

HORMIGON ARMADO: ABACOS PARA EL CALCULO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A COMPRESION COMPUESTA Y A FLEXION COMPUESTA

Por FRANCISCO RUIZ GARCIA
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

El autor ha encontrado unas relaciones lineales entre los esfuerzos a que están sometidas las secciones y las características geométricas y tensionales de las mismas. Estas relaciones lineales permiten la construcción de ábacos — en forma de haces de rectas — de fácil manejo y extrapolación, con los que se logra una determinación inmediata de cuándo las secciones están sometidas a compresión compuesta y cuándo a flexión compuesta. La parte primera ("Abacos para la compresión compuesta") se incluye a continuación. En el próximo número se incluirán las partes segunda ("Abacos para la flexión compuesta") y tercera ("Juicio crítico y consideraciones sobre el uso de los ábacos").

1. ABACOS PARA LA COMPRESION COMPUESTA

A) HIPOTESIS:

- 1.ª: Ley de Hooke de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones.
- 2.ª: Hipótesis de Navier de conservación de las secciones planas.
- 3.ª: Relación entre el módulo de elasticidad del acero y del hormigón igual a 15.
- 4.ª: Igual revestimiento para las dos armaduras.

B) NOTACIONES EMPLEADAS:

- a = recubrimiento de las armaduras.
 b = ancho de la sección.
 c = canto total de la sección.
 $h = c - a$ = canto útil si la sección estuviera sometida a flexión.
 n = relación entre el módulo de elasticidad del acero y el del hormigón = 15.
 r' = relación de σ_H a 60 Kg./cm.².
 x = distancia desde el eje geométrico de la pieza a la fibra neutra.

F_a = sección de la armadura menos comprimida.

F'_a = sección de la armadura más comprimida.

K = relación $\sigma'_A / \sigma_H \times n$.

M = momento solicitante referido al eje geométrico de la pieza.

M_s = valor de $M/b \times h$.

N = fuerza axial solicitante.

N_s = valor de $N/b \times h$.

α = relación F_a / F'_a .

δ = relación a/h .

γ = valor de $\frac{F_a \cdot 100}{b \times h}$.

σ_A = tensión del acero menos comprimido.

σ'_A = tensión del acero más comprimido.

σ_H = máxima tensión de compresión en el hormigón.

σ_{H2} = mínima tensión de compresión en el hormigón.

φ_1 = haz de rectas que da los valores de γ en función de N_s y de σ'_A .

φ_2 = haz de rectas que da los valores de $\frac{M_s}{h}$ en función de N_s y de σ'_A .

C) CALCULO:

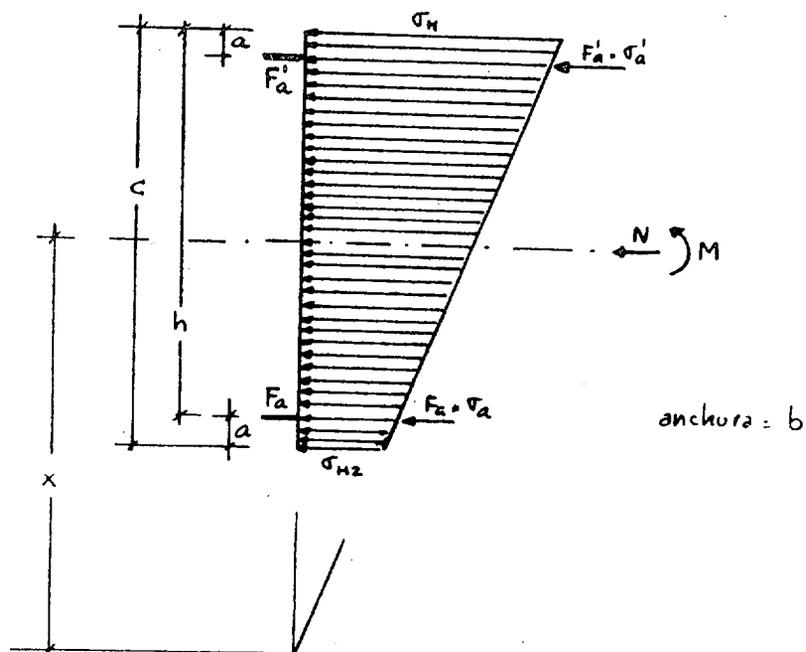


Figura 1.

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$N = \frac{\sigma_H + \sigma_{H2}}{2} \cdot c \cdot b + F'_a \cdot \sigma'_a + F_a \cdot \sigma_a \quad (1)$$

y

$$M = \frac{\sigma_H + \sigma_{H2}}{2} \cdot c \cdot b \left[\frac{c}{3} \cdot \frac{2\sigma_H + \sigma_{H2}}{\sigma_H + \sigma_{H2}} - \frac{c}{2} \right] + F'_a \cdot \sigma'_a \left[\frac{c}{2} - a \right] - F_a \cdot \sigma_a \left[h - \frac{c}{2} \right] \quad (2)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\sigma_{H2} = \frac{2x - c}{2x + c} \cdot \sigma_H \quad (3)$$

$$\sigma_A = \frac{2x - c + 2a}{2x + c} \cdot \sigma_H \cdot n \quad (4)$$

$$\sigma'_A = \frac{2x + c - 2a}{2x + c} \cdot \sigma_H \cdot n \quad (5)$$

y

$$F_a = a \cdot F'_a \quad (6)$$

el sistema (1) y (2) queda:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{\sigma_H} &= \frac{2x}{2x+c} \cdot c \cdot b + F'_a \cdot \frac{2x+c-2a}{2x+c} n + \alpha \cdot F'_a \cdot \frac{2x-c+2a}{2x+c} \cdot n \\ \frac{M}{\sigma_H} &= \frac{c^3}{12x+6c} \cdot b + F'_a \cdot \frac{2x+c-2a}{2x+c} n \left[\frac{c}{2} - a \right] - \alpha \cdot F'_a \cdot n \cdot \frac{2x-c+2a}{2x+c} \left[h - \frac{c}{2} \right] \end{aligned} \right\} (7)$$

Introducimos ahora la nueva variable

$$\gamma = \frac{F'_a}{b \cdot h} \cdot 100 \quad (8)$$

Y, teniendo en cuenta que de la ecuación (5) se obtiene

$$\frac{\sigma'_a}{n \cdot \sigma_H} = \frac{2x+c-2a}{2x+c} \quad (9)$$

si llamamos

$$K = \frac{\sigma'_a}{n \cdot \sigma_H} \quad (10)$$

queda:

$$x = \frac{2a-c(1-k)}{2(1-k)} \quad (11)$$

Entrando con (8) y (11) en el sistema (7) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{\sigma_H} &= \frac{c \cdot b}{2} \left[1 + \frac{a-c(1-K)}{a} \right] + \gamma \frac{b \cdot h}{100} \cdot K \cdot n + \gamma \frac{b \cdot h}{100} \cdot \alpha \cdot \frac{a-h(1-K)}{a} \cdot n \\ \frac{M}{\sigma_H} &= \frac{c^3 \cdot b \cdot (1-K)}{12 \cdot a} + \gamma \frac{b \cdot h}{100} \cdot K \cdot n \left[\frac{c}{2} - a \right] - \gamma \frac{b \cdot h}{100} \cdot \alpha \cdot \frac{a-h(1-K)}{a} \cdot n \left[h - \frac{c}{2} \right] \end{aligned} \right\} (12)$$

Dividiendo por $b \cdot h$ y llamando

$$N_s = \frac{N}{b \cdot h} \quad (13)$$

$$M_s = \frac{M}{b \cdot h} \quad (14)$$

tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N_s}{\sigma_H} &= \frac{2a - (a+h)(1-K)}{a} \cdot \frac{h+a}{2h} + \frac{\gamma \cdot n}{100} \left[K + \alpha \frac{a-h(1-K)}{a} \right] \\ \frac{M_s}{\sigma_H} &= \frac{a}{h} \cdot \frac{a}{12} \left[1 + \frac{h}{a} \right]^3 (1-K) + \frac{\gamma \cdot n}{100} \left[K \left(\frac{c}{2} - a \right) - \alpha \frac{a-h(1-K)}{a} \left(h - \frac{c}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\} (15)$$

que puede ser puesto de la siguiente forma, teniendo en cuenta que $c = a + h$:

$$\gamma = \frac{\frac{N_s}{\sigma_H} - \frac{1 + \frac{\alpha}{h}}{2} \left[2 - \left(1 + \frac{h}{\alpha} \right) (1 - K) \right]}{n \left[K + \alpha \left[1 - \frac{h}{\alpha} (1 - K) \right] \right]} \times 100 \quad (16)$$

$$\frac{M_s}{h} = \sigma_H \cdot \frac{\alpha^2}{12 \cdot h^2} \left[1 + \frac{h}{\alpha} \right]^3 (1 - K) + \frac{\gamma \cdot n \cdot \sigma_H}{100} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{h}}{2} \left[K - \alpha \left(1 - \frac{1 - K}{\frac{\alpha}{h}} \right) \right]$$

Se consideran como constantes $n = 15$ y $\sigma_H = 60$ Kg./cm.², con lo que $K = \sigma'_a/900$ y entonces (16) son ecuaciones del tipo:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \Phi_1 \left[\sigma'_a, N_s, \alpha, \frac{\alpha}{h} \right] \\ \frac{M_s}{h} &= \Phi_2 \left[\sigma'_a, \alpha, \frac{\alpha}{h}, \gamma \right] = \Phi_3 \left[\sigma'_a, N_s, \alpha, \frac{\alpha}{h} \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

y, al fijar los valores de los parámetros $\delta = \frac{\alpha}{h}$ y α , quedarán ambas expresiones de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \varphi_1 (\sigma'_a, N_s) \\ \frac{M_s}{h} &= \varphi_2 (\sigma'_a, N_s) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ambas expresiones, φ_1 y φ_2 , son dos haces de rectas cuyo parámetro es σ'_a .

Los ábacos se construyen para valores de $\delta = \frac{\alpha}{h} = 0,08, 0,10, 0,12$ y $0,14$, y por cada uno de estos valores se hace $\alpha = 0,50, 0,75$ y $1,00$.

En cada uno de los ábacos se marca con una línea de trazos un valor crítico para σ'_a . Este valor crítico es aquél por debajo del cual la sección ya no se encuentra sometida a compresión compuesta, sino a flexión compuesta. En efecto, este supuesto se da cuando la tensión σ_{H2} (ver fig. 1) es mayor que 0,00, entonces tenemos:

Introduciendo el valor (11) en la ecuación (3) queda:

$$\sigma_{H2} = \frac{\alpha - c(1 - K)}{\alpha} \cdot \sigma_H \quad (19)$$

$$\sigma_{H2} \leq 0 \Rightarrow \alpha - c(1 - K) \leq 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{c} \leq 1 - K$$

y como $K = \sigma'_a/n \cdot \sigma_H$ queda:

$$\frac{\sigma'_a}{n \cdot \sigma_H} \leq 1 - \frac{\alpha}{c} = \frac{h}{\alpha + h} \quad (20)$$

Teniendo en cuenta que $n = 15$, $\sigma_H = 60$ Kg./cm.² y $\frac{\alpha}{h} = \delta$, la desigualdad la podemos poner de la forma:

$$\boxed{\sigma'_a \leq \frac{900}{1 + \delta} \text{ kg. / cm.}^2} \quad (21)$$

D) USO DE LOS ABACOS:

Caso 1.º. — Datos: M, N, b, h, α y $\frac{\alpha}{h} = \delta$; $\sigma_H = 60 \text{ Kg./cm.}^2$.

Incógnitas: F'_a y σ'_a .

Operaciones preliminares:

$$\left. \begin{aligned} N_s &= \frac{N}{b \cdot h} \\ M_s &= \frac{M}{b \cdot h} \end{aligned} \right\} \text{siendo } [b] = [h] = \text{cm.} ; [N] = \text{kg.} \text{ y } [M] = \text{cm.} \times \text{kg.} :$$

se obtiene el valor de $\frac{M_s}{h}$, cuyas dimensiones son Kg./cm.^2 .

Abaco:

Se define el punto de abscisa $\frac{M_s}{h}$ y de ordenada N_s , que nos da, sobre la recta del haz φ_2 que pasa por él, el valor de σ'_a medido en Kg./cm.^2 .

1.º Si este valor de σ'_a es inferior al crítico (se encuentra por debajo de la línea de trazos), se pueden hacer dos cosas: modificar los valores de α y de δ hasta encontrar unos — si es que existen — que nos den un valor de σ'_a superior al crítico, o bien abandonar estos ábacos y trabajar con los de la flexión compuesta.

2.º Si este valor de σ'_a es superior al crítico (se encuentra por encima de la línea de trazos) continuamos de la siguiente forma:

La intersección de la ordenada N_s con la recta del haz φ_1 de valor σ'_a igual al obtenido anteriormente nos define en abscisas el valor de γ .

Tenemos así:

$$F'_a = \gamma \cdot \frac{b \cdot h}{100} \text{ cm.}^2 \quad \text{siendo } [b] = [h] = \text{cm.}$$

y

$$F_a = \alpha \cdot F'_a \text{ cm.}^2$$

Ejemplo:

Datos:

$$M = 3750 \text{ m. kg.} = 375000 \text{ cm. kg.}$$

$$N = 86200 \text{ kg.}$$

$$b = 30 \text{ cm.}$$

$$h = 50 \text{ cm.}$$

$$\alpha = 0,50$$

$$\alpha = 5 \text{ cm.} \implies \delta = \frac{\alpha}{h} = 0,10$$

$$\sigma_H = 60 \text{ kg./cm.}$$

$$c = h + \alpha = 55 \text{ cm.}$$

Operaciones preliminares:

$$N_s = \frac{86200}{30 \times 50} = 57,5 ; \quad M_s = \frac{375000}{30 \times 50} = 250 ; \quad \frac{M_s}{h} = \frac{250}{50} = 5,0$$

Abaco: En el ábaco $\delta = 0,10$ y $\alpha = 0,50$ para $N_s = 57,5$ y $\frac{M_s}{h} = 5,0$ encontramos en el haz φ_2 el valor de $\sigma'_a = 860$ Kg./cm.², superior al crítico ($\sigma'_a = 818$). En el haz φ_1 la abscisa del punto de ordenada $N_s = 57,5$ sobre la recta $\sigma'_a = 860$ Kg./cm.² vale $\gamma = 0,73$.

Tenemos:

$$F'_a = 0,73 \cdot \frac{30 \times 50}{100} = 10,95 \text{ cm.}^2$$

$$F_a = \alpha \cdot F'_a = 0,50 \times 10,95 = 5,475 \text{ cm.}^2$$

$$K = \frac{\sigma_a}{h \cdot \sigma_H} = \frac{860}{15 \times 60} = 0,945 \Rightarrow x = \frac{2 \times \alpha - c(1 - K)}{2(1 - K)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 5 - 55 \cdot (1 - 0,945)}{2(1 - 0,945)} = 63,6 \text{ cm.}$$

Caso 2.º. — Datos: M , N , b , h , α y δ , con $\sigma_H \neq 60$ Kg./cm.².

Incógnitas: F'_a y σ'_a .

Cálculo: Las ecuaciones (16) se pueden escribir (una vez fijos α y δ)

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{\frac{N_s}{\sigma_H} - f_1(K)}{f_2(K)} \\ \frac{M_s}{h} &= \sigma_H \cdot f_3(K, \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

para las cuales están preparados los ábacos siempre que $\sigma_H = 60$ Kg./cm.² y, por tanto, $K = \frac{\sigma'_a}{n \cdot \sigma_H} = \frac{\sigma'_a}{900}$.

Sea ahora $\sigma_H \neq 60$ Kg./cm.² y llamemos $r = \frac{\sigma_H}{60}$. Entonces (22) lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{\frac{N_s}{r} \cdot \frac{1}{\sigma_H/r} - f_1(K)}{f_2(K)} \\ \frac{M_s}{h} \cdot \frac{1}{r} &= \frac{\sigma_H}{r} \cdot f_3(K, \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Y si ahora llamamos:

$$(\sigma'_a)_1 = \frac{\sigma'_a}{r}; \quad (M_s)_1 = \frac{M_s}{r} \quad \text{y} \quad (N_s)_1 = \frac{N_s}{r}$$

(23) lo podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{\frac{(N_s)_1}{60} - f_1(K)}{f_2(K)} \\ \frac{(M_s)_1}{h} &= 60 \cdot f_3(K, \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

donde K puede ser puesto de la siguiente forma:

$$K = \frac{\sigma'_a/r}{n \cdot \sigma_H/r} = \frac{\sigma'_a/r}{n \cdot 60} = \frac{(\sigma'_a)_1}{900}$$

De forma que el sistema (24) es exactamente igual a (22) y son válidos los ábacos existentes sin más que en vez de los valores σ'_a , M_s y N_s , usemos los que hemos llamado $(\sigma'_a)_1$, $(M_s)_1$ y $(N_s)_1$.

En lo que se refiere al valor crítico de σ'_a , la ecuación (20) puede ser puesta de la forma:

$$\frac{\sigma'_a}{r} \leq n \cdot \frac{\sigma_H}{r} \cdot \frac{1}{1+\delta} \quad \Rightarrow \quad (\sigma'_a)_1 \leq \frac{900}{1+\delta} \quad (25)$$

que es igual que (21), sólo que tomando $(\sigma'_a)_1$ en vez de σ'_a .

Operaciones preliminares:

$$r = \frac{\sigma_H}{60}$$

$$N_s = N/b \times h \quad \Rightarrow \quad (N_s)_1 = N_s/r$$

$$M_s = M/b \times h \quad \Rightarrow \quad (M_s)_1 = M_s/r \quad \Rightarrow \quad \frac{(M_s)_1}{h}$$

Abaco: Igual que en el caso 1.º, entramos en el ábaco con los valores $(N_s)_1$ y $(M_s)_1/h$ que da el valor de $(\sigma'_a)_1$.

Si $(\sigma'_a)_1$ está por debajo de la línea de trazos, lo que ocurre en realidad es que el verdadero valor $\sigma'_a = (\sigma'_a)_1 \times r$ es inferior al crítico, que vale $n \cdot \sigma_H / (1 + \delta)$, aunque no sea necesario conocerlo, pues ya hemos visto que (25) da una relación inmediata entre el valor crítico real y el ficticio.

De igual forma que lo expuesto en el primer caso, obtenemos el valor de γ . De forma que tenemos al final:

$$\sigma'_a = (\sigma'_a)_1 \times r$$

$$F'_a = \gamma \cdot \frac{b \cdot h}{100} \text{ cm.}^2 \quad \text{y} \quad F_a = \alpha \cdot F'_a \text{ cm.}^2$$

En este caso el límite superior de σ'_a no es 900 Kg./cm.², sino $15 \cdot \sigma_H$. Naturalmente, $15 \cdot \sigma_H = 15 \cdot r \cdot 60 = 900 \times r$. O, lo que es lo mismo, ha de ser $(\sigma'_a)_1 < 900 \text{ Kg./cm.}^2$.

Ejemplo:

Igual que antes, con $\sigma_H = 70 \text{ Kg./cm.}^2$.

Operaciones preliminares:

$$r = \frac{70}{60} = 1,165$$

$$N_s = 57,5 \quad \Rightarrow \quad (N_s)_1 = \frac{57,5}{1,165} = 49,4$$

$$M_s = 250 \quad \Rightarrow \quad (M_s)_1 = \frac{250}{1,165} = 214,5 \quad \Rightarrow \quad \frac{(M_s)_1}{h} = \frac{214,5}{50} = 4,29$$

Abaco: Con $(N_s)_1 = 49,4$ y $(M_s)_1/h = 4,29$, encontramos en el haz φ_2 el valor de $(\sigma'_a)_1 = 852 \text{ Kg./cm.}^2$, superior al crítico ($\sigma'_a = 818$). En el haz φ_1 obtenemos $\gamma = 0,32$.

Por tanto:

$$\sigma'_a = 852 \times 1,165 = 992 \text{ Kg./cm.}^2$$

$$F'_a = 0,32 \cdot \frac{30 \times 50}{100} = 4,80 \text{ cm.}^2 \Rightarrow F_a = 0,50 \times 4,80 = 2,40 \text{ cm.}^2$$

$$K = \frac{(\sigma'_a)_1}{900} = \frac{852}{900} = 0,946$$

Luego:

$$x = \frac{2 \cdot a - c(1 - K)}{2(1 - K)} = \frac{2 \cdot 5 - 55 \cdot (1 - 0,946)}{2(1 - 0,946)} = 62,8 \text{ cm.}$$

Caso 3.º. — Datos: M , N , b , h , α , δ y F'_a .

Incógnitas: σ_H y σ'_a .

Cálculo: Como $\frac{N_s}{M_s} = \frac{(N_s)_1}{(M_s)_1} = \lambda \equiv \text{constante}$, la ecuación $N_s = \lambda \cdot$

M_s/h es una recta que pasa por el origen. Por otra parte, el valor de $\gamma = \frac{F'_a}{b \cdot h} \cdot 100$ define una recta vertical.

Abaco: Es necesario proceder por tanteos. Hay que encontrar un valor de $(N_s)_1$ — ordenada — que corte a la recta γ en un punto del haz φ_1 cuyo valor de σ'_a sea el mismo que el correspondiente al punto del haz φ_2 en que esa misma ordenada tanteada corta a la recta $N_s = \lambda \cdot M_s/h$.

Encontrado ya ese $(N_s)_1$, como conocemos el verdadero valor de N_s tenemos: $\frac{(N_s)_1}{N_s} = \frac{1}{r}$, y entonces: $\sigma'_a = r \cdot (\sigma'_a)_1$ y $\sigma_H = r \cdot 60 \text{ ki-}$

logramos/cm.², donde $(\sigma'_a)_1$ es el valor auxiliar que ha sido usado en el ábaco. Igual que en el segundo caso, si $(\sigma'_a)_1$ es inferior al valor crítico, hay que pasar a la flexión compuesta.

Ejemplo:

Datos:

$$M = 3750 \text{ m.} \times \text{Kg.} = 375\,000 \text{ cm. Kg.}$$

$$N = 86\,200 \text{ Kg.}$$

$$b = 30 \text{ cm.; } h = 50 \text{ cm.; } a = 5 \text{ cm.; } \Rightarrow \delta = \frac{a}{h} = 0,10$$

$$c = a + h = 55 \text{ cm.}$$

$$\alpha = 0,50$$

$$F'_a = 15,0 \text{ cm.}^2$$

Operaciones preliminares:

$$N_s = \frac{86\,200}{30 \times 50} = 57,5 \quad ; \quad M_s = \frac{375\,000}{30 \times 50} = 250$$

$$\frac{M_s}{h} = \frac{250}{50} = 5,0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{N_s}{M_s/h} = \frac{57,5}{5,0} = 11,5 \quad \gamma = F'_a \cdot \frac{100}{30 \times 50} = 1,00$$

Abaco:

Se ha encontrado un valor de $(N_s)_1 = 55,0$ Kg./cm.² para el cual su intersección con $\gamma = 1,00$ sobre el haz φ_1 da un valor de $(\sigma'_a)_1 = 848$ Kg./cm.² — que es el mismo que el que corresponde a su intersección con la recta $N_s = 11,5 \times M_s/h$ sobre el haz φ_2 . [$(M_s)_1/h = 4,78$].

Así, pues:

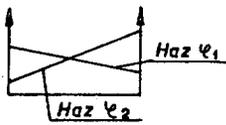
$$1/r = \frac{55,0}{57,5} = \frac{4,78}{5,00} = 0,956 \quad ; \quad r = 1,045$$

Luego:

$$\sigma'_a = 1,045 \times 848 = 886 \quad \text{Kg./cm.}^2$$

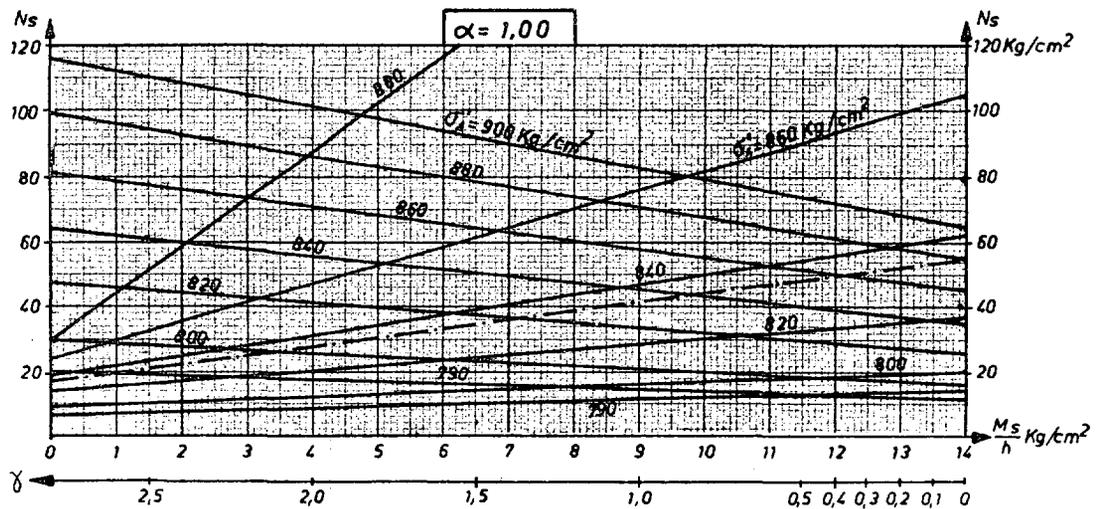
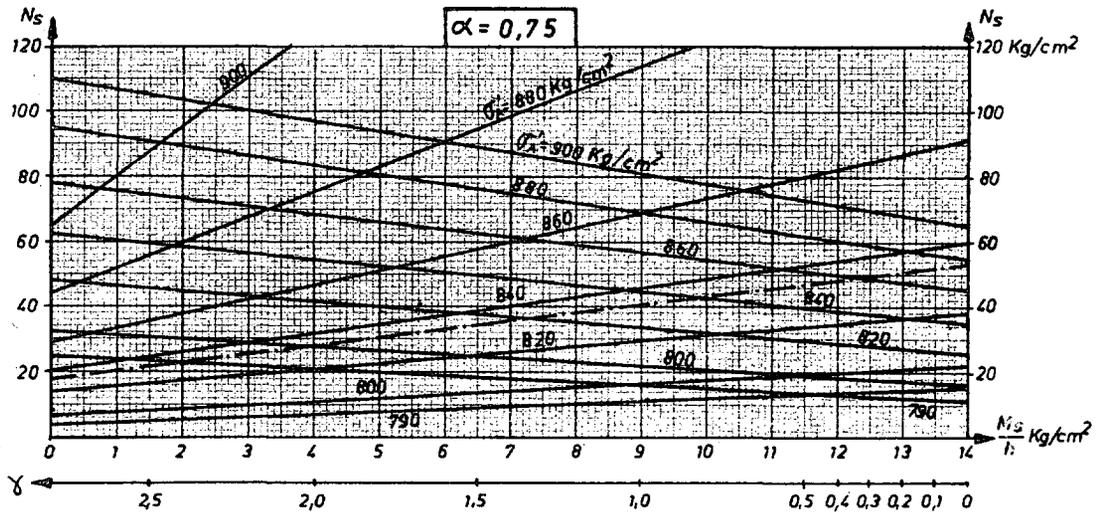
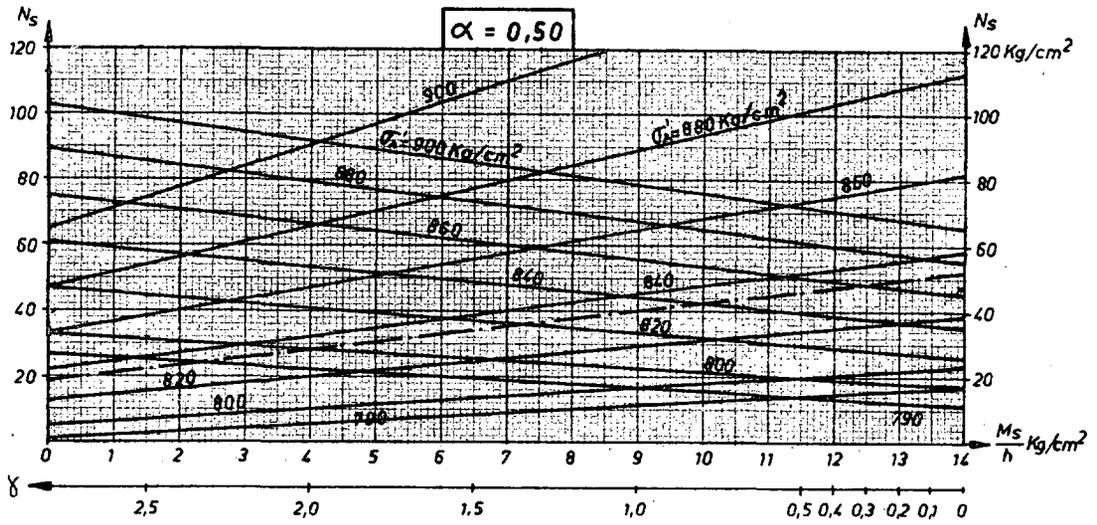
$$\sigma_{H1} = 1,045 \times 60 = 62,6 \quad \text{Kg./cm.}^2$$

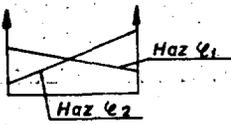
(El valor de $(\sigma'_a)_1$ es superior al crítico — 818,0 —, luego el uso del ábaco de compresión compuesta ha sido correcto.)



$$\delta = 0,08$$

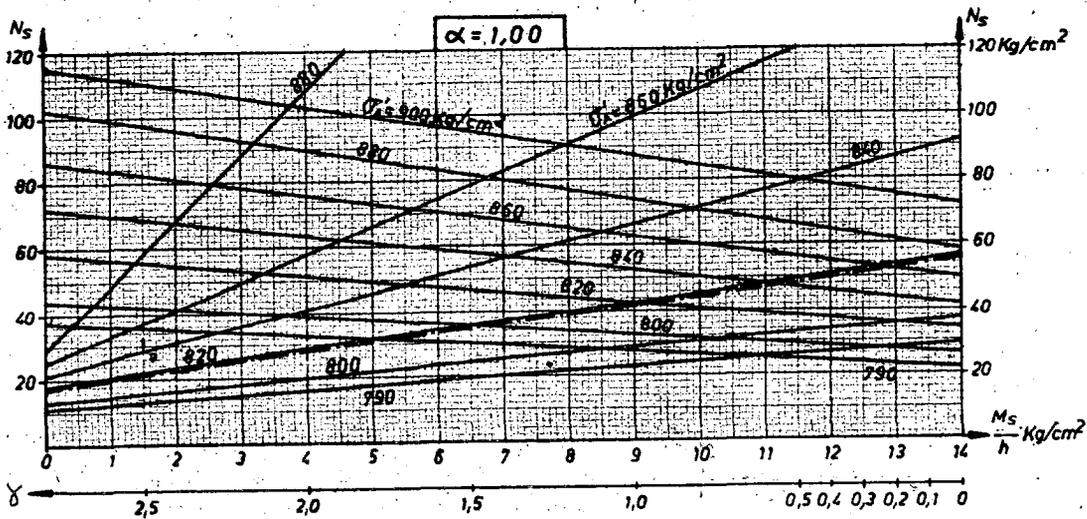
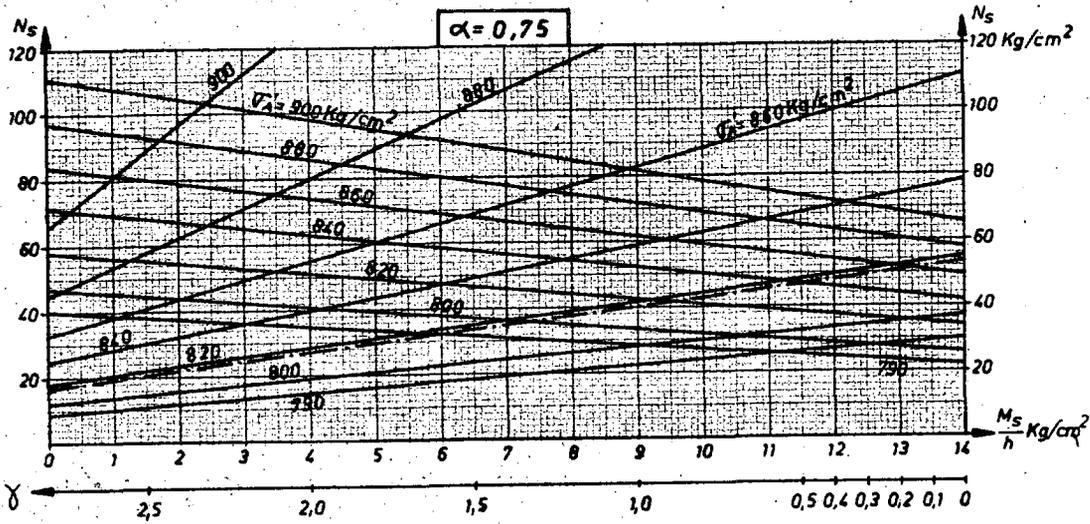
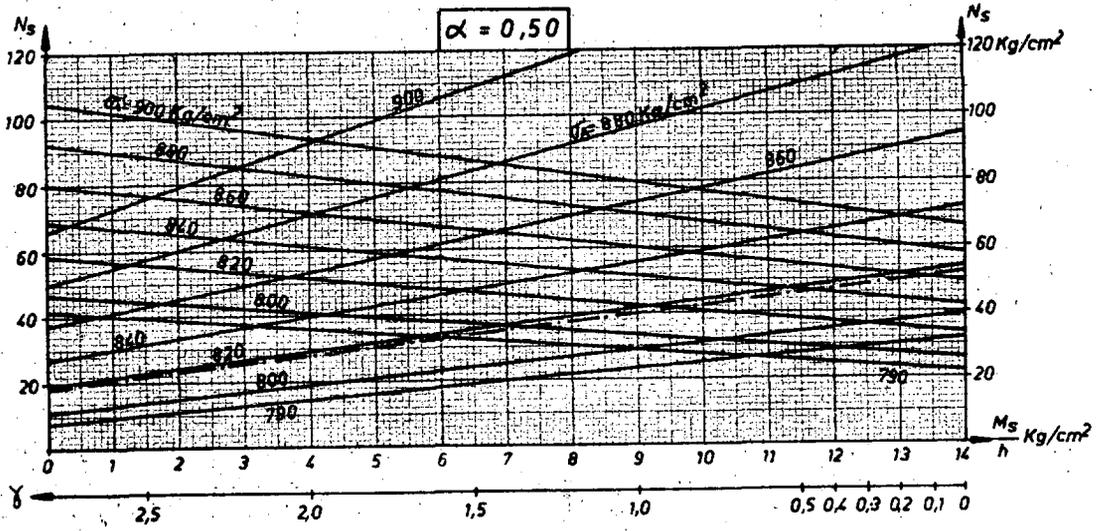
$$(\sigma'_A)_{critico} = \text{---} = 834 \text{ Kg/cm}^2$$

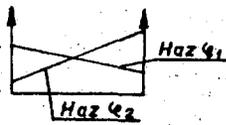




$\delta = 0,10$

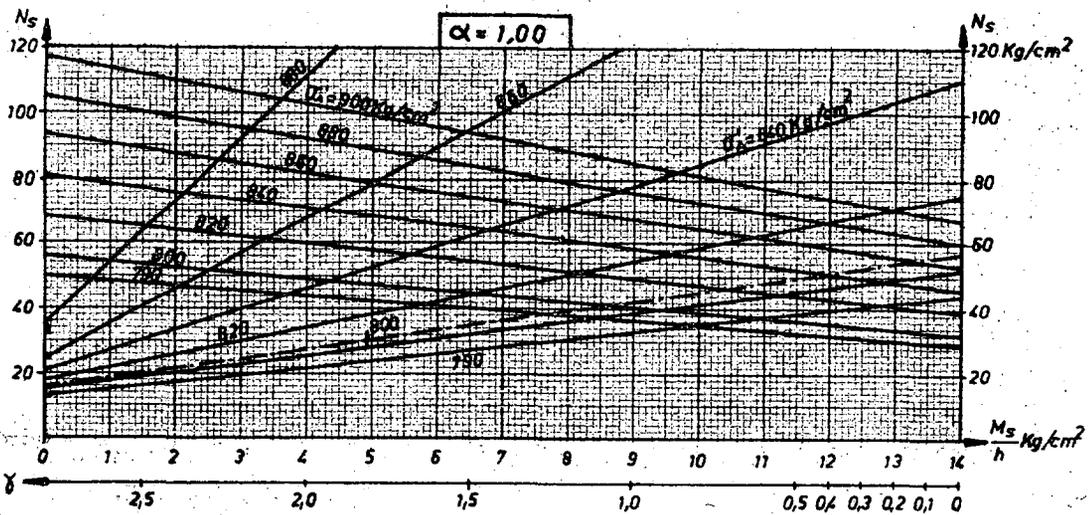
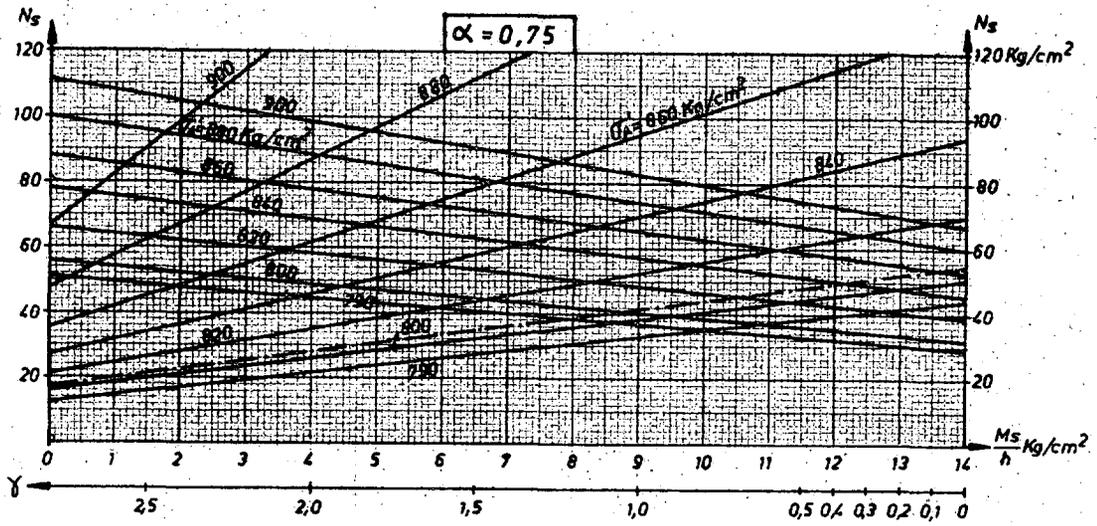
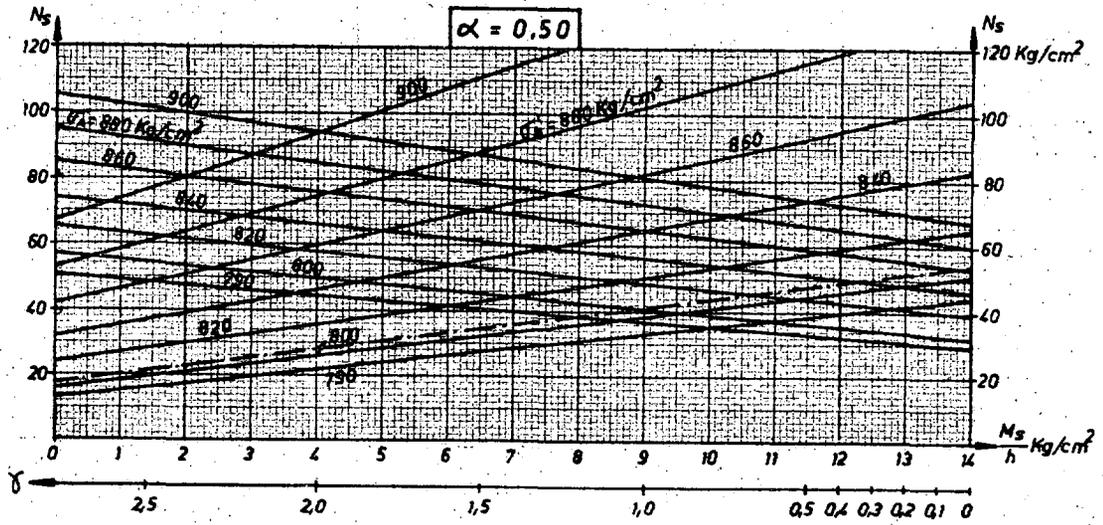
$(\sigma_A)'_{critico} = \text{-----} = 819 \text{ Kg/cm}^2$

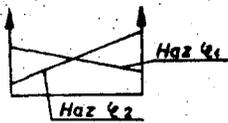




$$\delta = 0,12$$

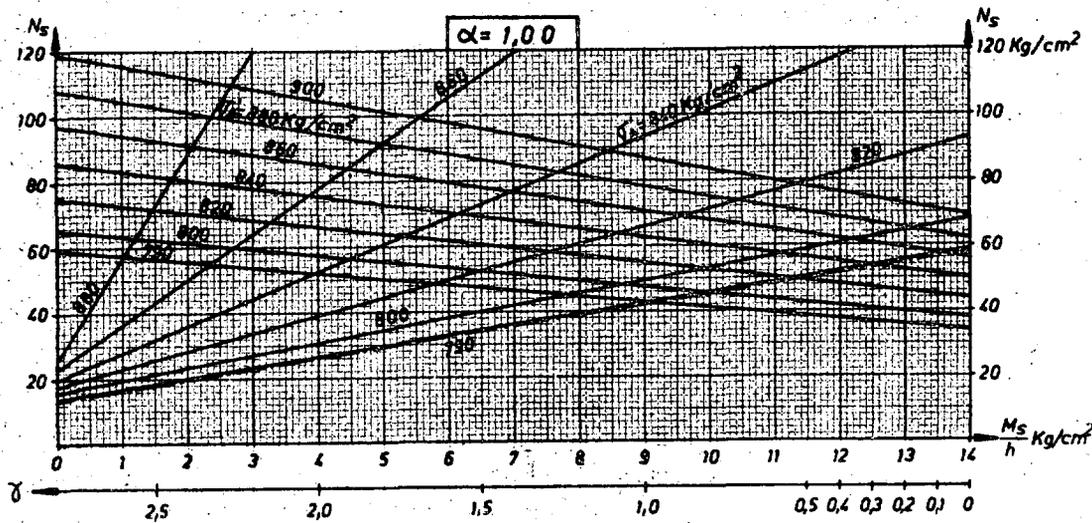
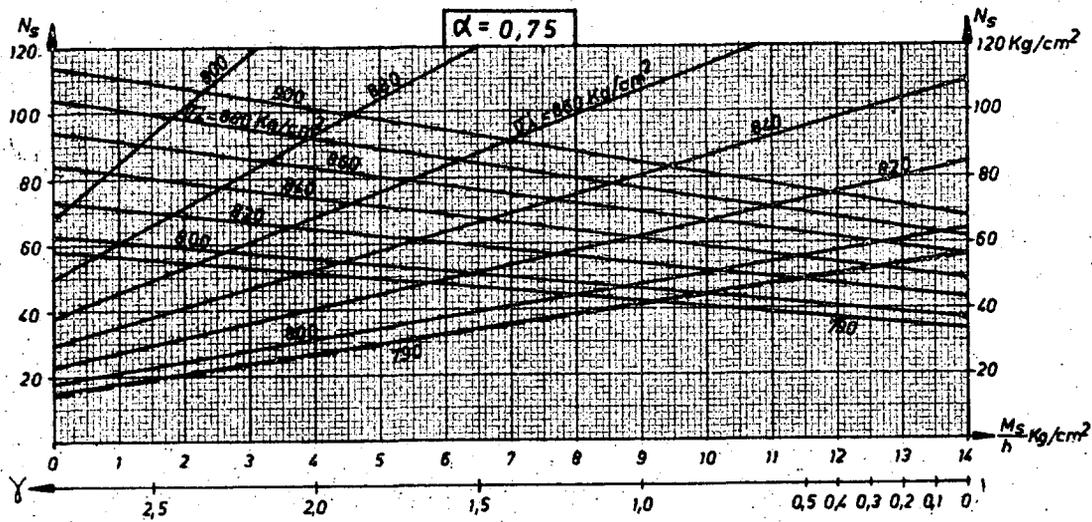
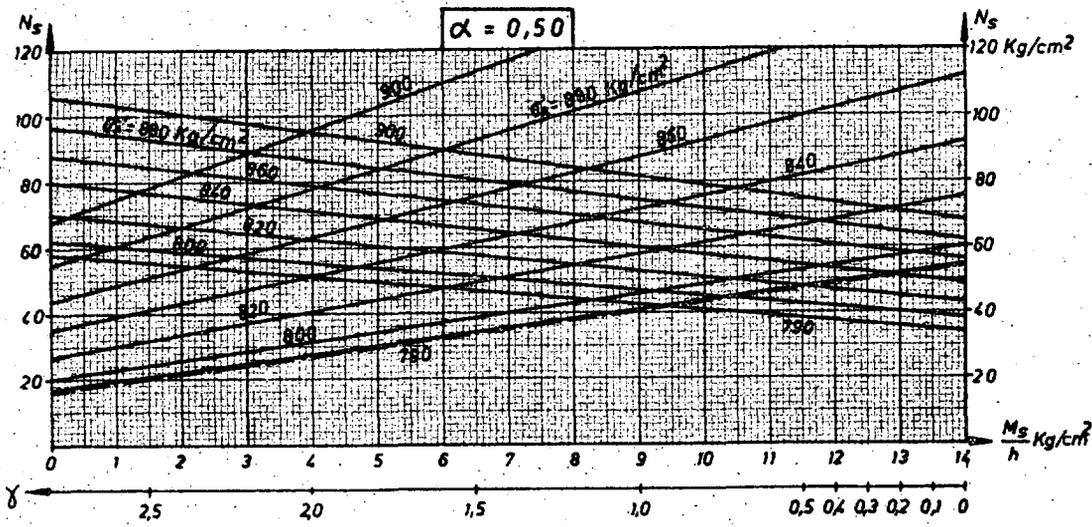
$$(\sigma_A)_{critico} = \text{---} = 804 \text{ Kg/cm}^2$$





$\delta = 0,14$

$(\sigma'_A)_{critico} = \dots = 789 \text{ Kg/cm}^2$



(Continuará.)