HORMIGON ARMADO: ABACOS PARA EL CALCULO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A COMPRESION COMPUESTA Y A FLEXION COMPUESTA

Por FRANCISCO RUIZ GARCIA
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

(Continuación)

2. ABACOS PARA LA FLEXION COMPUESTA

A) HIPOTESIS:

1.ª: Ley de Hooke de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones.
2.ª: Hipótesis de Navier de conservación de las secciones planas.
3.ª: Relación entre el módulo de elasticidad del acero y del hormigón igual a 15.
4.ª: Igual revestimiento para la armadura de tracción que para la de compresión.

B) NOTACIONES EMPLEADAS:

a = recubrimiento de las armaduras.
b = ancho de la sección.
c = canto total de la sección.
h = canto útil de la sección = $c - a$.
n = relación entre el módulo de elasticidad del acero y el del hormigón = 15.
r = relación de σ_A a 1 200.
x = profundidad de la fibra neutra.

F_a = sección de la armadura de tracción.
F'_a = sección de la armadura de compresión.
K = relación $\sigma_A/\sigma_H \times n$.
M = momento solicitante referido al eje geométrico de la pieza.
M' = momento solicitante referido a la armadura de tracción.
M_s = valor de $M'/b \times h$.
N = fuerza axil solicitante.
N_s = valor de $N/b \times h$.

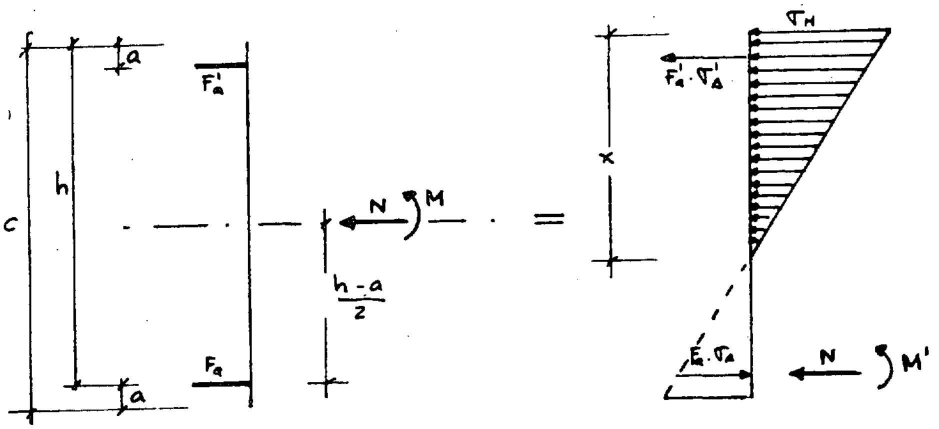
α = relación F'_a/F_a.
δ = relación a/h.

γ = valor de $\frac{F_a \cdot 100}{b \times h}$.

σ_A = tensión del acero a tracción.

σ'_A = tensión del acero a compresión.
σ_H = tensión máxima en el hormigón.
φ_1 = haz de rectas que da los valores de γ en función de σ_H y de N_s.
φ_2 = haz de rectas que da los valores de M_s/h en función de σ_H y de N_s.

C) CALCULO:



$$M = M' - N\,\frac{h-a}{2}$$ luego

$$\boxed{M' = M + N\left[\frac{h-a}{2}\right]} \qquad (26)$$

Figura 2.

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$N = \frac{\sigma_H \cdot b \cdot x}{2} + F'_a \cdot \sigma'_A - F_a \cdot \sigma_A \qquad (27)$$

y

$$M' = \frac{\sigma_H \cdot b \cdot x}{2}\left[h - \frac{x}{3}\right] + F'_a \cdot \sigma'_A\,[h - a] \qquad (28)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\sigma_A = \frac{h - x}{x} \cdot n \cdot \sigma_H \qquad (29)$$

$$\sigma'_A = n \cdot \sigma_H\left[1 - \frac{a}{x}\right] \qquad (30)$$

y

$$F'_a = \alpha \cdot F_a \qquad (31)$$

el sistema (27) y (28) queda:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{\sigma_H} &= \frac{b \cdot x}{2} - F_a\left[\frac{\sigma_A}{\sigma_H} - \left(1 - \frac{a}{x}\right) \cdot \alpha \cdot n\right] \\ \frac{M'}{\sigma_H} &= \frac{b \cdot x}{2} \cdot \frac{3\,h - x}{3} + n \cdot \alpha \cdot F_a\left[1 - \frac{a}{x}\right](h - a) \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Dividiendo por $b \times h$ y llamando:

$$\gamma = 100 \times F_a/b \times h \tag{33}$$

$$M_s = M'/b \times h \tag{34}$$

$$N_s = N/b \times h \tag{35}$$

queda:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{N_s}{\sigma_H} = \dfrac{x}{2 \,.\, h} - \dfrac{\gamma}{100} \,.\, n \left[\dfrac{\sigma_A}{\sigma_H \,.\, n} - \left(1 - \dfrac{a}{x}\right) \,.\, \alpha\right] \\ \dfrac{M_s}{\sigma_H} = \dfrac{x\,(3\,h - x)}{6 \,.\, h} + \dfrac{\gamma}{100} \,.\, n \,.\, \alpha \left(1 - \dfrac{a}{x}\right)(h - a) \end{array}\right\} \tag{36}$$

De la ecuación (29) se obtiene:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_H \,.\, n} = \frac{h - x}{x}$$

y llamando:

$$K = \frac{\sigma_A}{\sigma_H \,.\, n} \tag{37}$$

queda:

$$x = \frac{h}{1 + K} \tag{38}$$

Entrando con (37) y (38) en (36) se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{N_s}{\sigma_H} = \dfrac{1}{2\,(1 + K)} - \dfrac{\gamma}{100} \,.\, n \left[K - \alpha\left(1 - \dfrac{a\,(1 + K)}{h}\right)\right] \\ \dfrac{M_s}{\sigma_H} = \dfrac{2\,h + 3\,h\,K}{6\,(1 + K)^2} + \dfrac{\gamma}{100} \,.\, n \,.\, \alpha \left[1 - \dfrac{a}{h}\,(1 + K)\right](h - a) \end{array}\right\} \tag{39}$$

que puede ser puesta de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{1 - 2\,(1 + K) \,.\, \dfrac{N_s}{\sigma_H}}{2 \,.\, n\,(1 + K)\left[K - \alpha\left(1 - \dfrac{a\,(1 + K)}{h}\right)\right]} \times 100 \\ \dfrac{M_s}{h} = \dfrac{2 + 3\,K}{6\,(1 + K)^2} \,.\, \sigma_H + \dfrac{\gamma}{100} \,.\, n \,.\, \alpha \left[1 - \dfrac{a}{h}\,(1 + K)\right]\left(1 - \dfrac{a}{h}\right) \,.\, \sigma_H \end{array}\right\} \tag{40}$$

Se consideran como constantes $n = 15$ y $\sigma_A = 1\,200$ Kg./cm.^{2}, con lo que $K = 80/\sigma_H$ y entonces (40) son ecuaciones del tipo:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \Phi_1\left[\sigma_H\,,\, N_s \,.\, \alpha\,,\, \dfrac{a}{h}\right] \\ \dfrac{M_s}{h} = \Phi_2\left[\sigma_H\,,\, \alpha\,,\, \dfrac{a}{h}\,,\, \gamma\right] = \Phi_3\left[\sigma_H\,,\, N_s\,,\, \alpha\,,\, \dfrac{a}{h}\right] \end{array}\right\} \tag{41}$$

y al fijar valores a los parámetros $\delta = \frac{a}{h}$ y α, quedarán ambas expresiones de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \varphi_1 (\sigma_H , N_s) \\ \frac{M_s}{h} &= \varphi_2 (\sigma_H , N_s) \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Ambas expresiones, φ_1 y φ_2, son dos haces de rectas cuyo parámetro es σ_H.

Los ábacos se construyen para valores de $\delta = \frac{a}{h} = 0{,}08;\ 0{,}10;\ 0{,}12$ y $0{,}14$, y para cada uno de estos valores se hace $\alpha = 0{,}50;\ 0{,}75$ y $1{,}00$.

D) USO DE LOS ABACOS:

Caso 1.º — *Datos: M, N, b, h,* α y $\frac{a}{h} = \delta$; $\sigma_A = 1\,200$ Kg./cm.².

Incógnitas: F_a y σ_H.

Operaciones preliminares:

$$a = h \,.\, \delta\,; \qquad M' = M + N \left[\frac{h - a}{2} \right]$$

$$\left.\begin{aligned} N_s &= \frac{N}{b \,.\, h} \\ M_s &= \frac{M'}{b \,.\, h} \end{aligned}\right\} \text{siendo} \quad [b] = [h] = \text{cm.}; \quad [N] = \text{Kg.} \quad \text{y} \quad [M'] = \text{cm.} \times \text{Kg.}$$

Se obtiene el valor de $\frac{M_s}{h}$, cuyas dimensiones son Kg./cm.².

Abaco: Se define el punto de abscisa $\frac{M_s}{h}$ y de ordenada N_s que nos da, sobre la recta del haz φ_2 que pasa sobre él, el valor de σ_H medido en Kg./cm.².

La intersección de la ordenada N_s con la recta del haz φ_1 de valor σ_H igual al obtenido anteriormente nos define en abscisas el valor de γ.

Tenemos así:

$$F_a = \gamma \,.\, \frac{b \,.\, h}{100} \text{ cm.}^2, \qquad \text{siendo} \qquad [b] = [h] = \text{cm.}$$

y

$$F'_a = \alpha \,.\, F_a \text{ cm.}^2$$

Ejemplo:

Datos:

$M = 6\,000$ m. Kg. $= 600\,000$ cm. Kg.
$N = 10\,500$ Kg.
$b = 30$ cm.
$h = 50$ cm.
$\alpha = 1{,}00$

$$a = 5 \text{ cm.} \Rightarrow \delta = \frac{a}{h} = \frac{5}{50} = 0{,}10$$

$$\sigma_A = 1\,200 \text{ Kg./cm.}$$

Operaciones preliminares:

$$M' = 600\,000 + 10\,500 \left[\frac{50-5}{2}\right] = 836\,250 \text{ cm./Kg.}$$

$$N_s = \frac{10\,500}{30 \times 50} = 7\,; \quad M_s = \frac{836\,250}{30 \times 50} = 557$$

$$\frac{M_s}{h} = \frac{557}{50} = 11{,}10$$

Abaco: En el ábaco $\delta = 0{,}10$ y $\alpha = 1{,}00$ para $N_s = 7$ y $M_s/h = 11{,}10$ encontramos en el haz φ_2 el valor de $\sigma_H = 52{,}00$ Kg./cm.².
En el haz φ_1 la abscisa del punto de ordenada $N_s = 7$ sobre la recta $\sigma_H = 52{,}00$ Kg./cm.² vale $\gamma = 0{,}48$.
Tenemos:

$$F_a = 0{,}48 \cdot \frac{50 \times 30}{100} = 7{,}20 \text{ cm.}^2$$

$$F_a' = \alpha \cdot F_a = 1{,}00 \cdot 7{,}20 = 7{,}20 \text{ cm.}^2$$

$$K = \frac{\sigma_A}{n \cdot \sigma_H} = \frac{80}{52} = 1{,}54 \Rightarrow x = \frac{h}{1+K} = \frac{50}{2{,}54} = 19{,}70 \text{ cm.}$$

Caso 2.º — *Datos:* M, N; b, h, α y $\frac{a}{h} = \delta$ con $\sigma_A \neq 1\,200$ Kg./cm.².
Incógnitas: F_a y σ_H.
Cálculo: Las ecuaciones (40) se pueden escribir:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{1 - \dfrac{2(1+K)}{\sigma_H} \cdot N_s}{\psi_1(K)} \\ \frac{M_s}{h} &= \sigma_H \cdot \psi_2(K, \gamma) \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

en donde están ya fijados los valores de $\delta = \frac{a}{h}$ y de α, y donde $K = \sigma_A / n \cdot \sigma_H$ con $\sigma_A = 1\,200$ Kg./cm.².

Si llamamos $r = \frac{\sigma_A}{1\,200}$ podemos escribir (43) de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{1 - \dfrac{2(1+K)}{\sigma_H / r} \cdot \dfrac{N_s}{r}}{\psi_1(K)} \\ \frac{M_s}{h \cdot r} &= \frac{\sigma_H}{r} \cdot \psi_2(K, \gamma) \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

y poniendo K de la forma:

$$K = \frac{\sigma_A / r}{n \cdot \sigma_H / r} = \frac{1\,200}{n \cdot \sigma_H / r} \qquad (45)$$

resulta que los ábacos son válidos, siempre que en vez de los valores σ_H, M_s y N_s usemos los valores σ_H/r, M_s/r y N_s/r que llamaremos, respectivamente, $(\sigma_H)_1$, $(M_s)_1$ y $(N_s)_1$.

Queda así:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{1 - \dfrac{2(1+K)}{(\sigma_H)_1} \cdot (N_s)_1}{\psi_1(K)} \\ \frac{(M_s)_1}{h} &= (\sigma_H)_1 \cdot \psi_2(K) \end{aligned}\right\} \qquad (44')$$

siendo ahora:

$$K = \frac{1\,200}{n \cdot (\sigma_H)_1}$$

Operaciones preliminares:

$$M' = M + N\left[\frac{h-a}{2}\right]; \quad r = \frac{\sigma_A}{1\,200}$$

$$N_s = N/b \cdot h \quad \Rightarrow \quad (N_s)_1 = \frac{N_s}{r}$$

$$M_s = M'/b \cdot h \quad \Rightarrow \quad (M_s)_1 = \frac{M_s}{r}$$

$$(M_s)_1/h$$

Abaco: Igual que en el caso primero, entramos en el ábaco con los valores $(N_s)_1$ y $(M_s)_1/h$ que da los valores de $(\sigma_H)_1$ y de γ.

Tenemos así:

$$\sigma_H = (\sigma_H)_1 \times r$$

$$F_a = \gamma \cdot \frac{b \times h}{100}, \quad F'_a = \alpha \cdot F_a$$

Ejemplo:

Igual que antes, con σ_A = 1 800 Kg./cm.².

Operaciones preliminares:

$$M' = 836\,250 \text{ cm. Kg.}; \quad r = 1\,800/1\,200 = 1{,}5$$

$$N_s = 7 \quad \Rightarrow \quad (N_s)_1 = \frac{7}{1{,}5} = 4{,}67$$

$$M_s = 557 \quad \Rightarrow \quad (M_s)_1 = \frac{557}{1{,}5} = 371$$

$$\frac{(M_s)_1}{h} = \frac{371}{50} = 7{,}41$$

Abaco: Encontramos: $(\sigma_H)_1$ = 41,00 Kg./cm.² y γ = 0,30:

$$\sigma_H = 41{,}00 \times 1{,}5 = 61{,}50 \text{ Kg./cm.}^2$$

$$F_a = 0{,}30 \cdot \frac{50 \times 30}{100} = 4{,}50 \text{ cm.}^2; \quad F'_a = 1{,}00 \cdot 4{,}50 = 4{,}50 \text{ cm.}^2$$

y

$$K = \frac{1\,200}{15 \cdot 41} = 1{,}95 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{50}{1 + 1{,}95} = 16{,}95 \text{ cm.}$$

Caso 3.º — *Datos:* M, N, b, h, α, $\frac{a}{h} = \delta$ y F_a.

Incógnitas: σ_H y σ_A.

Cálculo: Como

$$\frac{N_s}{\frac{M_s}{h}} = \frac{(N_s)_1}{\frac{(M_s)_1}{h}} = \lambda \equiv \text{constante}$$

la ecuación $N_s = \lambda \cdot \frac{M_s}{h}$ es una recta que pasa por el origen.

El valor de $\gamma = F_a \cdot \frac{100}{b \times h}$ define una recta vertical.

Abaco: Hay que proceder por tanteos:
Hay que encontrar un valor de $(N_s)_1$ — ordenada — que corte a la recta vertical γ en un punto del haz φ_1 que dé el mismo valor de σ_H que el punto de haz φ_2 en que la recta $N_s = \lambda \cdot \frac{N_s}{h}$ corte a la ordenada $(N_s)_1$ buscada.

Ejemplo:

Datos:

$M = 6\,000$ m. Kg. $= 600\,000$ cm. Kg.
$N = 10\,500$ Kg.
$b = 30$ cm. ; $h = 50$ cm. ; $a = 5$ cm. $\Rightarrow \delta = \frac{a}{h} = 0{,}10$
$\alpha = 1{,}00$
$F_a = 5{,}00$ cm.²

Operaciones preliminares:

$M' = 836\,250$ cm. Kg.
$N_s = 7{,}00$, $M_s/h = 11{,}10$

$$\lambda = \frac{N_s}{M_s/h} = \frac{7{,}00}{11{,}10} = 0{,}63; \quad \gamma = 5{,}00 \cdot \frac{100}{30 \cdot 50} = 0{,}33$$

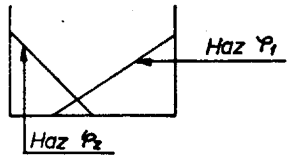
Abaco: Para $(N_s)_1 = 5{,}50$ tenemos $(\sigma_H)_1 = 45$ Kg./cm.² en el haz φ_1 y abscisa $\gamma = 0{,}33$, y para $(N_s)_1 = 5{,}50$ tenemos sobre el haz φ_2, sobre la recta $N_s = 0{,}63 \times M_s/h$, el mismo valor de σ_H. Obtenemos, pues, como abscisa de ese punto del haz φ_2, el valor de $(M_s)_1/h = 8{,}73$. Así, pues:

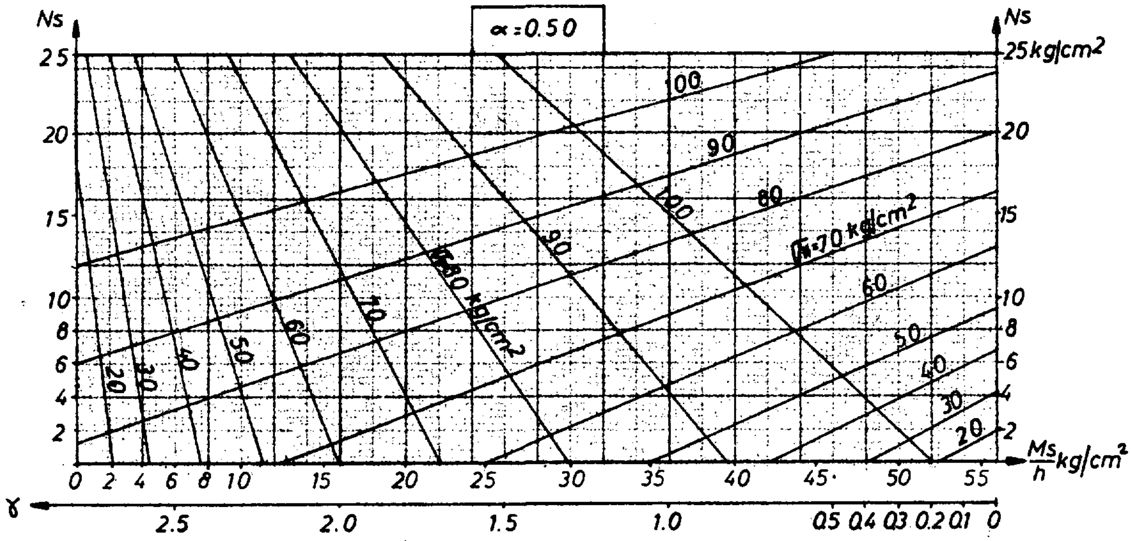
$$r = \frac{7{,}00}{5{,}50} = \frac{11{,}10}{8{,}73} = 1{,}27$$

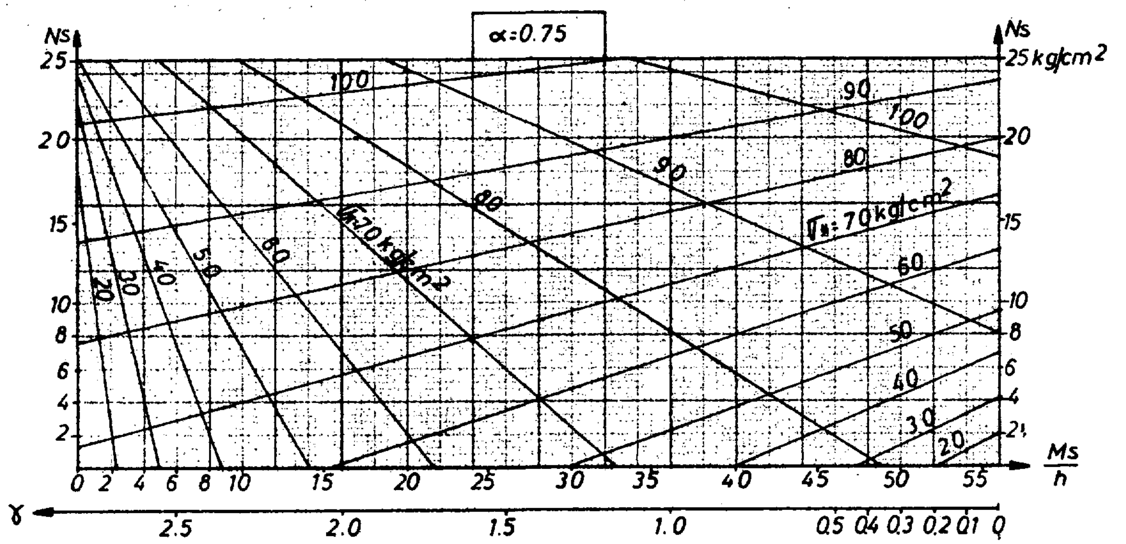
Luego:

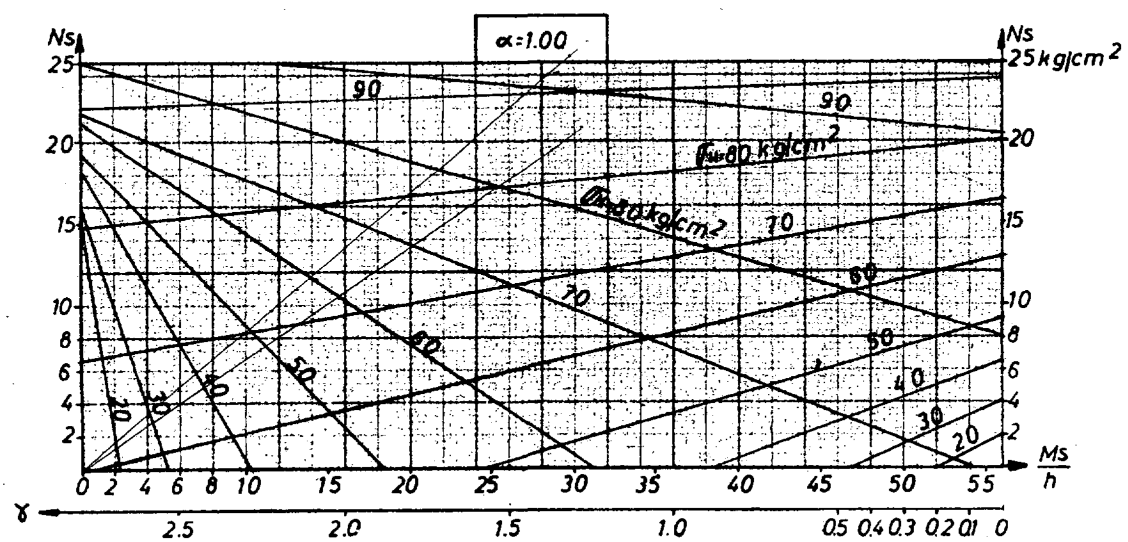
$$\sigma_A = 1\,200 \cdot 1{,}27 = 1\,525 \text{ Kg./cm.}^2$$
$$\sigma_H = 45 \times 1{,}27 = 57{,}0 \text{ Kg./cm.}^2$$

$\delta = 0.08$

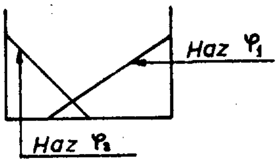

Haz φ_1
Haz φ_2

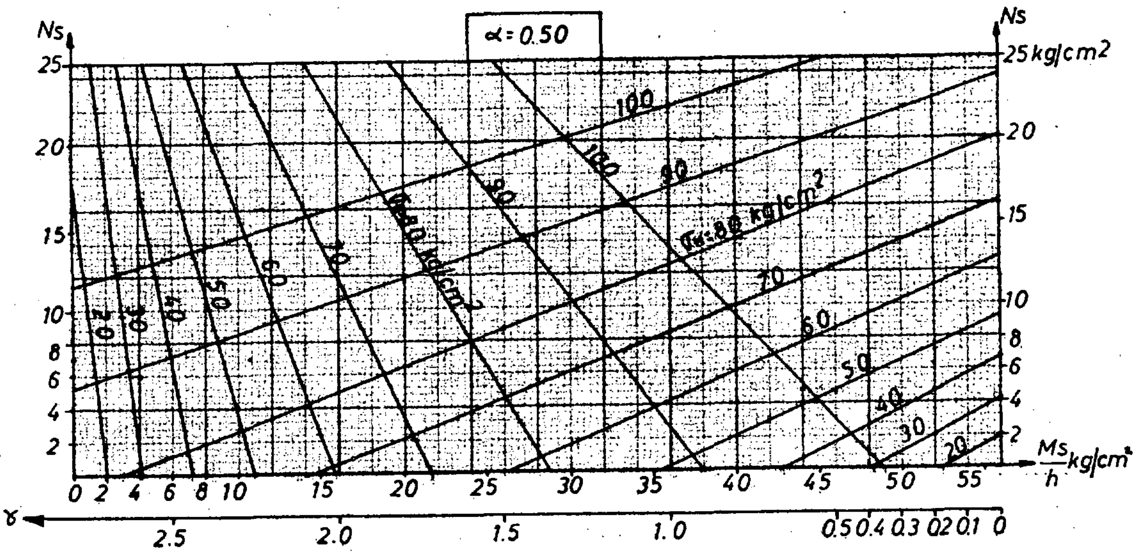

α=0.50
Ns
25 kg/cm²
σ_s=70 kg/cm²
σ_s=80 kg/cm²
Ms/h kg/cm²
γ

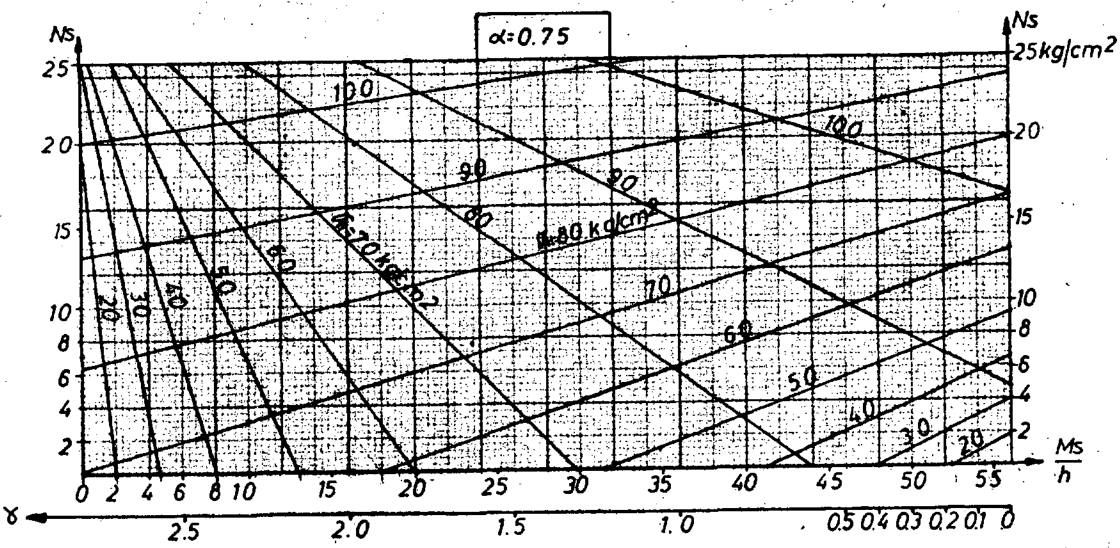

α=0.75
Ns
25 kg/cm²
σ_s=70 kg/cm²
Ms/h
γ

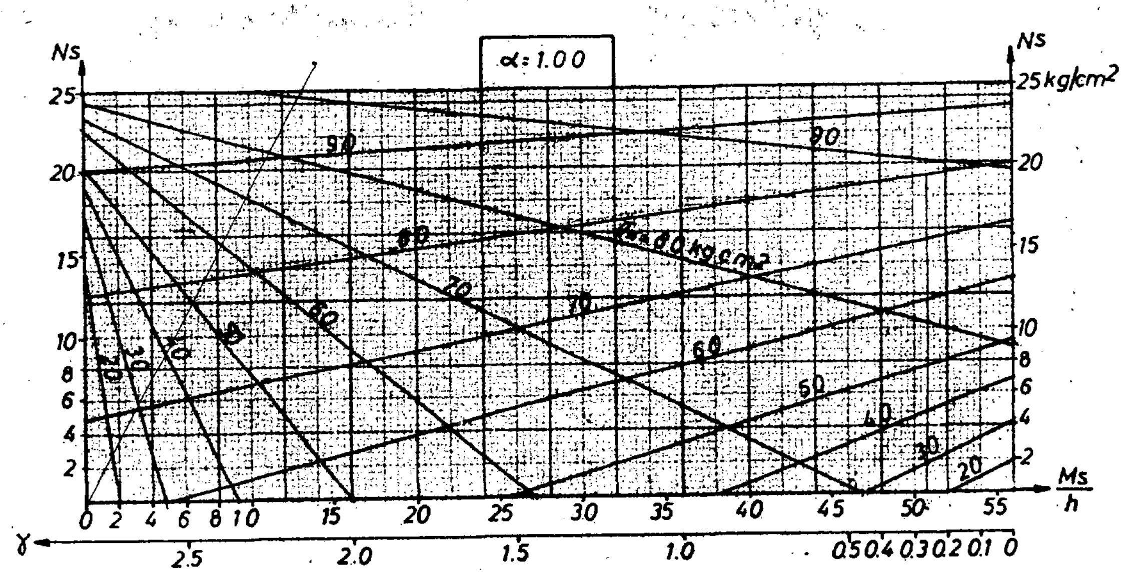

α=1.00
Ns
25 kg/cm²
σ_s=80 kg/cm²
Ms/h
γ

$\delta = 0.10$

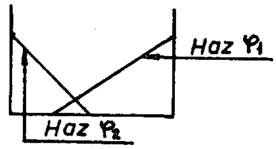

Haz φ1
Haz φ2


α = 0.50
Ns
Ns
25 kg/cm²
σa = 80 kg/cm²
σb = 70 kg/cm²
Ms/h kg/cm²
γ

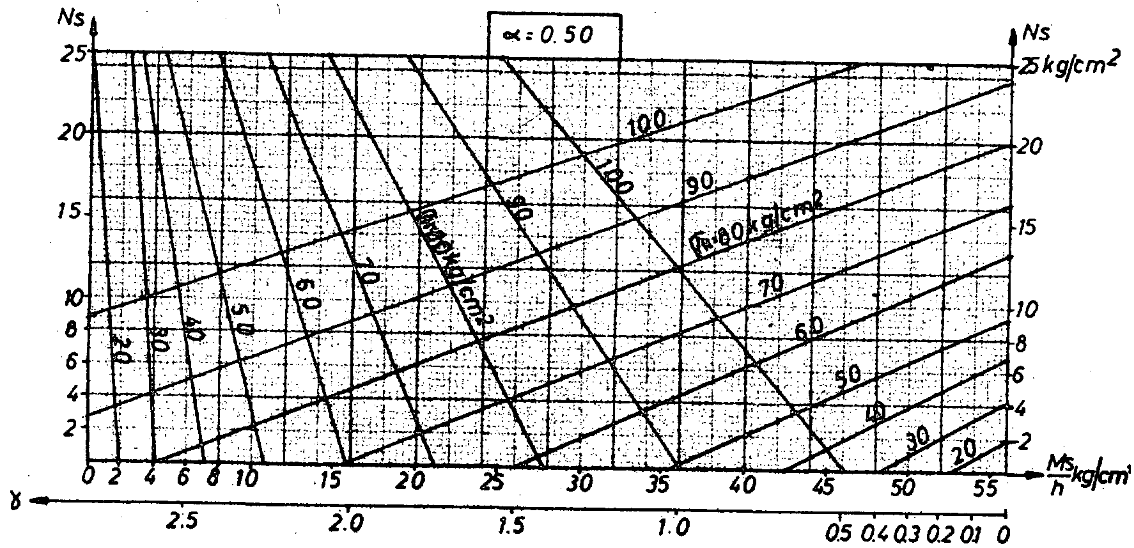

α = 0.75
Ns
Ns
25 kg/cm²
σa = 80 kg/cm²
σb = 70 kg/cm²
Ms/h
γ


α = 1.00
Ns
Ns
25 kg/cm²
σa = 80 kg/cm²
Ms/h
γ

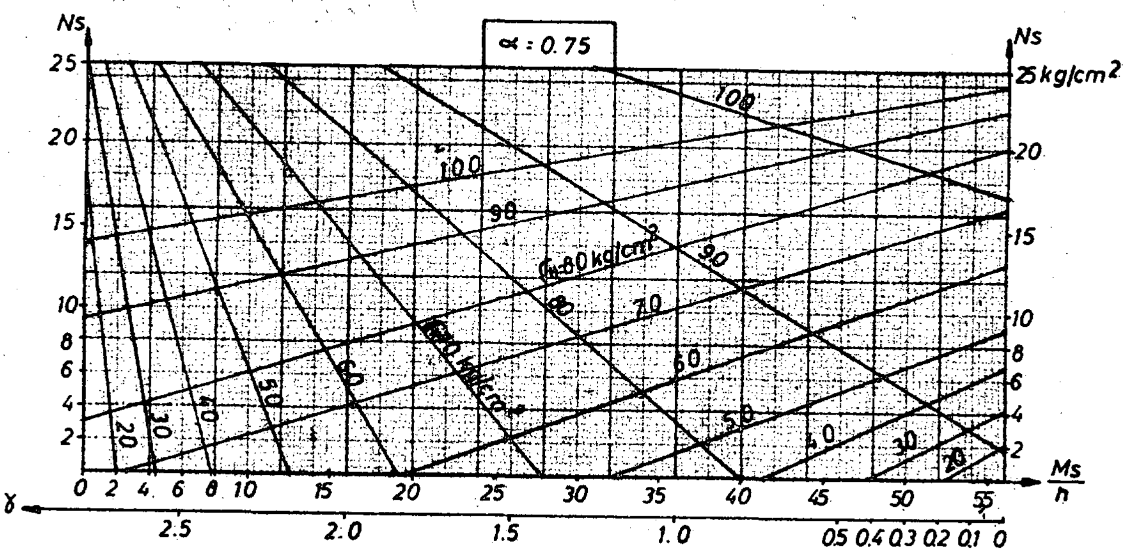
δ = 0.12



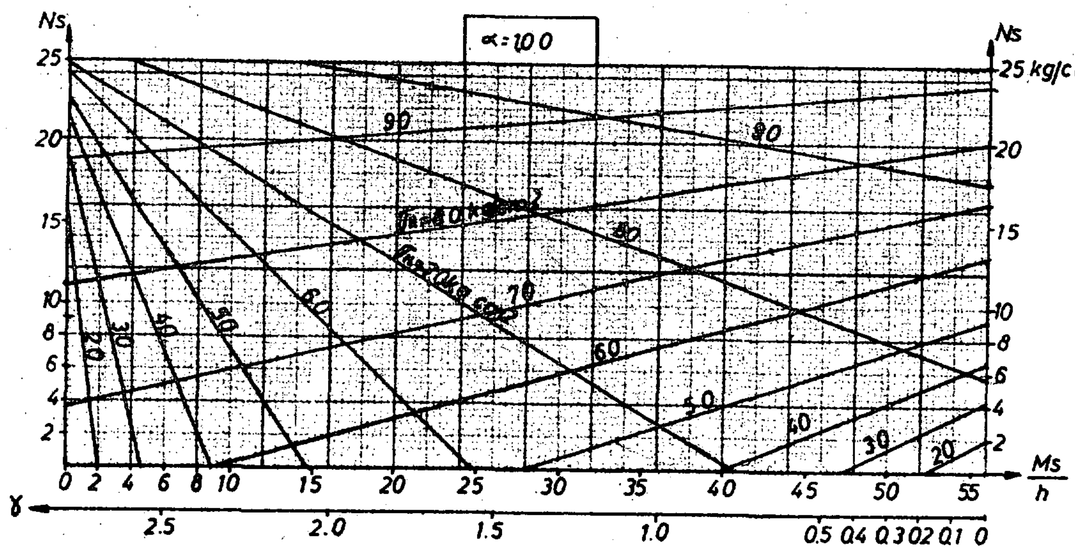
Haz φ1
Haz φ2



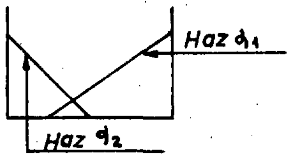
α : 0.50
Ns
25 kg/cm2
Ms/h kg/cm
γ
0 2 4 6 8 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55
2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0



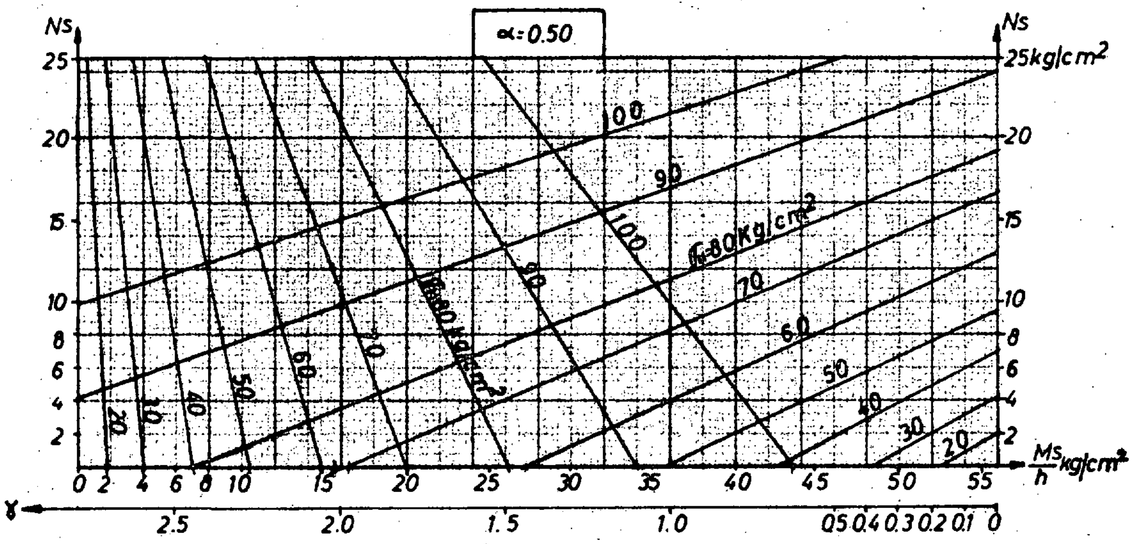
α : 0.75
Ns
25 kg/cm2
Ms/h
γ
0 2 4 6 8 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55
2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0

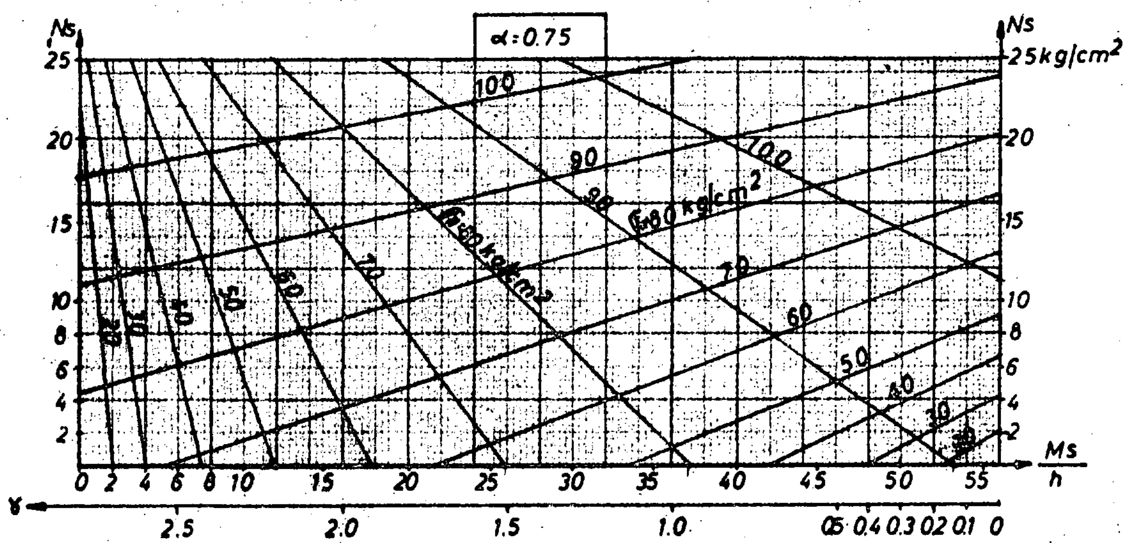


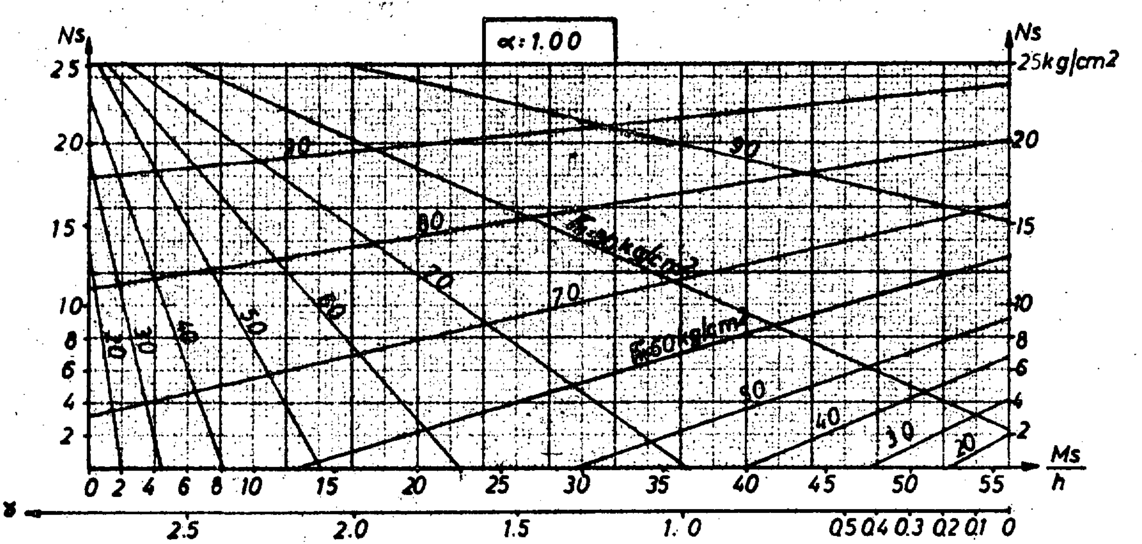
α : 1.00
Ns
25 kg/cm2
Ms/h
γ
0 2 4 6 8 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55
2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0



$\delta = 0.14$







(Continuará)