VALORES MEDIOS DE UNA SERIE Y SU APLICACION A LAS RENTAS (*)

Por M. A. HACAR BENITEZ
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Licenciado en Ciencias Exactas y Físicas

Estas notas no pretenden ser más que unos comentarios y la generalización de algunos conceptos expuestos por J. L. Matut en el número de julio de 1969 de esta misma revista. Al final se establece la analogía con un problema de tiempos de un recorrido.

1. PRELIMINARES

Dadas las n cantidades positivas a_1, a_2, ..., a_n se llama media de orden m a la expresión:

$$M(m) = \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n}}$$

siendo m un número real cualquiera, positivo, nulo o negativo. Como más usuales tenemos:

Para $m = -1$	$M(-1)$	o media armónica.
» $m = 1$	$M(1)$	o media aritmética.
» $m = 2$	$M(2)$	o media cuadrática.
» $m = 3$	$M(3)$	o media cúbica.

En los tratados de Estadística y de Probabilidades se demuestran las propiedades más interesantes de la media $M(m)$, entre las que citaremos:

a) Cuando m tiende hacia cero, $M(m)$ tiende a la media geométrica, o sea, que:

$$M(0) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2, \ldots, a_n}$$

b) La función $M(m)$ es creciente. Para grandes valores negativos de m tiende $M(m)$ al valor más pequeño de a_i. Para grandes valores positivos de m tiende $M(m)$ al valor más grande de los a_i.

2. RENTAS MEDIAS

Por lo anteriormente expuesto resulta evidente que si de n rentas individuales a_i ($i = 1, 2, ..., n$) obtenemos las medias:

$M(-1)$ = renta armónica (o mat).
$M(0)$ = renta geométrica.
$M(1)$ = renta *per capita* (r).
$M(2)$ = renta cuadrática, etc.

sus valores están escritos en orden creciente.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de mayo de 1970.

Cuanto menor sea m, más se aproximará $M(m)$ al menor de a_i, o sea, al valor de la renta del individuo *más pobre.*

(para $m = -\infty$ es precisamente su renta)

Cuanto mayor sea m, $M(m)$ se aproximará al valor de la renta del individuo *más rico.*

(para $m = +\infty$ nos da su renta)

No se suelen utilizar los valores medios $M(m)$ con m negativo porque al haber algún a_i próximo a cero, $M(m)$ tiende a anularse.

3. DISTRIBUCION DE LAS RENTAS: LA RENTA MEDIA GEOMETRICA

Parece lógico, por lo que llevamos dicho, que si interesase definir para diversos países o regiones índices que acusasen los distintos grados de equidad distributiva de las rentas de sus habitantes, podríamos tomar un promedio cualquiera $M(m)$.

Los de m negativo ($m = -1$ sería de renta armónica o "mat") revelarían más bien la pobreza; y los de m positivo ($m = 1$ sería la renta *per capita* r) la riqueza.

Se nos ocurre que también podría utilizarse como valor medio de la renta

$$M(0) = \sqrt[n]{a_1\ a_2, \ldots, a_n}$$

o renta *media geométrica* (podría llamarla renta "hac").

Su utilización tiene indudables ventajas por gozar de interesantes propiedades.

Refleja y acusa, también, la falta de equidad distributiva. A continuación damos un cuadro con 9 países, cada uno de los cuales sólo tuviese dos habitantes de rentas a_1 y a_2 pero que *per capita* fuese de 100. En él se confirma lo expuesto.

Este cuadro lo hemos aumentado con casillas correspondientes a $M(-2)$ y a $M(2)$.

País	Renta a_1	Renta a_2	Renta $M(-2)$	Renta $M(-1)$ (mat)	Renta $M(0)$ (hac)	Renta $M(1)$ per capita	Renta $M(2)$
A	10	190	14	19	43	100	135
B	20	180	28	36	60	100	128
C	30	170	42	51	71	100	122
D	40	160	55	64	80	100	116
E	50	150	67	75	88	100	112
F	60	140	78	84	92	100	108
G	70	130	87	91	95	100	104
H	80	120	94	96	97	100	102
I	90	110	99	99	99	100	101

Las rentas $M(-2)$ y $M(2)$ podrían servir, respectivamente, para denunciar grandes pobrezas (miserias) y riquezas (opulencias).

Por cociente de cada dos M (m) de un mismo país, podemos obtener diversos indicadores a los que cabe dar caracteres económico-sociales, de riqueza o de pobreza, etc.

Así, por ejemplo, dividiendo por M (0) definiremos para cada país o región:

Indice de miseria	$M(-2) : M(0)$
Indice de pobreza	$M(-1) : M(0)$
Indice de riqueza	$M(1) : M(0)$
Indice de opulencia	$M(2) : M(0)$

Los dos primeros son menores que la unidad, y los dos últimos, mayores.

La obtención de M (0) se facilita empleando una tabla la logaritmos, ya que su valor es:

$$\log M(0) = \log \sqrt[n]{a_1\, a_2, \ldots, a_n} = \frac{1}{n} (\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos y de la derivada logarítmica de una función, se pueden deducir propiedades interesantes de las que ahora no nos ocuparemos.

4. ELASTICIDADES PARCIALES DE LOS VALORES MEDIOS DE LA RENTA

Si designamos por E_i [M (m)] la elasticidad de M (m) con respecto a la renta a_i, sabemos que por definición:

$$E_i [M(m)] = \frac{d\, M(m)}{M(m)} : \frac{d\, a_i}{a_i} = \frac{d\, M(m)}{d\, a_i} \, \frac{a_i}{M(m)} =$$

$$= \frac{d \sqrt[m]{\dfrac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_i^m + \ldots + a_n^m}{n}}}{d\, a_i} \cdot \frac{a_i}{M(m)} = \frac{1}{n} \left[\frac{a_i}{M(m)} \right]^m$$

Como casos particulares tenemos:

$$m = -1, \ldots, E_i [M(-1)] = \frac{1}{n} \frac{M(-1)}{a_i} = \frac{1}{n} \frac{mat}{a_i}$$

$$m = 0, \ldots, E_i [M(0)] = \frac{1}{n}$$

$$m = 1, \ldots, E_i [M(1)] = \frac{1}{n} \frac{a_i}{M(1)} = \frac{1}{n} \frac{a_i}{r}$$

Es decir, que la elasticidad de la *renta geométrica* es $\frac{1}{n}$, la misma para todas las variables a_i.

En cambio, las elasticidades de las rentas "mat" y r son inversas y directamente proporcionales cada una de sus respectivas a_i.

5. COEFICIENTES DE UNA DISTRIBUCION

En realidad lo que se pretende con estos coeficientes es dar una indicación de la *distribución* de las rentas entre un conjunto de habitantes y de forma que, además, se revele su evolución, su aspecto dinámico.

Pero una distribución queda completamente definida cuando se conoce exactamente la llamada *función de distribución.*

Dando algunos parámetros, podemos formarnos idea aproximada de la misma.

Así tenemos: la moda, la mediana, la media aritmética, otros valores medios, la desviación media, la desviación cuadrática media, la varianza, las quartilas, las decilas y las percentilas, las medidas de asimetría, la curtosis, los momentos de diverso orden (con respecto a la media), etcétera.

Pero las más utilizadas son:

— La media aritmética.

— La desviación cuadrática media o derivación típica o *standard* (o su cuadrado que es la varianza).

Creemos que en el caso de analizar de modo elemental la distribución de las rentas entre los habitantes de un país, serían estos dos parámetros los más cómodos de utilizar y los que mejor darían idea de las mismas.

Para el estudio de la distribución personal de la renta y su distanciamiento a amortiguamiento a lo largo del tiempo, resultan muy útiles las conocidas curvas de Lorenz a base de las cuales se determinan los coeficientes de concentración que indudablemente tienen también un carácter socio-económico.

6. LAS MEDIAS DE VELOCIDAD Y SUS ANALOGIAS

Si en una pista de longitud L, un móvil lleva la velocidad $v(x)$, función de su abscisa x $(0 \leq x \leq L)$, a causa del estado de la carretera, el tiempo que tarde en efectuar el recorrido, será:

$$T = \int_0^L \frac{dx}{v(x)}$$

La velocidad media será por tanto:

$$V_m = \frac{L}{T} = \frac{L}{\displaystyle\int_0^L \frac{dx}{v(x)}}$$

como:

$$\frac{1}{V_m} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{V(x)}$$

resulta que la *velocidad media es la media armónica de las velocidades instantáneas.*

$$T = \frac{L}{V_m}$$

Pero el valor medio de $V(x)$ a lo largo de 0 a L, es:

$$m_v = \frac{1}{L} \int_0^L V(x)\, dx$$

que es su *media aritmética.*

El tiempo que *tardaría* un móvil en el mismo recorrido, pero con la velocidad *ficticia* (constante m_v), sería:

$$T_1 = \frac{L}{m_v}$$

Pero como la media aritmética de varias cantidades (positivas) es mayor que la media armónica $m_v > V_m$.

Por tanto $T_1 < T$.

Ejemplo: si a lo largo de un recorrido de 100 Km. se puede circular en 50 kilómetros a 40 Km./hora y en los otros 50 a 80 Km./hora, se tardará en total:

$$T = \frac{50}{40} + \frac{50}{80} = \frac{15}{8} \text{ horas} = 1 \text{ h. } 52 \text{ m. } 30 \text{ seg.}$$

Si se hubiese podido hacer todo el recorrido al promedio de las velocidades $m_v = \frac{40 + 80}{2} = 60$ Km./hora, sólo se hubiese tardado:

$$T_1 = \frac{100}{60} \text{ horas} = 1 \text{ h. } 20 \text{ m.}$$

Esto debe tenerse en cuenta al planificar la modernización de las líneas de transporte.

Es preferible, en general, lograr una mayor regularidad en el mejoramiento de toda una carretera o línea ferroviaria que dejar en estado excelente sólo unos tramos, y en situación defectuosa otros.

El tiempo total de recorrido no se obtiene sumando o integrando las velocidades a lo largo del camino, o sea, hallando su media aritmética, sino hallando su media armónica.

Es más; podríamos definir un parámetro p (menor que la unidad, cociente de la media armónica y de la aritmética)

$$p = \frac{T_1}{T} = \frac{V_m}{m_v} = \frac{L^2}{\int_0^L V(x)\, dx \int_0^L \frac{d(x)}{v(x)}} < 1$$

que nos indicaría la irregular o defectuosa distribución de las velocidades a lo largo de la misma.

El paralelismo de p con el coeficiente

$$\frac{\text{mat}}{r} = \frac{M(-1)}{M(1)} \text{ es evidente.}$$

Cuanto más diversas (desordenadas) fuesen las velocidades $v(x)$, menor sería p y mayor $\frac{1}{p}$. Entonces $-\log p$ crecería.

Podríamos decir que esta cantidad viene a representar una especie de "entropia" de la línea o carretera (valor nulo si la velocidad es uniforme y crece indefinidamente si la carretera está *desordenada* o desatendida, con tramos buenos y malos).