

METODOS MATRICIALES PARA MECANIZAR EL CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por FEDERICO ALICART

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Subdirector del Gabinete de Cálculo del C. de E. y E. de O. P.

Para efectuar con cierto rigor el estudio de un sistema ingenieril hay que empezar estableciendo un modelo matemático o ente de ficción que idealice el comportamiento del mismo para poder aplicar algún algoritmo numérico aceptable en sus dos aspectos teórico y práctico.

Si el modelo matemático es sencillo podrá ser abordado directamente, pero en caso de sistemas o de estructuras más complejas habrá que descomponerlo en subestructuras o incluso en elementos simples de fácil estudio para obtener resultados parciales, que, debidamente ensamblados, nos permitan obtener los valores correspondientes a la estructura global.

La elección de tales elementos es de importancia decisiva para el desarrollo de los cálculos. La intuición y la experiencia del Ingeniero proyectista son los principales factores en esta primera etapa.

Como en el presente trabajo se trata de analizar las vigas continuas, los entramados y las estructuras reticulares ya planas o espaciales, no hace falta decir cuál es el modelo matemático de la estructura global ni de los elementos estructurales.

Entre la variedad de métodos de cálculo destacan dos: el de los desplazamientos y el de las fuerzas.

Ambos ofrecen semejanzas, puesto que conducen a un mismo sistema de ecuaciones lineales, pero difieren en el modo de resolver el sistema algebraico.

Las ecuaciones que se manejan son:

1.º Condiciones de equilibrio entre las fuerzas externas directamente aplicadas en los nudos, las fuerzas nodulares equivalentes inducidas por cargas intermedias, las acciones de origen térmico y las reacciones internas de cada elemento.

2.º Condiciones de compatibilidad entre los desplazamientos de los nudos y las deformaciones elásticas de cada elemento.

3.º Ecuaciones de elasticidad que ligan esfuerzos y deformaciones.

Las incógnitas a calcular son los desplazamientos en los nudos de la estructura y las reacciones internas de los elementos, es decir, las matrices u y P analizadas en un artículo anterior (*).

(*) Ver Revista de Obras Públicas (julio 1968).

En el método de las fuerzas se toma la matriz \mathbf{P} como incógnita principal, y en función de ella se calculará la matriz \mathbf{u} .

En el método de las deformaciones es \mathbf{u} la primera matriz que se calcula, y en función de ella se expresará la \mathbf{P} .

No podemos ahora explicar cuál de los métodos es más conveniente en razón de las menores complicaciones de cálculo y de acuerdo con el tipo de estructura; bastará decir que existen criterios bien definidos sobre el particular.

Finalmente, en ambos métodos se calcula mediante fórmulas sencillas la matriz δ de deformaciones internas de los elementos.

Con todo ello, el cálculo de las σ , τ , ϵ y γ en cualquier punto de un elemento no ofrece mayores dificultades en los casos que ahora nos interesan.

En el presente artículo trataremos exclusivamente del método de las deformaciones aplicado a seis tipos de estructuras:

- 1.º Vigas continuas.
- 2.º Cerchas planas con nudos articulados.
- 3.º Entramados planos con nudos rígidos.
- 4.º Emparrillados planos.
- 5.º Cerchas tridimensionales con nudos articulados.
- 6.º Entramados tridimensionales con nudos rígidos.

Veremos que todas ellas se calculan mediante etapas idénticas, manejando siempre los mismos símbolos que representan los mismos conceptos, aunque sus formulaciones aritméticas sean distintas, según el tipo de estructura.

Los elementos estructurales son siempre barras rectas de sección constante entre nudo y nudo.

Si hubiese algún cambio brusco de sección intermedia, bastaría introducir como nuevo nudo ese punto de discontinuidad.

Pueden considerarse otras variaciones de sección que tampoco alteran la esencia del método.

Como ya se indicó en nuestro precedente artículo, supondremos referida la estructura a un sistema de coordenadas generales $(\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z})$ convenientemente elegido; además, cada elemento tendrá su sistema particular o local de referencia $(x \ y \ z)$, o bien $(x_h \ y_h \ z_h)$, si se quiere destacar el elemento correspondiente $[h]$.

Nuestro objetivo de mecanización exige que el programa o lista de instrucciones codificadas que ha de ser introducido en máquina admita cualquier hipótesis de carga.

En consecuencia, la matriz \mathbf{F} debe contener la totalidad de acciones localizables en los nudos. Ellas pueden tener cuatro procedencias:

- 1.ª Fuerzas o momentos directamente aplicadas en un nudo (fuerzas directas).
- 2.ª Fuerzas o momentos nodales inducidos por cargas externas intermedias (fuerzas equivalentes).
- 3.ª Acciones nodales de origen térmico o debidas a pretensiones o desajustes iniciales en el montaje de los elementos.
- 4.ª Reacciones de sustentación en nudos coartados.

Las fuerzas directas pertenecen siempre a la información de entrada y constituyen una parte de las hipótesis de carga.

Las fuerzas equivalentes se calculan mediante subrutinas adecuadas que explicaremos en otra ocasión. En el caso particular de estructuras reticulares, estas fuerzas son iguales y de signo contrario a las reacciones en los extremos perfectamente empotrados de la barra, cuando sobre ella actúan las cargas intermedias.

Las fuerzas térmicas o de pretensión y desajuste se representan por el símbolo Q , y pueden deducirse de un escalar:

$$T(x, y, z)$$

dato del problema, que representa el aumento de temperatura en un punto genérico de la estructura, del coeficiente de dilatación lineal del material α y de otros coeficientes elásticos.

Finalmente, las reacciones de sustentación son fuerzas cuyo cálculo corre a cargo del programa.

Así, por ejemplo, en el caso de la viga continua (fig. 1) hay que reservar dos

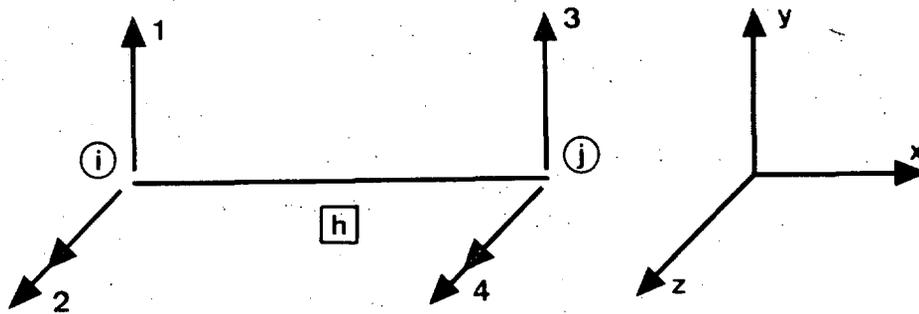


Figura 1.

elementos de F por cada nudo. Tratándose del nudo i , intervendrán F_{2i-1} (carga transversal) y F_{2i} (momento flector). Los desplazamientos correspondientes son el vertical u_{2i-1} y el giro u_{2i} .

Este caso es muy sencillo porque los ejes particulares de todas las barras tienen direcciones (x) coincidentes entre sí. Los ejes generales (\bar{x} y \bar{z}) de la estructura son paralelos a los ejes (x, y, z) de cada barra.

El caso de la cercha plana articulada (fig. 2) es análogo al anterior. En el nudo i aparecen los mismos símbolos:

$$F_{i-1} \quad F_{2i} \quad u_{2i-1} \quad u_{2i}$$

aunque sus significados sean diferentes.

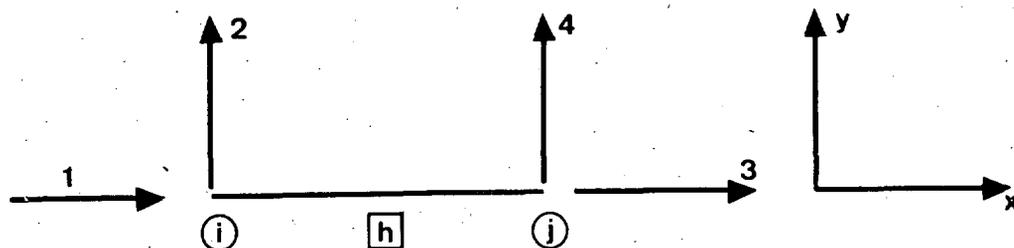


Figura 2.

Tanto en los entramados planos con nudos rígidos (fig. 3), como en los emparillados planos (fig. 4) y las cerchas espaciales articuladas (fig. 5) aparecen en cada nudo los tres elementos:

$$F_{3i-2} \quad F_{3i-1} \quad F_{3i}$$

de la matriz de fuerzas F y sus homólogos:

$$u_{3i-2} \quad u_{3i-1} \quad u_{3i}$$

en la matriz de desplazamientos u .

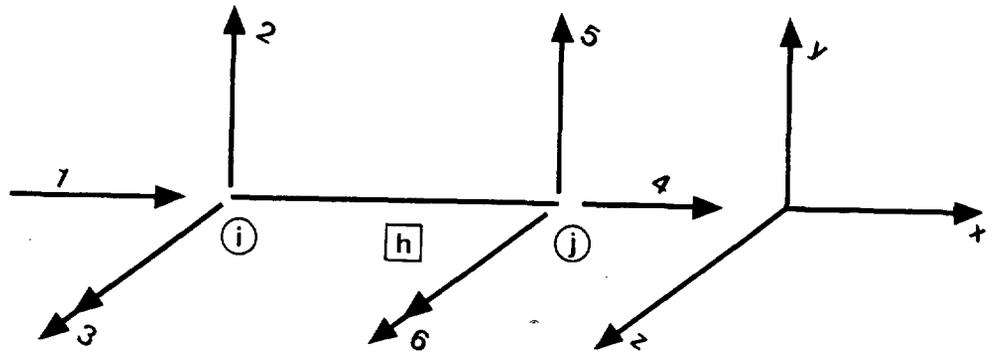


Figura 3.

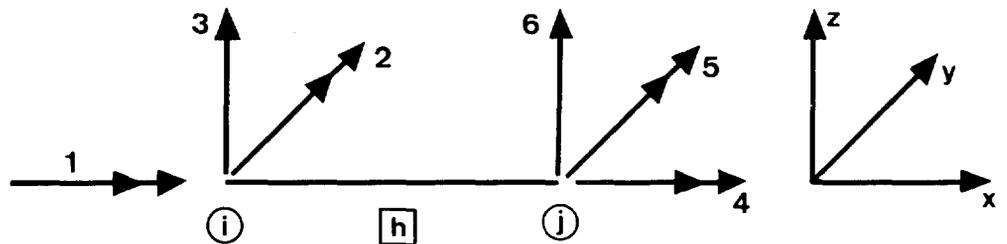


Figura 4.

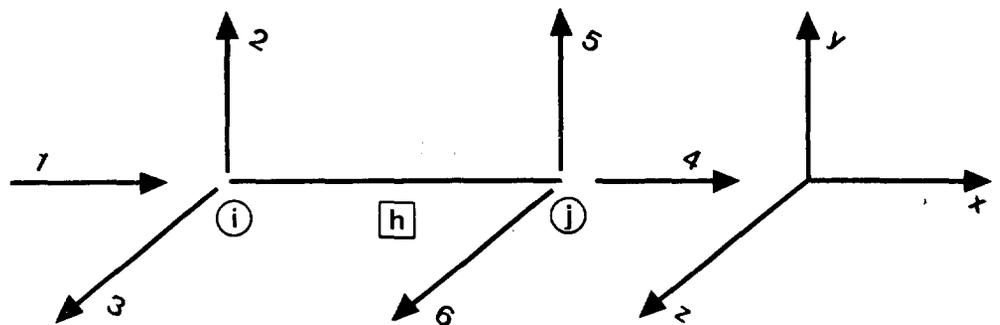


Figura 5.

En el sexto caso, relativo a entramados rígidos tridimensionales (fig. 6), corresponden a cada nudo los términos:

$$\begin{array}{cccccc} F_{6i-5} & F_{6i-4} & F_{6i-3} & F_{6i-2} & F_{6i-1} & F_{6i} \\ u_{6i-5} & u_{6i-4} & u_{6i-3} & u_{6i-2} & u_{6i-1} & u_{6i} \end{array}$$

donde las F representan los componentes del tesor de acciones en i , referido a ejes generales \bar{x} y \bar{z} .

BARRAS	Nudos		Longitud	Area	Mom. inercia I_z	Cosenos directores	
	i	j				C_x	C_y

N U D O S	Fuerzas según		Momento según eje z
	eje x	eje y	

El régimen de cambios de temperatura y de pretensiones en las piezas habrá que definirlo con claridad en cada caso mediante la función de temperatura $T(x, y, z)$ y las deformaciones o pretensiones iniciales de los elementos.

Las sobrecargas intermedias se definirán mediante esquemas gráficos que el programador ajustará al código de su máquina mediante la clave y los parámetros correspondientes.

No se olvidará, tampoco, de registrar el módulo de Young E , el coeficiente de Poisson ν , el coeficiente de dilatación térmica α y cuantas constantes pida el programa de acuerdo con el tipo de estructura.

Toda esta información será perforada, obteniéndose un paquete de fichas que se registrará en memoria a través de la unidad lectora del mismo modo que se habrá introducido el programa contenido en otro paquete.

Ahora es cuando empieza el trabajo de cálculo, precisamente cuando ha terminado la actuación del Ingeniero.

La máquina va extrayendo una a una las sucesivas instrucciones contenidas en el programa, busca los datos, que en cada instante necesita, examina aquellos registros de memoria donde ella misma los situó, almacena los resultados provisionales que más tarde ha de necesitar, y una vez cumplido el programa, ella misma imprimirá los resultados finales si dispone de impresora o perforará otro paquete de fichas con los valores debidamente codificados.

La máquina se limita a hacer cuanto se la ha ordenado con absoluta claridad y precisión a través del programa y todo eso que se le ha dicho, en lenguaje aceptado por la máquina, es lo que el Ingeniero ya conoce y tendría que hacer a mano con tanta lentitud, fatiga y peligro de equivocaciones, que tardaría a veces años en obtener lo que la calculadora electrónica le puede ofrecer con suficiente aproximación en pocos minutos.

Aunque el programa suponga cientos de miles y aún millones de operaciones, podemos condensarlo en tres etapas fundamentales:

1.^a Generación de la matriz de rigidez k de la estructura dada, referida a un sistema de coordenadas mecánicas tan amplio como sea necesario para abarcar de una sola vez todas las hipótesis de carga imaginables.

2.^a Cálculo de las reacciones en los nudos coartados.

3.^a Cálculo de las matrices de desplazamientos u , de esfuerzos internos P y de deformaciones internas δ .

La primera etapa es, con mucho, la que mayor trabajo exige.

El punto de arranque para obtener k está en la descomposición de la estructura global en elementos simples, sobre los cuales se definirán otras coordenadas mecánicas, y en cuya referencia se calcularán las matrices de rigidez α_h de cada elemento, las cuales, debidamente ensambladas, nos darán la matriz buscada k .

Como en el presente artículo nos limitamos a los seis casos de estructuras antes descritas, no hace falta repetir que los elementos son las barras, cuyas matrices de rigidez se obtienen sin dificultades teóricas, aparte de que son conocidas de antiguo y pueden tomarse de los tratados de Mecánica Elástica.

Por la importancia de estas fórmulas vamos a reproducirlas aquí con algún detalle, advirtiendo que todas las matrices α se refieren a ejes particulares de la barra (x, y, z) que en las mismas figuras se indican:

VIGA CONTINUA (fig. 1).

$$\alpha_h = \begin{pmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Recordaremos que esta matriz verifica la ecuación:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}_h = \alpha_h \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}_h \quad (2)$$

todo ello referido a coordenadas particulares de la barra, como ya se ha dicho.

CERCHA PLANA ARTICULADA (fig. 2). :

$$\alpha_h = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ENTRAMADO PLANO CON NUDOS RIGIDOS (fig. 3).

$$x_h = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix} \quad (4)$$

EMPARRILLADO PLANO (fig. 4).

$$x_h = \begin{pmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_y}{L} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} \end{pmatrix} \quad (5)$$

CERCHA TRIDIMENSIONAL CON NUDOS ARTICULADOS (fig. 5).

$$x_h = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

ENTRAMADO TRIDIMENSIONAL CON NUDOS RIGIDOS (fig. 6).

$$x_h = \begin{pmatrix} \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Existen otros casos de sustentación mixta, ya considerados en nuestro primer artículo.

Es interesante recordar el significado mecánico de los coeficientes de influencia k_{ij} , que constituyen una matriz elemental de rigidez x_h , pues así, conoceremos el camino para calcular dichos términos no sólo en los seis casos expuestos, sino también en otras estructuras por ejemplo placas, membranas, discos, láminas, macizos continuos, etc., donde cabe considerar otros elementos planos o alabeados, triangulares, cuadrangulares, tetraédricos etc., cuyas rigideces ante la acción de cargas aplicadas en los vértices sean calculables.

Por una parte, el término k_{ij} de una matriz de rigidez referida al sistema de coordenadas mecánicas (F, u) es el valor de la fuerza inducida en la dirección y sentido de F_i por el sistema de desplazamientos

$$u_j = 1$$

$$u_h = 0 \quad \text{para todo } h \neq j$$

Tratándose de un elemento estructural, ya sabemos que las coordenadas mecánicas (P, δ) son distintas de las (F, u) pero el proceso de cálculo es el mismo.

También k_{ij} puede calcularse mediante la energía de deformación interna, puesto que

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial u_i \partial u_j} \quad (8)$$

Recordando el teorema de Schwarz sobre el orden de derivación, se comprueba que toda matriz de rigidez es simétrica, lo cual simplifica considerablemente su cálculo.

También k_{ij} es el trabajo de deformación de las fuerzas internas inducidas por los desplazamientos

$$\begin{aligned} u_j &= 1 \\ u_h &= 0 \quad \text{para todo } h \neq j \end{aligned}$$

en la deformación elástica virtual que corresponde a los desplazamientos

$$\begin{aligned} u_i &= 1 \\ u_h &= 0 \quad \text{para todo } h \neq i \end{aligned}$$

Tratándose de cerchas, entramados y vigas continuas, habrá que considerar cuatro sumandos para obtener el valor de k_{ij} , que son el trabajo del momento flector, del esfuerzo axial, del momento de torsión y del esfuerzo cortante.

A veces se prescinde de alguna de estas acciones porque se estima, *a priori*, que su influencia es despreciable como suele ocurrir con el trabajo del esfuerzo cortante, y ésta es la causa de que se observe alguna discrepancia en las matrices x_h utilizadas en diferentes ocasiones.

Desde luego, en ninguna de las fórmulas, que figuran en el presente artículo, se ha tomado en consideración el esfuerzo cortante.

También conviene advertir, que la validez de dichas fórmulas exige que, en todos los casos de flexión, los ejes transversales (y, z) sean principales de inercia de la sección.

Siendo m el número total de barras de la estructura, tendremos las siguientes m ecuaciones matriciales

$$\left. \begin{aligned} P_h &= x_h \delta_h + Q_h \\ (h &= 1, 2 \dots m) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

donde las x_h y Q_h son conocidas por representar las matrices de rigidez de cada elemento y las fuerzas internas en los nudos inducidas por efecto térmico, que se calculan mediante las siguientes fórmulas:

1.ª Barra articulada en sus extremos

$$Q_h = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}_h = A E \alpha T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

2.^a Barra de entramado plano con nudos rígidos.

$$Q_h = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix}_h = \begin{pmatrix} EA\alpha T_m \\ 0 \\ -\int_A \alpha ETy dA \\ -EA\alpha T_m \\ 0 \\ \int_A \alpha ETy dA \end{pmatrix}_h \quad (11)$$

Siendo $T(y, z)$ la ley conocida de aumento de temperaturas que es la misma para todas las secciones de la barra

$$T_m = \frac{1}{A} \int_A T(y, z) dA \quad (12)$$

el incremento medio de temperaturas en la sección.

En el caso de entramado tridimensional con nudos rígidos es

$$Q_h = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA\alpha T_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int_A \alpha ETz dA \\ -\int_A \alpha ETy dA \\ -EA\alpha T_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\int_A \alpha ETz dA \\ \int_A \alpha ETy dA \end{pmatrix} \quad (13)$$

De este caso general se deducen todos los otros casos particulares, incluso el del emparrillado que omitimos.

Ahora se trata de obtener la matriz k como síntesis y ensamblaje de las m matrices χ_h , pero como cada una de éstas la conocemos referida a sus ejes locales es preciso hacer m cambios de coordenadas para pasar a ejes generales $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de la estructura.

Suponiendo que $P_h \delta_h \chi_h$ son las matrices referidas a las coordenadas locales de la barra h , llamaremos $\bar{P}_h \bar{\delta}_h \bar{\chi}_h$ a esas matrices referidas a coordenadas generales de la estructura completa.

Como los cambios de ejes equivalen a transformaciones lineales, tendremos para la barra genérica una relación de la forma:

$$\bar{\delta}_h = \lambda_h \delta_h \quad (14)$$

donde λ_h es una matriz que tiene tantas filas como elementos tenga δ_h , y tantas columnas como elementos tenga $\bar{\delta}_h$.

Así, por ejemplo, en el caso de cercha articulada tridimensional, λ_h es una matriz del tipo 2×3 .

No existe dificultad para formar las matrices λ_h cuando se conocen los cosenos directores de los triedros particulares de las barras h .

La relación entre las matrices P_{h_h} y \bar{P}_h se deduce fácilmente aplicando el principio de los trabajos virtuales a los sistemas de fuerzas equivalentes P_h y \bar{P}_h , y teniendo en cuenta la fórmula (14).

En seguida se obtiene:

$$\bar{P}_h = \lambda'_h P_h \quad (15)$$

Ello indica que las fuerzas internas en los elementos y sus correspondientes deformaciones son dos sistemas de variables contragredientes, propiedad de la cual se hace mucho uso en los razonamientos teóricos. Del mismo modo, las fuerzas térmicas sobre cada elemento se transformarán según la ley:

$$\bar{Q}_h = \lambda'_h Q_h \quad (16)$$

Entonces, la ecuación (9) nos permite escribir la transformada:

$$(\lambda'_h)^{-1} (\bar{P}_h - \bar{Q}_h) = \alpha_h \lambda_h \delta_h \quad (17)$$

de donde:

$$\bar{P}_h - \bar{Q}_h = \lambda'_h \alpha_h \lambda_h \delta_h \quad (18)$$

y por tanto, la nueva matriz elemental de rigidez será:

$$\bar{\alpha}_h = \lambda'_h \alpha_h \lambda_h \quad (19)$$

Conocida esta matriz, el sistema de ecuaciones (9) toma la forma:

$$\bar{P}_h = \bar{\alpha}_h \bar{\delta}_h + \bar{Q}_h \quad (20)$$

que al ensamblar las m barras nos da:

$$\bar{P} = \bar{\alpha} \bar{\delta} + \bar{Q} \quad (20 \text{ bis})$$

Por su parte, las matrices de esfuerzos sobre la estructura general y de desplazamientos correspondientes, es decir, F y u , están siempre referidas a ejes generales y no necesitan transformarse.

La compatibilidad entre desplazamientos u y deformaciones $\bar{\delta}$ exige que entre ellas exista una relación de la forma:

$$\bar{\delta} = \beta u \quad (21)$$

donde β es otra matriz que tiene todos sus elementos nulos, excepto algunos pocos que valen 1.

Puede verse esto particionando:

$$\bar{\delta} = \begin{pmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\delta}_h \\ \vdots \\ \bar{\delta}_m \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$m = \text{número total de barras}$

$n = \text{número total de nudos}$

Entonces β será una matriz particionada en m filas matriciales y n columnas matriciales, cuya matriz genérica β_{hi} será cero si la barra h no contiene al nudo i , apareciendo algunos términos iguales a 1 en caso contrario.

A primera vista se intuye que β es una matriz auxiliar poco conveniente para el cálculo electrónico, porque suele tener unas dimensiones muy superiores a las restantes matrices que se manejan y, además, su ensamblaje representa un trabajo de programación que puede ser evitado.

Así, por ejemplo, en una estructura relativamente simple, como el entramado (figura 7) con sus 9 nudos y sus 12 barras, aparece una matriz auxiliar β con 7776 términos, distribuidos en:

$$12 \times 12 = 144 \text{ filas}$$

y $9 \times 6 = 54 \text{ columnas}$

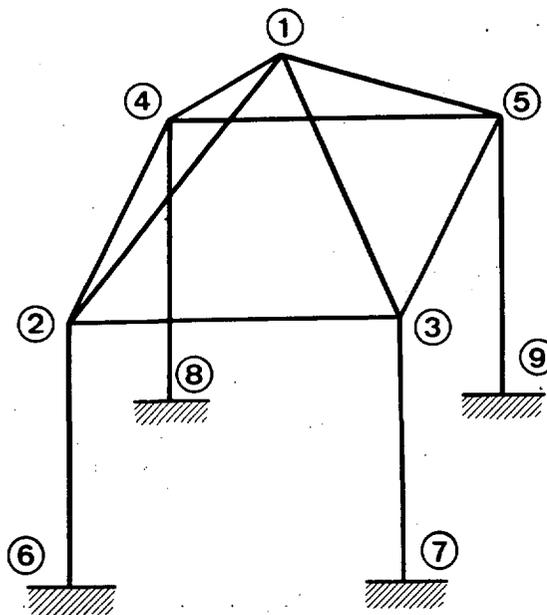


Figura 7.

Sin embargo, conviene retener en forma simbólica esta matriz, pues ella sirve para relacionar las matrices de fuerzas solicitantes F y la matriz \bar{P} de esfuerzos internos mediante la fórmula:

$$F = \beta' \bar{P} \quad (22)$$

En realidad, esto es una consecuencia del carácter contragrediente de los esfuerzos y de las deformaciones, según ya hemos advertido.

Si en (22) sustituimos los valores (20 bis) y (21) resulta:

$$F = \beta' (\bar{\alpha} \bar{\delta} + \bar{Q}) = \beta' (\bar{\alpha} \beta u + \bar{Q}) = \beta' \bar{\alpha} \beta u + \beta' \bar{Q}$$

o sea, en definitiva:

$$F = k u + Q \quad (23)$$

con las notaciones:

$$k = \beta' \bar{\alpha} \beta \quad (24)$$

$$Q = \beta' \bar{Q} \quad (25)$$

La fórmula (24) nos permite calcular la matriz de rigidez de la estructura global en función de las matrices ya obtenidas $\bar{\alpha}$ y β .

Claro que el producto matricial de la fórmula 24 lo hará el computador electrónico.

En el ejemplo de la figura 7 habría que multiplicar tres matrices cuyas dimensiones son:

$$(54 \times 144) \quad (144 \times 144) \quad (144 \times 54)$$

y así se obtiene la matriz de rigidez k de la estructura con sus 54 filas y sus 54 columnas.

No podemos explicar con detalle el aspecto matemático del proceso, pero diremos que no hace falta multiplicar esas matrices, pues la forma peculiarísima de β permite obtener la matriz k de muchas maneras ingeniosísimas que expondremos en otra ocasión.

Una de ellas se basa en recordar que todo término de cualquier matriz elemental α_h pertenece a una cierta fila y a una cierta columna de k .

Bastará, pues, colocar ese término en el lugar correspondiente del cuadro preparado para k e ir sumando los términos a medida que vayan llegando a sus posiciones respectivas. Análoga consideración, aunque más simplificada, nos permitirá obtener la matriz columna Q , producto de β' y \bar{Q} .

Hasta el momento actual la máquina ha realizado un trabajo sencillo y rápido para sus posibilidades, aunque sería abrumador para un ingeniero.

Todo lo que queda por hacer puede resumirse en pocas palabras, y sin embargo, es lo que exigirá más trabajo de máquina, pues se trata de invertir una matriz de orden casi siempre muy respetable.

Volvamos a la fórmula fundamental núm. 23. Supongamos que la computadora tiene almacenada en memoria la matriz k .

Para cada hipótesis de carga, la matriz F se compone de dos sumandos:

1.º Cargas externas aplicadas directamente en los nudos (F_d).

2.º Cargas nodales equivalentes a las cargas intermedias (F_e), siendo:

$$F = F_d + F_e \quad (26)$$

Para no complicar la exposición prescindimos de las sobrecargas dinámicas y de los efectos vibratorios que también pueden procesarse y cuya importancia es capital en las estructuras aeronáuticas, en el caso de construcciones en zonas sísmicas, ondas explosivas, y en general, cuando las cargas solicitantes son funciones del tiempo y permiten plantear una ecuación diferencial matricial de segundo orden en los desplazamientos u , e incluso calcular las frecuencias naturales y los modos de oscilación propios de la estructura.

Obsérvese que en F_d se incluyen las reacciones desconocidas en los nudos coartados.

Por tanto, el sistema (23) nos permitirá calcular todos los desplazamientos nodales, en función de los cuales se obtendrán directa e inmediatamente todas las restantes incógnitas del problema.

Parece, a primera vista, que podríamos utilizar la fórmula:

$$u = k^{-1} (F - Q) \quad (27)$$

consecuencia de (23), pero como entre las filas de F existen ciertas relaciones lineales, obtenidas al expresar las condiciones de equilibrio estático entre fuerzas activas y reacciones, resulta que la matriz k es singular y no existe su inversa k^{-1} .

Lo que procede es particionar todas las matrices que figuran en la ecuación 27, considerando, por un lado, los desplazamientos libres y, por otro, los desplazamientos coartados.

Así, en la estructura (fig. 7) tendríamos:

$$u^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{30} \end{pmatrix} \quad u^o = \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ \vdots \\ u_{64} \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u^* \\ u^o \end{pmatrix} \quad (28)$$

Empleando notaciones análogas con los restantes elementos tendremos la ecuación:

$$\begin{pmatrix} F^* - Q^* \\ F^o - Q^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* \\ u^o \end{pmatrix} \quad (29)$$

siendo:

$$k_{11} = \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,30} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{30,1} & k_{30,2} & \dots & k_{30,30} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$k_{12} = \begin{pmatrix} k_{1,31} & \dots & k_{1,54} \\ k_{2,31} & \dots & k_{2,54} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{54,1} & \dots & k_{54,54} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$k_{21} = k'_{12} \quad (32)$$

$$k_{22} = \begin{pmatrix} k_{31,31} & \dots & k_{31,54} \\ k_{32,31} & \dots & k_{32,54} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{54,31} & \dots & k_{54,54} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Por consiguiente:

$$F^* - Q^* = k_{11} u^* + k_{12} u^o \quad (34)$$

$$F^o - Q^o = k_{21} u^* + k_{22} u^o \quad (35)$$

Como cualquier desplazamiento no libre se supone totalmente coartado (o al menos conocido) tendremos:

$$u^o = 0 \quad (36)$$

por tanto, los desplazamientos totalmente libres valen:

$$u^* = k_{11}^{-1} (F^* - Q^*) \quad (37)$$

y las reacciones de sustentación son:

$$F^o - Q^o = k_{21} k_{11}^{-1} (F^* - Q^*) \quad (38)$$

Si la estructura no degenera en una cadena cinemática deformable, estamos seguros de que k_{11} no es matriz singular y, por tanto, posee matriz inversa.

Obsérvese que una vez calculadas las submatrices k_{11}^{-1} y k_{12} ellas son válidas cualesquiera que sean las hipótesis de carga y térmicas, lo cual es una enorme ventaja del método.

El cálculo de las deformaciones internas se obtiene de la ecuación:

$$\bar{\delta} = \beta u \quad (39)$$

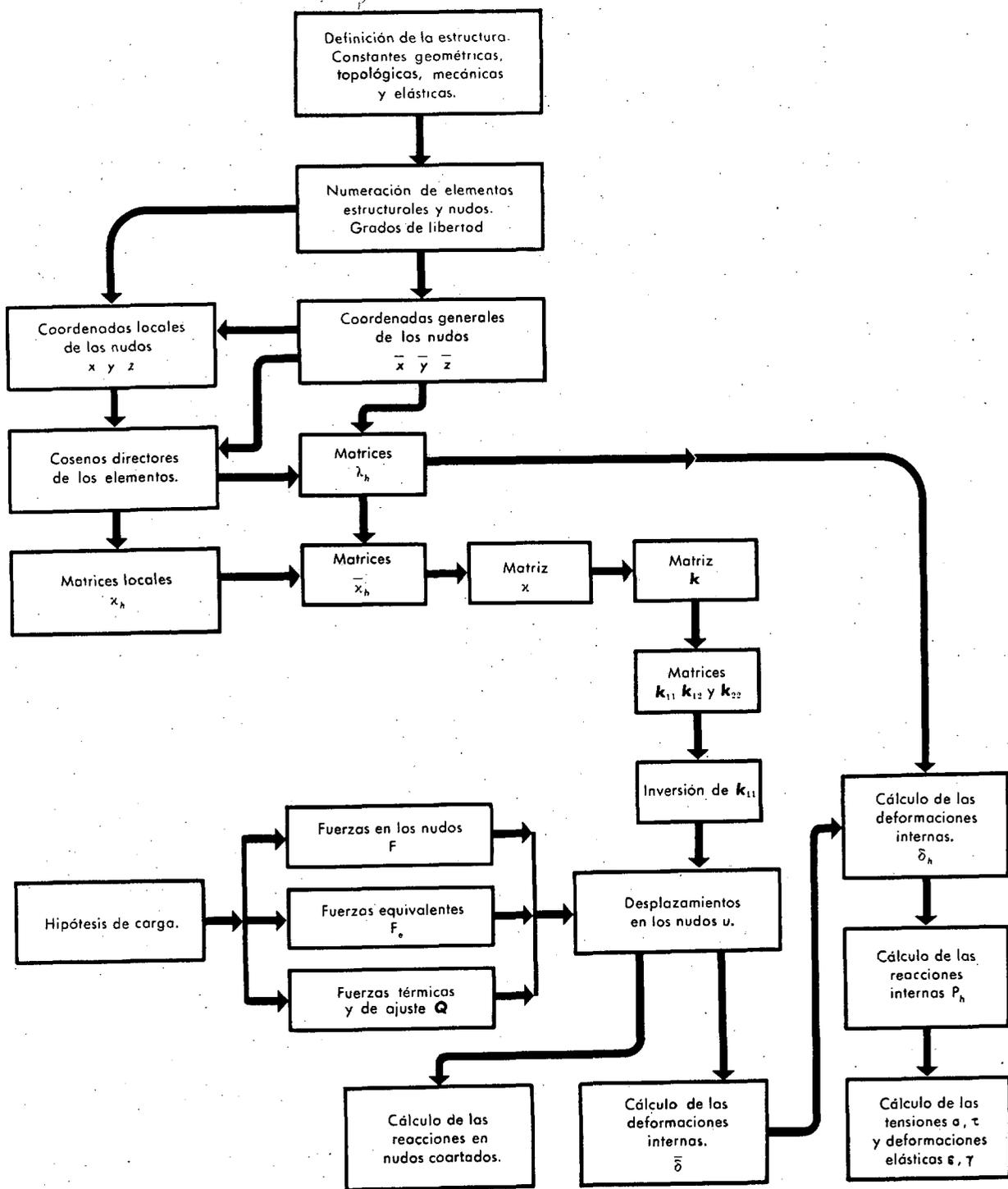
y las fuerzas internas se obtienen mediante:

$$\bar{p} = \bar{\alpha} \bar{\delta} \quad (40)$$

de donde proceden las m ecuaciones:

$$\bar{p}_h = \bar{\alpha}_h \bar{\delta}_h \quad (41)$$

Para obtener sus componentes en coordenadas locales de cada barra, es decir, P_h y δ_h , se harán los cambios de coordenadas (14) y (15).



PAGE 9

```
C
35 IBAR=NB
WRITE(12,IBAR)NB,(L(I),I=1,4),FL,R1IC
C
C LOS DATOS GEOMETRICOS SE HAN PASADO EL FICHERO 12
C
IF(IMU-NB)20,3,20
20 WRITE(ID,102)MU,NB
102 FORMAT(1H,'DEBIA LEER LA BARRA',I5,' Y LEE LA',I5)
CALL EXIT
3 F2= 2.*R1ICNFL
F1= 2.*F2
F3= 3.*F2RFL
F4=-F3
F5= F1
F6= F3
F7= F4
F8= 2.*F3RFL
F9=-F8
F10=F8
101 FORMAT(5I3,5X,2F10.2)
C
DO 12 I=1,4
LIK = L(I)
IF( LIK ) 20,12,606
606 LM = MATR ( LIK )
LJ = JUNC( I )
DO 12 J=1,4
LKJ =L( J )
IF( LKJ ) 20,12,707
707 IF( LKJ-LIK )709,708,708
709 LIJ=MATR( LKJ )+ LIK
GO TO 710
708 LIJ=LM + LKJ
710 LI =LJ + J
R(LIJ)= R(LIJ) +F(LI)
12 CONTINUE
C
C ESTO SE HACE PARA CADA BARRA
C
99 CONTINUE
WRITE(ID,6666)
WRITE(ID,304)
304 FORMAT(1H,'***** DATOS DE CARGAS EN LAS BARRAS *****',R)
303 FORMAT(1H0,'HIPOTESIS BARRA T.CARGA PARAMETRO 1 PARAMETRO 2 P
PARAMETRO 3 PARAMETRO 4',R)
WRITE(ID,303)
LW=0
C
C UNA VEZ FORMADA LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA
C ESTRUCTURA SE LEEN LAS CARGAS Y SE CALCULAN
C LOS VALORES DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO
IEMP=0
49 READ(11,107)NHIP,NB,KT,D1,D2,D3,D4
107 FORMAT(3I3,11X,4F10.3)
WRITE(ID,4002)NHIP,NB,KT,D1,D2,D3,D4
```

Figura 8.

Fragmento de un programa FORTRAN utilizado en el cálculo de estructuras reticulares.

Conociendo las reacciones internas en los extremos de cada barra de directriz rectilínea y sección constante, el cálculo de los tensores elásticos y de deformación en cualquier punto no ofrece dificultad.

CONCLUSION

En las páginas precedentes hemos intentado exponer con la máxima claridad posible, dentro del limitado espacio que suele asignarse a un artículo de revista, la esencia del método de la rigidez tal y como lo aplica el Gabinete de Cálculo para mecanizar el estudio de una estructura de cualquiera de los seis tipos anteriormente citados.

El adjunto organigrama ofrece una síntesis del proceso, cuyo rigor científico queda perfectamente establecido con los recursos teóricos que se han utilizado.

Codificar las instrucciones en un lenguaje aceptado por la máquina requiere conocimientos de programación.

Así se obtienen programas que el Gabinete de Cálculo posee y aplica. Ningún método tradicional ejecutado manualmente puede darnos mayor exactitud. Si la estructura presenta alguna complejidad y el cálculo a mano se hace prácticamente inabordable, será preciso recurrir al computador electrónico.

De este modo, los resultados se obtienen con máxima rapidez y máxima economía. Su exactitud queda garantizada mediante criterios de comprobación que permiten contrastar los valores numéricos finales.

Incluso estructuras que, por el número de nudos y barras, exceden la capacidad de memoria de un computador, pueden ser estudiadas por el método de la rigidez, descomponiéndolas en subestructuras elementales, haciendo el estudio separado de cada una y procediendo al ensamblaje final de los resultados parciales.

La mecanización del cálculo de estructuras reticulares es al mismo tiempo una realidad, un gran triunfo y una mayor promesa de la moderna ingeniería gracias a la conjunción de las teorías clásicas del siglo XIX y de los computadores electrónicos nacidos en nuestros días.

Ningún Ingeniero puede subestimar la trascendencia de este suceso.