida a un cierto sistema $(F; u)$ de coordenadas mecánicas.

La matriz a puede llamarse también matriz de desplazamientos-cargas, y la k , matriz de cargas-desplazamiento.

1.11. Un sistema de coordenadas mecánicas está definido por un conjunto de puntos tomados en la directriz de la estructura y unas flechas que indican sentidos positivos de las cargas que en ellos se aplican.

En el caso del pórtico (fig. 1.1) el sistema de coordenadas mecánicas se definirá del modo que indica la figura 1.6.

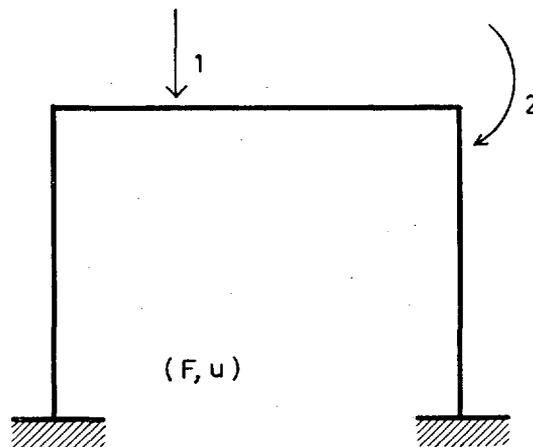


Figura 1.6.

1.12. Toda matriz de rigidez o de flexibilidad se refiere no sólo a una estructura dada, sino también a un sistema de coordenadas mecánicas.

Al cambiar este sistema cambian las matrices de rigidez y flexibilidad.

1.13. En el caso de la figura 1.6 existen ambas matrices a y k , ligadas por la relación fundamental:

$$a k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que indica la reciprocidad que entre ellas existe:

$$a k = 1 \quad (1;9)$$

$$a = k^{-1} \quad (1;10)$$

$$k = a^{-1} \quad (1;11)$$

1.14. Ambas matrices son cuadradas, y su orden es igual al número de dimensiones del sistema de coordenadas, es decir, al número de fuerzas del sistema o al número de desplazamientos considerados.

Se dice también, aunque impropriamente, que este número expresa los grados de libertad de la estructura.

1.15. Puede ocurrir que el determinante de la matriz \mathbf{a} valga cero; entonces se dice que es matriz singular.

Ella carece de inversa y, por tanto, no existirá matriz de rigidez.

1.16. Otras veces sucede que la estructura posee matriz de rigidez, pero carece de matriz de flexibilidad.

Un ejemplo sencillísimo de esto último es la viga recta de sección constante (figura 1.7) referida a las coordenadas mecánicas $(F_1, F_2; u_1, u_2)$:

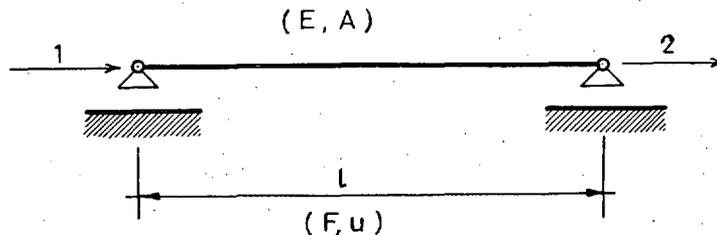


Figura 1.7.

cuya matriz de rigidez es:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y que carece de matriz de flexibilidad por ser:

$$|\mathbf{k}| = 0$$

1.17. El criterio práctico de existencia de dichas matrices puede resumirse brevemente del siguiente modo:

1.º Si el equilibrio de la estructura implica una dependencia lineal entre las F , no existe matriz de flexibilidad.

2.º Si la compatibilidad de las deformaciones de la estructura implica una dependencia lineal entre las u , no existe matriz de rigidez.

1.18. Como ya hemos advertido, nos limitaremos en nuestro estudio a las estructuras reticulares (planas o espaciales) constituidas por elementos (barras) en los cuales hay una dimensión (longitudinal) que predomina respecto a las otras dos (transversales).

Los extremos de las barras corresponden a nudos que sirven para localizar el sistema de coordenadas mecánicas.

En este sentido conviene considerar como nudos las sustentaciones, e incluso aquellos puntos de la directriz donde actúen cargas exteriores. Así, podremos admitir que entre dos nudos contiguos no existen acciones exteriores.

Si se trata de cargas continuas se procede del modo que expondremos más adelante.

2. FUERZAS Y DEFORMACIONES INTERNAS

2.1. Consideremos (fig. 2.1) la barra AB , que es elemento de una cierta estructura espacial.

Sobre ella actuarán únicamente las reacciones internas aplicadas en sus extremos.

Estas fuerzas internas son:

$$n_A = n_B = n_{AB} \quad \text{reacciones normales;}$$

$$t_A = t_B = t_{AB} \quad \text{momentos de torsión;}$$

$$\left. \begin{array}{l} m_{Az} \\ m_{Ay} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} m_{Bz} \\ m_{By} \end{array} \right\} \quad \text{componentes de los momentos flectores} \\ \text{en las secciones } A \text{ y } B;$$

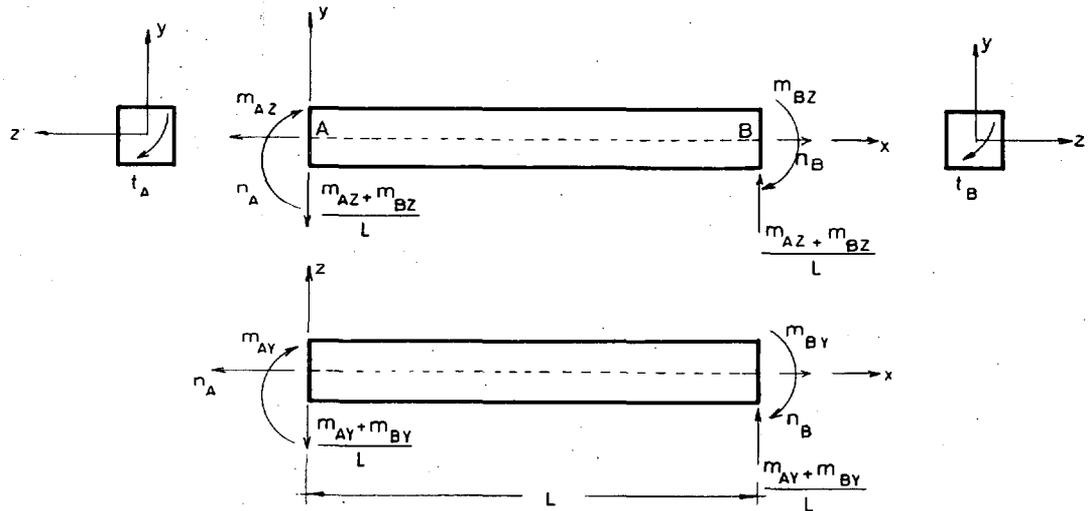


Figura 2.1.

También aparecen las componentes de los esfuerzos cortantes en las secciones extremas A y B , cuyos valores se expresan en la figura; las flechas indican sentidos positivos.

2.2. Las fuerzas internas correspondiente a la barra AB pueden expresarse por una matriz P del tipo:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{pmatrix} \quad (2;1)$$

con el siguiente convenio:

- $P_1 = m_{Az}$ momento flector en A según el eje z .
- $P_2 = m_{Bz}$ momento flector en B según el eje z .
- P_3 esfuerzo axial = n .
- $P_4 = m_{Ay}$ momento flector en A según el eje y .
- $P_5 = m_{By}$ momento flector en B según el eje y .
- P_6 par de torsión.

2.3. A la matriz P corresponderá otra matriz δ de deformaciones internas.

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} \quad (2;2)$$

cuyos elementos expresan giros, excepto δ_3 , que es una longitud (alargamiento de la barra).

2.4. Ambas matrices, P y δ , están ligadas por otras dos matrices, α y χ , mediante las fórmulas:

$$P = \chi \delta \quad (2;3)$$

$$\delta = \alpha P \quad (2;4)$$

χ y α son, respectivamente, las matrices elementales de rigidez y de flexibilidad de la barra AB .

2.5. En realidad, α y χ son un caso particular de las matrices a y k estudiadas en el capítulo 1, cuando la estructura se reduce a una barra y sobre ella se toman las seis coordenadas mecánicas (P, δ) indicadas en el párrafo 2.2.

2.6. La existencia de ambas matrices se decidirá *a priori* mediante los criterios expuestos en el párrafo 1.17.

En general, podremos escribir:

$$\alpha = \chi^{-1}$$

$$\chi = \alpha^{-1}$$

2.7. Si la estructura posee m barras, tendremos m matrices $\alpha_{\bar{h}}$ y otras tantas $\chi_{\bar{h}}$, donde \bar{h} es el código de la barra cuando se numeran arbitrariamente desde 1 hasta m .

Análogamente tendremos m matrices $P_{\bar{h}}$ y otras tantas $\delta_{\bar{h}}$.

2.8. El cálculo de una estructura reticular isostática o hiperestática plana o espacial exige, entre otras cosas, conocer todas las matrices $P_{\bar{h}}$ y $\delta_{\bar{h}}$.

Ellas son funciones de la matriz F , que es siempre dato del problema.

En las fórmulas finales interviene naturalmente alguna de las matrices a ó k que a su vez son calculables a través de los $\alpha_{\bar{h}}$ ó $\chi_{\bar{h}}$.

2.9. La representación matricial llevada a un computador electrónico es un método muy práctico para efectuar el análisis de tales estructuras y aún de otras no reticulares, según expondremos en otra ocasión.

3. ALGUNAS FORMULAS PRACTICAS

3.1. Aplicando los teoremas de Resistencia de Materiales y prescindiendo de la influencia de los esfuerzos cortantes, se obtiene fácilmente la fórmula (3;1), que

nos da la matriz de flexibilidad α de la barra AB (fig. 2.1), recta y de sección uniforme:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{L}{3EI_z} & -\frac{L}{6EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L}{6EI_z} & \frac{L}{3EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3EI_y} & -\frac{L}{6EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{6EI_y} & \frac{L}{3EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ} \end{pmatrix} \quad (3;1)$$

cuyos símbolos no necesitan aclaración especial.

3.2. Si la barra AB pertenece a una estructura, ya plana o espacial, con sus extremos articulados y sin cargas intermedias, tendremos:

$$\alpha = \frac{L}{EA} \quad (3;2)$$

3.3. Si se trata de una estructura plana con cargas situadas en su plano, por ejemplo, el x y de la figura 2.1, las matrices P y δ serán:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A \\ m_B \\ n \end{pmatrix} \quad (3;3)$$

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \Delta L \end{pmatrix} \quad (3;4)$$

y la matriz α será:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{pmatrix} \quad (3;5)$$

3.5. Cuando se prescinda de los esfuerzos axiales tendremos:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A \\ m_B \end{pmatrix} \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{pmatrix} \quad (3;6)$$

$$\alpha = \frac{L}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3;7)$$

3.6. Suponiendo la barra articulada en A tendremos:

$$P_1 = 0$$

Si la barra está articulada en B tendremos:

$$P_2 = 0$$

La barra articulada en sus dos extremos implica las condiciones:

$$P_1 = 0 \quad P_2 = 0$$

4. RESUMEN DE LAS MATRICES FUNDAMENTALES

4.1. Hasta ahora conocemos ocho matrices de importancia capital para mecanizar el cálculo de una estructura.

Se trata de las matrices:

- F de acciones solicitantes.
- u de desplazamientos externos.
- α de flexibilidad de la estructura.
- k de rigidez de la estructura.
- P_h de fuerzas internas elementales en la barra h
- δ_h de deformaciones internas elementales en la barra h
- α_h de flexibilidad de la barra h
- χ_h de rigidez de la barra h

4.2. Otras matrices que se utilizan son las:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{pmatrix} \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{pmatrix} \quad (4;1)$$

obtenidas ensamblando las matrices P y δ , correspondientes a cada una de las m barras de la estructura.

4.3. Por analogía aparecen las matrices:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_m \end{pmatrix} \quad (4;2)$$

$$K = \begin{pmatrix} \chi_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \chi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \chi_m \end{pmatrix} \quad (4;3)$$

obtenidas ensamblando las matrices elementales α_h y χ_h , cuyas expresiones ya conocemos.

4.1. La matriz F es siempre dato del problema, y ella define el sistema de coordenadas mecánicas de la estructura o nos da la base para su definición.

Las α y κ ya sabemos formarlas, cuando hemos descompuesto la estructura en elementos.

Las restantes matrices pueden formarse mediante procesos matemáticos más o menos complicados que efectuará la máquina electrónica.

Destacaremos por su importancia la matriz P , mediante la cual se obtienen las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles en cada barra o elemento de la estructura.

5. CAMBIO DE COORDENADAS

5.1. En el capítulo 2 hemos analizado las fuerzas y deformaciones internas de una barra genérica AB referida a ejes intrínsecos de dicha barra, según se indica en la figura 5.1.

Cuando nos referimos al extremo A , el origen de coordenadas será A ; cuando tratamos del extremo B , el origen será B , pero las direcciones de los ejes coordenados x y z son invariables en ambos casos.

5.2. Nos interesa obtener matricialmente dichas reacciones internas referidas a los ejes generales de la estructura O, x, y, z (fig. 5.1.) que se suponen trirrectángulos.

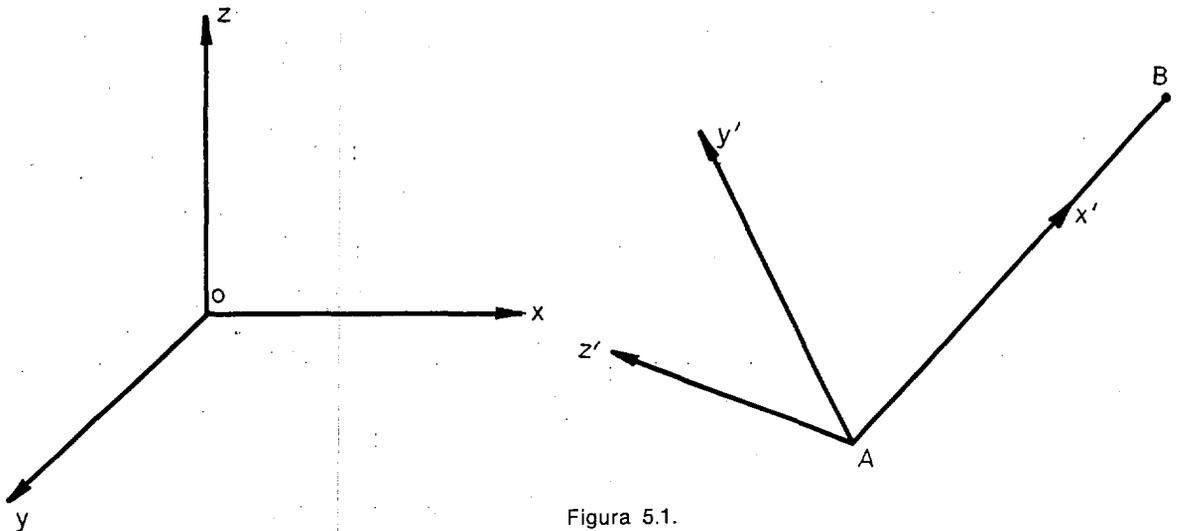


Figura 5.1.

En esa misma figura aparecen los ejes particulares de la barra AB , que para evitar confusiones llamaremos $x' y' z'$.

5.3. La geometría de la estructura nos permite formar para cada barra h la matriz ortogonal.

$$\Phi_h = \begin{pmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) & \cos(x'z) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) & \cos(y'z) \\ \cos(z'x) & \cos(z'y) & \cos(z'z) \end{pmatrix}$$

mediante la cual, las componentes (x', y', z') de un vector V , referido a los ejes

particulares, y las componentes (x, y, z) de ese mismo vector, referido a los ejes generales, aparecen ligados por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Phi_h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5;2)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_h^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (5;3)$$

5.4. Consideremos el caso más amplio de estructura tridimensional con cargas solicitantes aplicadas únicamente en los los nudos (*).

Sea m el número de barras, numeradas arbitrariamente $\boxed{1} \boxed{2} \dots \boxed{m}$.

Sea n el número de nudos numerados arbitrariamente de 1 a n .

Se conviene en tomar como origen A de una barra, el nudo de índice más bajo; el otro nudo será el extremo B de la barra.

5.5. Todas las cargas solicitantes en un nudo o soporte i de la estructura equivalen siempre a un torsor cuyas componentes en ejes generales son tres fuerzas:

$$F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{iz}$$

y tres pares:

$$M_{ix} = F_{ixx} \quad \gg \quad M_{iy} = F_{iyy} \quad \gg \quad M_{iz} = F_{izz}$$

Entonces cada nudo nos dará la submatriz:

$$F_i = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \\ F_{ixx} \\ F_{iyy} \\ F_{izz} \end{pmatrix} \quad (5;4)$$

5.6. Ensamblando las matrices de los distintos nudos obtendremos la matriz de acciones solicitantes o de acciones nodales referida a los ejes generales:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (5;5)$$

5.7. Análogamente obtenemos las matrices particulares de desplazamientos nodales:

$$u_i = \begin{pmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{pmatrix} \quad (5;6)$$

(*) Ya hemos dicho que el caso de cargas intermedias puede reducirse a cargas nodulares.

y la correspondiente matriz ensamblada:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (5;7)$$

5.8. Si la estructura es plana, bastará considerar las submatrices:

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \end{pmatrix} \quad (5;8)$$

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ \theta_{iz} \end{pmatrix} \quad (5;9)$$

5.9. Ahora necesitamos establecer fórmulas análogas relativas a las matrices de fuerzas y deformaciones internas en el nudo i de una barra h .

5.10. Para mayor claridad nos referimos a la barra AB (fig. 2.1). Supondremos que el nudo i es A ; que el nudo B es j .

Nuestro propósito es expresar las seis componentes del torsor equivalente a las fuerzas internas en A referido a los ejes generales de la estructura.

Pero ante todo necesitamos obtener las componentes de ese torsor respecto a los ejes particulares $A . x' y' z'$ de la figura 2.1 para pasar después a los ejes $A . x y z$.

5.11. Evidentemente es:

$$\left. \begin{aligned} P_{Ax'} &= -n_A \bar{h} \\ P_{Ay'} &= -\frac{m_{Az'} + m_{Bz'}}{L} \\ P_{Az'} &= -\frac{m_{Ay'} + m_{By'}}{L} \\ M_{Ax'} &= t_A \bar{h} \\ M_{Ay'} &= m_{Ay'} \\ M_{Az'} &= m_{Az'} \end{aligned} \right\} \quad (5;10)$$

o sea, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} P_{Ax'} \\ P_{Ay'} \\ P_{Az'} \\ M_{Ax'} \\ M_{Ay'} \\ M_{Az'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{Ay'} \\ m_{By'} \\ m_{Az'} \\ m_{Bz'} \\ n_A \bar{h} \\ t_A \bar{h} \end{pmatrix} \quad (5;11)$$

5.10.1. En el caso de una estructura plana y tratándose de la barra $\boxed{h} \equiv ij = AB$, podremos escribir con más precisión:

$$P_i \boxed{h} = \begin{pmatrix} P_{i \boxed{h} x'} \\ P_{i \boxed{h} y'} \\ M_{i \boxed{h}} \end{pmatrix} \quad \text{o sea} \quad \begin{pmatrix} \text{componente según eje } x' \\ \text{componente según eje } y' \\ \text{momento flector.} \end{pmatrix} \quad (5;12)$$

5.10.2. La matriz de componentes intrínsecas será:

$$\begin{pmatrix} m_{i \boxed{h}} \\ m_{i \boxed{h}} \\ n_{i \boxed{h}} \end{pmatrix} \quad \text{o sea} \quad \begin{pmatrix} \text{momento flector en } i \\ \text{momento flector en } j \\ \text{esfuerzo axil de la barra.} \end{pmatrix} \quad (5;13)$$

5.11. Ahora sólo nos falta pasar de coordenadas particulares i, x', y', z' a las generales i, x, y, z , aplicando la fórmula (5;3) que nos da inmediatamente:

$$\begin{pmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{pmatrix} = \Phi_{\boxed{h}}^T \begin{pmatrix} P_{ix'} \\ P_{iy'} \\ P_{iz'} \end{pmatrix} \quad (5;14)$$

y otra ecuación análoga para los momentos:

$$\begin{pmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{pmatrix} = \Phi_{\boxed{h}}^T \begin{pmatrix} M_{ix'} \\ M_{iy'} \\ M_{iz'} \end{pmatrix} \quad (5;15)$$

5.12. Obsérvese que para no complicar las notaciones hemos escrito P_{ix} en vez de $P_{i \boxed{h} x}$, etc.

El buen sentido del lector ya habrá advertido estas abreviaturas, teniendo en cuenta que nos referimos al nudo i de la barra h .

5.13. Las dos fórmulas (5;14) y (5;16) admiten la representación matricial más compacta:

$$\begin{pmatrix} P_{ix} & M_{ix} \\ P_{iy} & M_{iy} \\ P_{iz} & M_{iz} \end{pmatrix} = \Phi_{\boxed{h}}^T \begin{pmatrix} P_{ix'} & M_{ix'} \\ P_{iy'} & M_{iy'} \\ P_{iz'} & M_{iz'} \end{pmatrix} \quad (5;16)$$

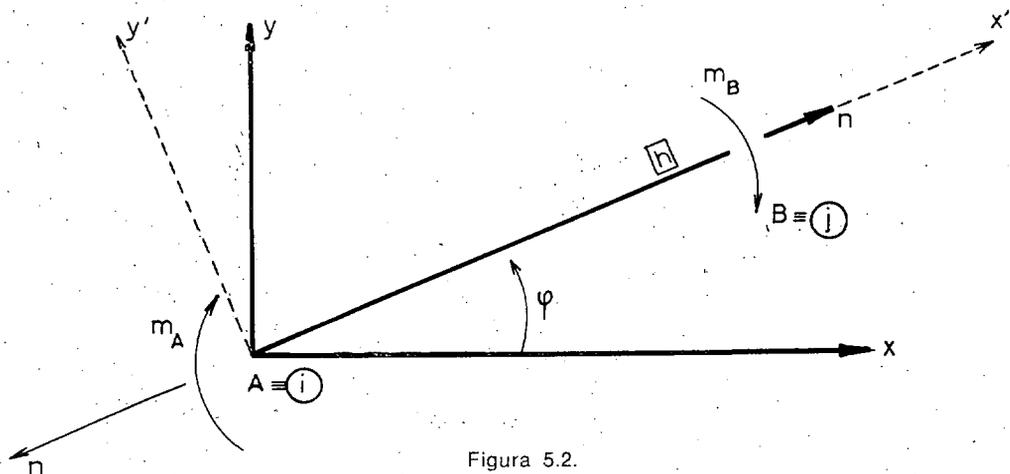


Figura 5.2.

5.13.1. En el caso de una estructura plana se obtienen prácticamente resultados mucho más sencillos de constante empleo y que resumiremos (fig. 5.2) sin otras explicaciones.

$$\Phi_{\underline{h}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5;17)$$

$$\Phi_{\underline{h}}^T = \Phi_h^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi & 0 \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5;18)$$

$$\begin{pmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \\ M_A \end{pmatrix} = \Phi_{\underline{h}}^T \begin{pmatrix} P_{Ax'} \\ P_{Ay'} \\ M'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\text{sen } \varphi}{L} & \frac{\text{sen } \varphi}{L} & -\cos \varphi \\ -\frac{\cos \varphi}{L} & -\frac{\cos \varphi}{L} & -\text{sen } \varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_A \\ m_B \\ n \end{pmatrix} \quad (5;19)$$

5.13.2. Si el extremo B es articulado aplicaremos la fórmula:

$$\begin{pmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \\ M_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\text{sen } \varphi}{L} & -\cos \varphi \\ -\frac{\cos \varphi}{L} & -\text{sen } \varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_A \\ n \end{pmatrix} \quad (5;20)$$

5.13.3. Si el extremo articulado es A tendremos:

$$\begin{pmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\text{sen } \varphi}{L} & -\cos \varphi \\ -\frac{\cos \varphi}{L} & -\text{sen } \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_B \\ n \end{pmatrix} \quad (5;21)$$

5.13.4. Finalmente, si la barra AB está articulada en sus dos extremos tendremos:

$$\begin{pmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\text{sen } \varphi \end{pmatrix} n \quad (5;22)$$

5.14.1. El mismo procedimiento puede aplicarse al nudo B de la barra AB , sustituyendo el ángulo φ por el nuevo valor $\varphi + \pi$.

5.14.2. En caso de empotramientos en A y B resulta:

$$\begin{pmatrix} P_{Bx} \\ P_{By} \\ M_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\text{sen } \varphi}{L} & -\frac{\text{sen } \varphi}{L} & \cos \varphi \\ \frac{\cos \varphi}{L} & \frac{\cos \varphi}{L} & \text{sen } \varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_A \\ m_B \\ n \end{pmatrix} \quad (5;23)$$

5.14.3. Si existe articulación única en \bar{B} resulta:

$$\begin{pmatrix} P_{Bx} \\ P_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\text{sen } \varphi}{L} & \cos \varphi \\ \frac{\cos \varphi}{L} & \text{sen } \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_A \\ n \end{pmatrix} \quad (5;24)$$

5.14.4. Si existe articulación única en A resulta:

$$\begin{pmatrix} P_{Bx} \\ P_{By} \\ M_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\text{sen } \varphi}{L} & \cos \varphi \\ \frac{\cos \varphi}{L} & \text{sen } \varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_B \\ n \end{pmatrix} \quad (5;25)$$

5.14.5. Cuando están articulados ambos extremos resulta:

$$\begin{pmatrix} P_{Bx} \\ P_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \text{sen } \varphi \end{pmatrix} n \quad (5;26)$$

En un próximo artículo haremos aplicación de estas ideas y de algunas otras al cálculo mecanizado de una pieza curva o poligonal, plana o alabeada, de sección constante o variable, empotrada o articulada en sus extremos, sometida a esfuerzos cualesquiera.