

CONTRIBUCION AL CALCULO HIDRAULICO DE TUBERIAS

Por LUIS TORRENT

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

El empleo de fórmulas varias y heteróneas en los cálculos hidráulicos de conducciones produce resultados discordantes y lleva a establecer comparaciones poco equitativas de los materiales que constituyen los conductos. Presenta el autor un ábaco rectilíneo de carácter universal que permite simplificar el cálculo de la fórmula de Colebrook y homogeneizar los criterios de selección de tuberías.

I. A modo de introducción.

En los cálculos hidráulicos de proyectos de conducciones se vienen empleando fórmulas muy diversas, avaladas por experiencias más o menos amplias y, con excesiva frecuencia, extrapoladas en su aplicación a campos muy distantes de los ámbitos para que fueron establecidas. Pese a la existencia desde hace muchos años de una fórmula universal para el cálculo de tuberías, los técnicos continúan aferrados al uso de fórmulas específicas para este o aquel material de revestimiento de la conducción y, lo que es peor, estableciendo comparaciones entre las cualidades hidráulicas de los materiales basadas en las fórmulas que para cada uno utilizan. Así hemos leído recientemente en las páginas de esta Revista un trabajo en el que se analizaban dos tuberías: una, de hormigón; otra, de amianto-cemento, y venía a decirse más o menos:

“Como la tubería de amianto-cemento se calcula con la fórmula de Scimemi y la de hormigón con la de Manning (con coeficiente recomendado $n = 0,013$), el caudal que pasará por la primera es mucho mayor que el admitido por la segunda.”

La conclusión, modelo de acientifismo, es, sin embargo, lógica consecuencia de la heterogeneidad y confusión de lindes que, en nuestra opinión, reina en el campo del cálculo de conducciones. Confusionismo que las recomendaciones más o menos oficiales de empleo indiscriminado de coeficientes en determinadas fórmulas no hace sino aumentar.

La selección de la fórmula adecuada a cada caso es importante no sólo desde el punto de vista académico, sino también en el aspecto económico del proyecto; pero, sobre todo, plantea al proyectista un delicado problema ético cuando se da el caso de tener que comparar dos o más productos comerciales aptos para la conducción: si las cualidades hidráulicas de uno de ellos se valoran correctamente, mientras se subestiman las de sus oponentes por emplear en los cálculos fórmulas inadecuadas o — todavía más — desacertadas normas de aplicación, es evidente que se está favoreciendo injustamente a los fabricantes del primer producto.

Con el empleo de la fórmula universal para el cálculo de tuberías se evitarían estas posibles e inconscientes injusticias. ¿Por qué, entonces, no se ha generalizado su uso? Porque es una fórmula un tanto engorrosa para el técnico que no está familiarizado con los conceptos de viscosidad cinemática, número de Reynolds, etc., que intervienen en ella y, sobre todo, porque no es explícita y requiere un previo tanteo bastante incómodo.

Con el trabajo presente queremos mostrar algunos aspectos positivos de dicha fórmula universal que creemos permitirán a los técnicos acostumbrarse a su empleo, bien en forma numérica, bien con el auxilio de un único y sencillo ábaco.

Pero antes, para que el lector pueda ponderar la importancia de los errores a que conduce el camino pluriformular de cálculo de conducciones, vamos a mostrar con unos ejemplos los resultados discordantes a que se llega con los métodos en uso y con las actuales normas cuasioficiales de aplicación de las fórmulas.

II. La fórmula de Manning.

Una de las fórmulas que más se utilizan actualmente en el cálculo de conducciones es la de Manning (o su equivalente de Strikler), que reza:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$

Para el cálculo de tuberías de hormigón se recomienda, como señalamos en el párrafo anterior, el empleo del coeficiente $n = 0,013$. En canales, el Centro de Estudios Hidrográficos aconseja adoptar $n = 0,014$.

No se hacen observaciones acerca de las dimensiones del conducto.

Vamos a considerar dos tuberías de diámetro muy dispares ($D_1 = 0,3$ m.; $D_2 = 3$ m.) y a comparar en ellas los resultados del cálculo hidráulico realizado con la fórmula universal y con la de Manning para distintos tipos de revestimiento.

En todos los casos se supone que la velocidad del agua es de 1,6 m./seg.

Tipo de revestimiento Rugosidad absoluta	Diámetro	Amianto- cemento $K_s = 0,03$ mm.	Hormigón centrifugado $K_s = 0,3$ mm.	HORMIGON	
				Bien acabado $K_s = 0,75$ mm.	Mal acabado $K_s = 1,6$ mm.
Pérdida de carga en mm./m. (f. universal).	0,3	6,435	8,885	11,039	13,678
	3,0	0,427	0,544	0,635	0,748
Coef. de Manning equiva- lente a esta pérdida.	0,3	0,0089 (157)	0,0105	0,0117	0,0130
	3,0	0,0107 (150)	0,0120	0,0130	0,0141
Error que se comete al adoptar $n = 0,013$.	0,3	— (— 1 %)	+ 54 %	+ 24 %	0
	3,0	— (— 8 %)	+ 17 %	0	— 15 %

NOTA.— En la tubería de amianto-cemento los valores entre paréntesis corresponden al coeficiente calculado para la fórmula de Scimemi; los errores se han hallado por comparación con el coeficiente $Sci = 158$, usual en los cálculos de este tipo de tuberías, en los que no suele utilizarse la fórmula de Manning.

Del cuadro de resultados comparados se deduce:

— La aplicación de la fórmula de Manning con coeficiente fijo puede conducir a importantes errores que serán de uno u otro signo según el diámetro y la clase de revestimiento de la conducción.

- Para un mismo tipo de material de revestimiento, los resultados no son, tampoco, concordantes: si la rugosidad es tal que la fórmula es aplicable con $n = 0,013$ en el tubo mayor, al emplearla para el menor se comete un error de + 24 por 100; inversamente, si es aplicable al pequeño diámetro, el error es de — 15 por 100 cuando se utiliza en el cálculo del tubo grande.
- El empleo de la fórmula de Manning con $n = 0,013$ para tuberías de hormigón centrifugado es muy pesimista, llegando a errores del 50 por 100 o más en conductos de pequeños diámetros.
- En cambio, la fórmula de Scimemi empleada en el cálculo de tuberías de amianto-cemento da resultados muy exactos. (El error hallado de — 8 por 100 corresponde a una extrapolación teórica, ya que no se construyen tubos de este material con diámetros de 3 m.).

Veamos ahora otro aspecto del problema. Supongamos que se proyecta una conducción para un caudal de 100 l./seg. con una pendiente piezométrica del 6,5 por 1000. Supongamos, también, que la selección del material de la tubería está, en principio, condicionada a la capacidad del transporte, con abstracción de su resistencia mecánica, durabilidad, reparabilidad, etc.

La tubería del ejemplo anterior, de 300 mm. de diámetro, en hormigón centrifugado, cumple las condiciones requeridas. Con este mismo diámetro, los tubos de amianto-cemento permiten alcanzar un caudal de 115 l./seg.; es decir, un 15 por 100 mayor que el del material anterior.

Pero si el proyectista hubiera realizado sus cálculos con la fórmula de Manning y, según normas, con $n = 0,013$, la tubería de hormigón de 300 mm. aparecería con una capacidad de 78 l./seg. para la pérdida de carga supuesta, con lo cual la de amianto-cemento resultaría un 47 por 100 más capaz. Para satisfacer las premisas, habría que acudir, en tubería de hormigón, al diámetro 350 mm. y el proyectista compararía el coste de este tubo mayor con el de amianto-cemento de 300 mm. Mientras que, utilizando fórmulas de cálculo correctas y homogéneas, la comparación de costes la establecerá entre dos tuberías de igual diámetro (300 mm.), de las cuales una es suficiente y la otra permite un margen del 15 por 100 del caudal exigido.

El planteamiento es diferente en uno y otro caso; hasta tal punto que, quizá, el proyectista, antes de tomar decisión, vuelva a considerar los aspectos mecánicos de la tubería de los que inicialmente había hecho abstracción.

III. La fórmula universal.

Tras los trabajos de Kármán, Prandtl, Nikuradse, Colebrook, etc., la fórmula universal para el cálculo de tuberías ha quedado establecida como sigue:

$$i = \frac{f v^2}{2gD} \quad \text{o bien} \quad v = \frac{1}{\sqrt{f}} \sqrt{2gDi} \quad (\text{Darcy}),$$

siendo:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{f}} + \frac{K_s}{3,7D} \right)$$

En estas fórmulas, la notación y unidades empleadas son:

i = pendiente piezométrica.

v = velocidad del fluido (m./seg.).

g = aceleración gravitatoria = 9,80 (m./seg.²) (1).

D = diámetro de la conducción (m.).

Re = número de Reynolds del régimen hidráulico = $\frac{vD}{\nu}$ (ν = viscosidad cinemática).

K_s = rugosidad absoluta, equivalente en arena, de Nikuradse (m.).

Del simple examen de las fórmulas se deducen las considerables dificultades de aplicación de las mismas. Para empezar a simplificarlas, supondremos que el líquido que vamos a estudiar es siempre agua y, además, a una temperatura T cercana a los 10° C. Si fuera $T = 11^\circ$ C, resultaría $\nu = 1,273 \times 10^{-6}$, y entonces:

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{Q}{D} \times 10^6$$

siendo Q el caudal en m.³/seg. (o en litros, si D se mide en mm.):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{10^6 \sqrt{f} \frac{Q}{D}} + \frac{1}{3,7 \frac{D}{K_s}} \right)$$

Al final de estas notas figuran en un cuadro numérico los valores de $\frac{1}{\sqrt{f}}$ en función de $\frac{Q}{D}$ y de $\frac{D}{K_s}$ (rugosidad relativa del tubo) que pueden servir, directamente o por interpolación, para obtener el coeficiente f y hallar la pendiente correspondiente mediante la fórmula ya reseñada, de Darcy:

$$i = \frac{fv^2}{2gD} = \frac{fQ^2}{12,09D^5}$$

Las variaciones de temperatura del agua que normalmente se producen en conducciones de riegos, abastecimientos, hidroeléctricas, etc., tienen una influencia despreciable en los cálculos hidráulicos. Cuando se trate de otros líquidos o de agua caliente, la simplificación anterior no es válida.

IV. Casos particulares.

a) Un caso particular de aplicación de la fórmula universal lo constituyen los tubos lisos (K_s igual o próxima a cero), en los que se verifica, por tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \quad (\text{Kármán}).$$

(1) La aceleración de la gravedad en España peninsular varía entre 9,80503 (Santander) y 9,79669 (Granada). Utilizar en los cálculos a estas alturas (y estas latitudes) $g = 9,81$ es un galicismo poco consistente.

La representación de esta ecuación en ejes $\frac{1}{\sqrt{f}} = y$, $\log Re = x$ es, sensiblemente, una recta:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong 1,8 \log Re - 1,54$$

y sustituyendo $Re = \frac{Q}{D} \times 10^6$ queda $\frac{1}{\sqrt{f}} = 9,26 + 1,8 \log \frac{Q}{D}$

fórmula explícita, notablemente más sencilla que la de Kármán, con cuyos resultados concuerda hasta 2 decimales.

La ecuación de los tubos lisos se puede escribir:

$$v = \left(41 - 8 \log \frac{D}{Q} \right) \sqrt{Dj}$$

o bien pasendo a las unidades más usuales en pequeñas tuberías (D en mm., Q en litros, j en milésimas):

$$v = \left(41 + 8 \log \frac{Q}{D} \right) \frac{\sqrt{Dj}}{1000}$$

Ejemplo: Para $D = 200$ mm., $Q = 50$ l./seg., $v = 1,59$ m./seg., resulta $j = 9,673$. Calculada exactamente, la pendiente es $j = 9,676$.

La fórmula que acabamos de exponer es útil en el cálculo de tuberías de vidrio, polivinilo u otros materiales en los que $K_s < 10 \mu$. La diferencia de calcular con ella o con la fórmula general es despreciable en la práctica.

b) En el régimen hidráulico "turbulento rugoso" la fórmula universal queda reducida a su segundo "sumando":

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = - 2 \log \frac{K_s}{3,7 D} = 2 \log \frac{3,7 D}{K_s}$$

Es válido, entonces, el cálculo de tuberías (para $D > 0,8$ m) que preconizamos en un artículo de esta Revista (abril de 1966) mediante la fórmula:

$$v = B R^b i^{0,5} \quad (R = \text{radio hidráulico})$$

siendo $B = 21 - 18 \log K_s$ (valores usuales $100 > B > 68$)

$$b = 0,5 + \log \frac{1,57 - \log K_s}{0,57 - \log K_s} \quad (\text{valores usuales } 0,58 < b < 0,62)$$

Las dos fórmulas particulares que acabamos de comentar no son más que traducciones, simplificadas en su expresión, de la fórmula universal de tubos. No introducen, pues, heterogeneidad en el cálculo de conducciones si sus resultados han de compararse entre sí o con los obtenidos por aplicación directa de dicha fórmula.

V. El régimen "turbulento liso".

Al contrario de lo que suele ocurrir en los proyectos hidroeléctricos, cuyo régimen hidráulico cae casi siempre en zona "rugosa" en abastecimientos de agua, riegos por aspersión, saneamientos, etc., el tamaño de las conducciones y las velocidades, relativamente bajas del agua, sitúan los cálculos en pleno territorio "turbulento liso", en el cual la fórmula universal ha de ser utilizada en su expresión completa.

Además del empleo de cuadros numéricos de valores del coeficiente f (ó $\frac{1}{\sqrt{f}}$) ya señalado, se suelen abordar entonces los cálculos con ayuda de ábacos, que en escala semilogarítmica representan la variación del coeficiente en función del número de Reynolds, para cada valor del parámetro $\frac{D}{K_s}$.

La familia de curvas que así resultan son tangentes, asintóticamente, a la "recta lisa" que antes comentamos y, también asintóticamente, a la "recta rugosa" $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3,7 D}{K_s}$ correspondiente a su parámetro. El ábaco, llamado "arpa de Nikuradse", figura en todos los tratados modernos de hidráulica y puede ser trazado con los valores numéricos del cuadro a que antes nos referimos.

Mediante una traslación paramétrica de cada una de las curvas del ábaco:

$$x = \log R e - 1,111 \log \frac{D}{K_s}$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{f}} - \log \frac{D}{K_s}$$

el arpa de Nikuradse queda reducida a una "curva única" (entrecorramos porque, aunque inapreciable en el dibujo, la superposición de curvas no es perfecta).

Hemos hallado una definición algebraica para este arpa monocorde, independiente, como es natural, del parámetro $\frac{D}{K_s}$, pero que no es sencilla:

$$x = 0,2236 + \log \frac{4,3 + t}{10^{-t} + \frac{1}{3,7}} \quad \text{o bien} \quad t = \log \frac{0,6 \times 10^x + 0,27}{t + 4,3}$$

También puede adoptarse para la "curva única" la ecuación:

$$x = 1,18 t + 0,9 + \frac{0,054}{0,57 - t}$$

expresión más manejable, pero bastante menos aproximada que las anteriores.

De cualquier forma, la resolución numérica del cálculo hidráulico, sin tablas ni ábacos, es excesivamente laboriosa. En nuestra opinión, también resulta complicada en exceso con los ábacos usuales, e incluso con la "curva única" que obligaría al proyectista a simultanear el uso del gráfico con el de la tabla de logaritmos. Por todo ello, estimamos que puede ser interesante y simplificador el uso del ábaco rectilíneo que explicaremos en el próximo párrafo; ábaco que creemos haber deducido, aunque no nos atrevemos a afirmarlo, pues no sería la primera vez que nuestros afañes hidráulicos nos conducen a Mediterráneos archiconocidos técnicamente.

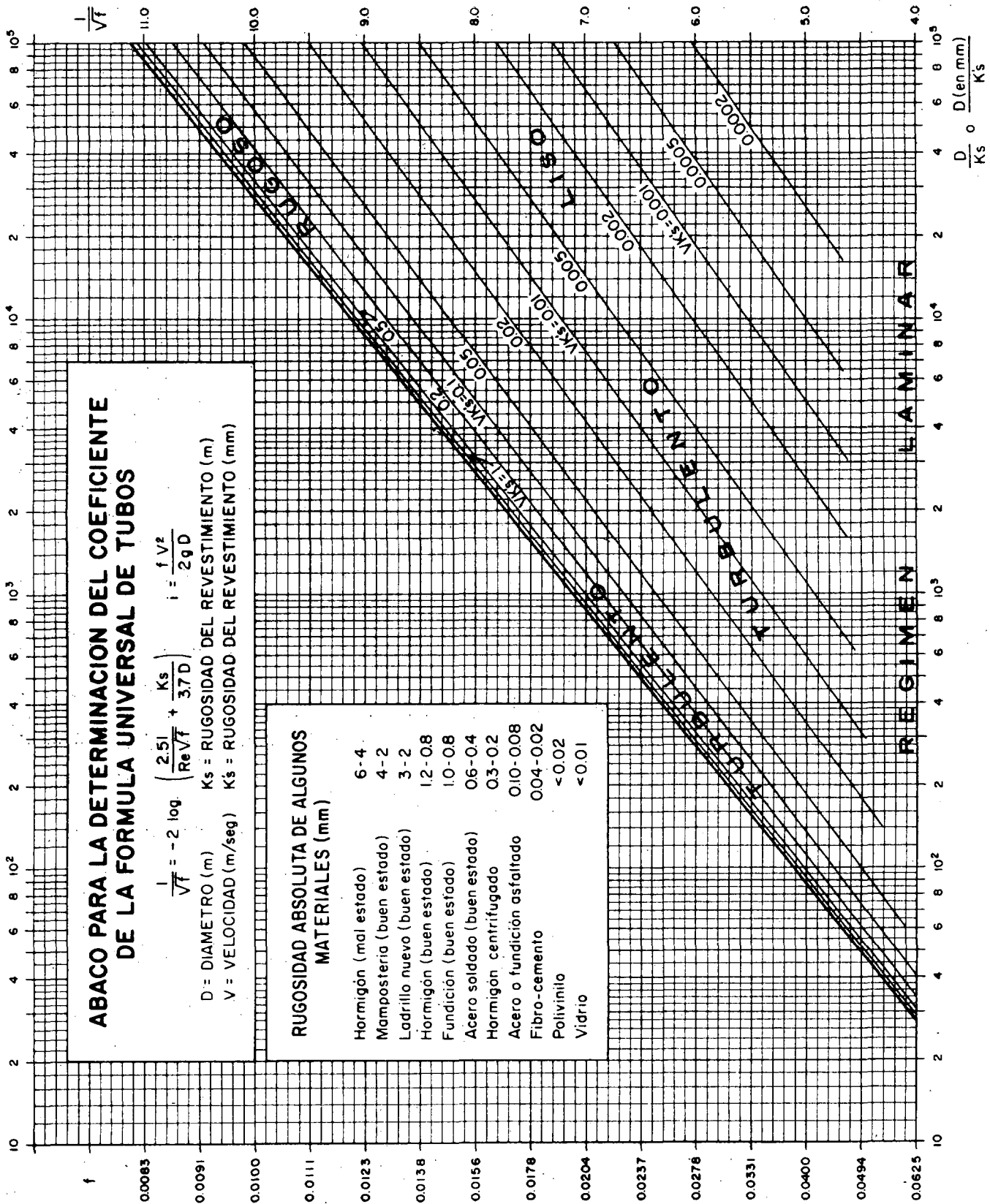
ABACO PARA LA DETERMINACION DEL COEFICIENTE DE LA FORMULA UNIVERSAL DE TUBOS

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}} + \frac{K_s}{37D} \right) \quad i = \frac{f V^2}{2gD}$$

D = DIAMETRO (m) K_s = RUGOSIDAD DEL REVESTIMIENTO (m)
 V = VELOCIDAD (m/seg) K'_s = RUGOSIDAD DEL REVESTIMIENTO (mm)

RUGOSIDAD ABSOLUTA DE ALGUNOS MATERIALES (mm)

Hormigón (mal estado)	6-4
Mampostería (buen estado)	4-2
Ladrillo nuevo (buen estado)	3-2
Hormigón (buen estado)	1.2-0.8
Fundición (buen estado)	1.0-0.8
Acero soldado (buen estado)	0.6-0.4
Hormigón centrifugado	0.3-0.2
Acero o fundición asfaltado	0.10-0.08
Fibro-cemento	0.04-0.02
Polivinilo	<0.02
Vidrio	<0.01



VI. El ábaco formado por "rectas".

Si en la fórmula universal llamamos $y = \frac{1}{\sqrt{f}}$, $z = \log \frac{D}{K_s}$ y utilizamos como parámetro:

$$C_1 = \frac{R e K_s}{2,51 D} = \frac{v K_s}{2,51 v} \cong \frac{v K_s}{\pi} \times 10^6 = \frac{v K'_s}{\pi} \times 10^3$$

(temperatura del agua próxima a 10° C) se puede escribir:

$$z = 0,5 y + \log \left(\frac{1}{3,7} + \frac{y}{C_1} \right)$$

La ecuación representa una familia de curvas que, dentro de los límites en que, ampliamente, pueden ser acotados los valores de v y de K'_s , presentan tan escasa curvatura que su asimilación a rectas no menoscaba la exactitud del cálculo.

En efecto: la tangente a una curva cualquiera en un punto de ordenada y_0 , tiene un coeficiente angular:

$$\left(\frac{dz}{dy} \right)_0 = 0,5 + \frac{0,4343}{y_0 + \frac{C_1}{3,7}} = 0,5 + \frac{1}{200 v K'_s + \frac{y_0}{0,4343}}$$

siendo K'_s la rugosidad absoluta en mm., $v = 1,23968 \times 10^{-6}$, correspondiente a $T = 10^\circ \text{C}$.

Como los valores de $y = \frac{1}{\sqrt{f}}$ están casi siempre comprendidos entre $y = 5$ e $y = 10$, sustituiremos las curvas por sus tangentes en un punto intermedio, por ejemplo $y_0 = 6,9497 = \log e^{16}$ y calcularemos las desviaciones angulares que se originan en las zonas extremas del campo de variación de y , para lo cual tomamos:

$$y_1 = 5,2115 = 12 \log e; \quad y_2 = 9,5545 = 22 \log e$$

(estos aparentemente extraños valores de y permiten una expresión sencilla del coeficiente angular). Resultan:

$$\cotg \alpha_1 = \left(\frac{dz}{dy} \right)_1 = 0,5 + \frac{1}{12 + 200 K'_s v}$$

$$\cotg \alpha_{1,0} = 63,75 + 1800 k'_s v + 12500 (k'_s v)^2 > 63,75,$$

$$\cotg \alpha_0 = \left(\frac{dz}{dy} \right)_0 = 0,5 + \frac{1}{16 + 200 K'_s v}$$

$$\cotg \alpha_{2,0} = 76,66 + 1616,6 K'_s v + 8,333 (K'_s v)^2 > 76,66,$$

$$\cotg \alpha_2 = \left(\frac{dz}{dy} \right)_2 = 0,5 + \frac{1}{22 + 200 K'_s v}$$

Por consiguiente:

$$\alpha_{1,0} < 54'; \quad \alpha_{2,0} < 45'.$$

Para los mínimos valores usuales de rugosidad y velocidad se tiene $K'_s v > 0,01$, con lo cual los ángulos de desviación de las tangentes extremas son todavía menores:

$$\alpha_{1,0} < 42'; \quad \alpha_{2,0} < 37'$$

y, por lo tanto, la sustitución de las curvas por sus tangentes en los puntos de ordenada y_0 es perfectamente válida a efectos prácticos.

La acotación de valores de y considerada cubre con amplitud la posible variación de este coeficiente en tuberías muy lisas. Para materiales más rugosos, la dispersión de valores puede desbordar la acotación; pero también, entonces, es mayor el producto $K'_s \cdot v$ y, en consecuencia, mucho menor el ángulo de desviación de las tangentes o, lo que es igual, la curvatura de las líneas.

VII. Propiedades del ábaco rectilíneo.

La sustitución de curvas por sus tangentes, cuya validez acabamos de ver, nos permite representar en un ábaco formado por líneas rectas la variación del coeficiente de la fórmula universal $y = \frac{1}{\sqrt{f}}$ en función del cociente $\frac{D}{K_s}$ o rugosidad relativa de la tubería para cada valor del producto $v \times K_s$ (o $v \times K'_s$, si medimos en milímetros la rugosidad absoluta del revestimiento).

Para la representación gráfica tomamos horizontalmente los valores de $\frac{D}{K_s}$ en escala logarítmica. En el eje vertical, a escala métrica, aparecen los valores de $\frac{1}{\sqrt{f}}$, que se complementan con los correspondientes de $f = \frac{1}{y^2}$. El ábaco, limitado inferiormente por la zona de régimen laminar, se compone de una serie de segmentos rectilíneos, casi paralelos a la "recta rugosa", cuya divergencia respecto a ésta aumenta con la distancia. Los segmentos más alejados corresponden a los menores valores del producto $v \times K'_s$, mientras que para $v K'_s > 2$, las líneas se confunden, prácticamente, con dicha recta rugosa $z = 0,5 y - \log 3,7$.

En nuestra opinión, el ábaco propuesto tiene una notable ventaja respecto a los usuales de Colebrook, White, Rouse, etc.: la de ser, a un mismo tiempo, un ábaco universal y particular. En efecto: si queremos tenerlo particularizado para un determinado material de revestimiento, basta que consideremos constante la rugosidad correspondiente al material en cuestión, con lo que las abscisas del ábaco representarán diámetros y los parámetros, velocidades del agua. Por ejemplo: la fundición asfaltada tiene una rugosidad absoluta de 0,1 mm.; el ábaco general se particulariza para este material sin más que leer $\frac{D}{K_s} = 10 D; v K'_s = 0,1 v$.

Si, por el contrario, prefijamos la velocidad del agua (por ejemplo, en 1 m./segundo), el ábaco refleja la variación del coeficiente en función de la rugosidad y el diámetro.

El hecho de que el ábaco esté formado por rectas, aunque no sean paralelas ni respondan a una ley geométrica sencilla, creemos es también una ventaja, tanto para su trazado como porque facilita la interpolación.

Por último, el uso del ábaco permite apreciar, de forma gráfica y clara, la influencia de la velocidad y la rugosidad en cada régimen hidráulico, diferenciando las zonas turbulenta rugosa, lisa y laminar: centrando de entrada, por así decirlo, el problema hidráulico en estudio.

VIII. Conclusión y ruego final.

Creemos haber logrado poner a disposición de los técnicos hidráulicos una herramienta de trabajo sencilla, que permite calcular con bastante precisión y ponderar equitativamente las posibles soluciones de los problemas de transporte de agua que en nuestra profesión se plantean.

Si ello es así, damos por bien empleados los largos y pesados cálculos realizados en la preparación de estas notas; cálculos todos ellos encaminados a simplificar el uso de la fórmula universal de tubos, pero que, en mayoría, no lograron el fin práctico buscado. (La curva "única" o "arpa monocorde" de Nikuradse precitada es una muestra de este esfuerzo infructoso.)

A quienes se interesen por estos temas ofrecemos los resultados de nuestras exploraciones fallidas, que tal vez, con nuevo y más hábil timonel, puedan alcanzar los puertos deseados.

Y a todos los técnicos hidráulicos y, en particular, a los constructores de tuberías, rogamos que, si llegan a utilizar las fórmulas o ábacos de este estudio, nos envíen información de su experiencia directa, especialmente en lo que se refiere a rugosidades absolutas de los materiales de revestimiento.