

ESTUDIO GENERAL DEL MARCO RECTANGULAR CERRADO (*)

Por JUAN J. ARENAS DE PABLO
Ingeniero de Caminos

El objeto del presente trabajo es el estudio general de un marco rectangular cerrado, cuyas cuatro paredes son simétricas respecto a su punto medio, y tal que todo el conjunto tiene un eje de simetría vertical. El estudio se realiza en elasticidad plana.

Se busca y obtiene la expresión que da directamente los momentos flectores en los cuatro vértices para cualquier hipótesis de carga, como producto de una matriz K, con dimensión de matriz de rigidez, por un vector columna constituido por funciones de las rotaciones isostáticas producidas por el estado de carga considerado, más otro vector columna que representa el equilibrio horizontal del dintel.

En todo el estudio se supone que el marco está apoyado en el terreno por su base, bien en toda su longitud o mediante apoyos puntuales, y que este tipo de sustentación es capaz de equilibrar las acciones exteriores verticales y horizontales, sin producir corrimiento vertical relativo de una pantalla lateral respecto a la otra.

No se distingue entonces entre acciones y reacciones, suponiéndose únicamente que en cada hipótesis de carga, el marco se encuentra en equilibrio.

Aunque en el desarrollo del trabajo se manejan expresiones algébricas farragosas, la expresión final, dada en forma matricial, es manejable. Sin embargo, desde un punto de vista práctico lo interesante es programar en ordenador la obtención de los coeficientes de K, así como las rotaciones isostáticas y las funciones de rotaciones para cada hipótesis de carga, y el producto matricial que da directamente los flectores de vértices.

Al final del trabajo se incluye la resolución de un ejemplo concreto.

Las estructuras en forma de marco cerrado (fig. 1) tienen un uso especialmente indicado en el establecimiento de pasos de servicios bajo terraplenes, en el subsuelo, bajo el agua, etc. En el presente estudio se busca el conocimiento de las hiperestáticas internas, en nuestro caso momentos flectores en los cuatro vértices o nudos del marco, en la hipótesis de elasticidad plana, o sea, para una franja de ancho unitario.

Dado el empleo de este tipo de estructura, creemos no perder generalidad suponiendo que existe un eje de simetría vertical.

1. DEFINICIONES Y SIMBOLOS (fig. 2).

Los subíndices o superíndices 1, 2 y 3 se refieren, respectivamente, al dintel superior, a la base y a las pantallas laterales.

Así tendremos como rigideces y coeficientes de transmisión:

Dintel: R_1, β_1 ; (supuestos iguales en ambos sentidos, por simetría
Base: R_2, β_2 ; de la pieza de pantalla).
Pantallas: R_3, β_3 ;

Llamaremos giro isostático del arranque de una pieza, al que esta barra tomaría bajo la acción de las cargas exteriores que se consideren, si tal barra estuviera simplemente apoyada en sus nudos extremos. Así tendremos:

Dintel: $\omega_A^1, \omega_{A'}^1$
Base: $\omega_B^2, \omega_{B'}^2$
Pantalla izquierda: ω_A^3, ω_B^3
Pantalla derecha: $\omega_{A'}^3, \omega_{B'}^3$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de marzo de 1971.

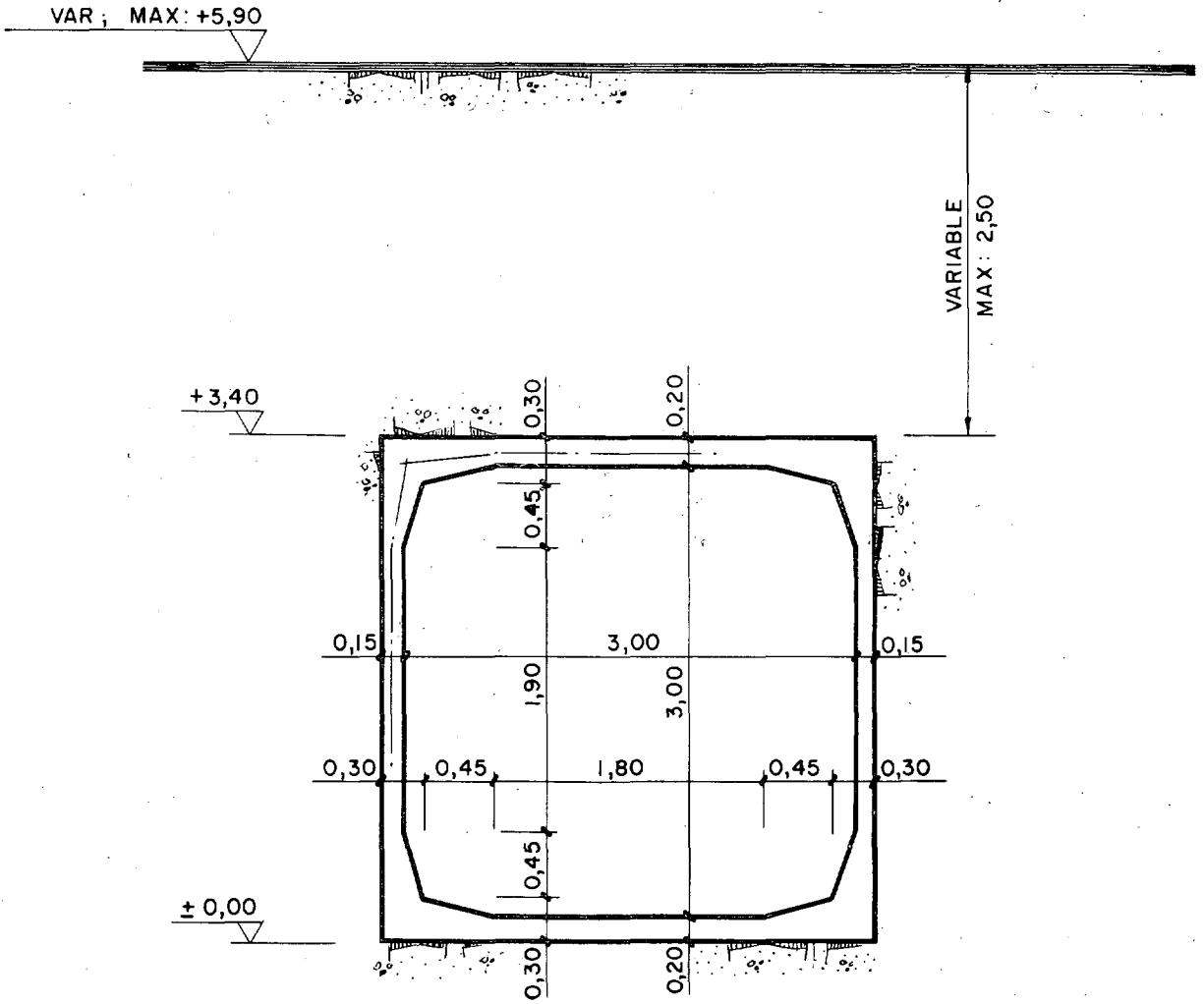


Figura 1.

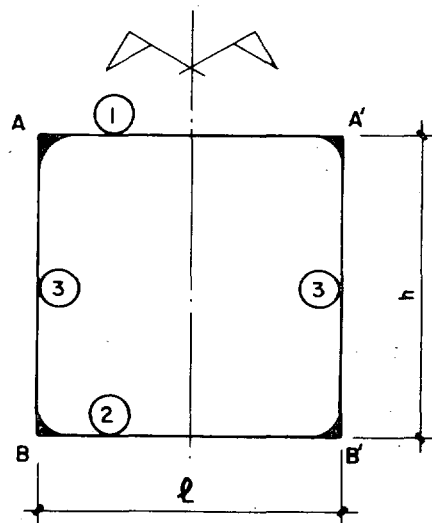


Figura 2.

Los giros reales de cada nudo (una vez equilibrados los dos arranques que en él inciden a través del par de continuidad), en el estado de carga considerado, son:

$$(\theta_A, \theta_{A'}, \theta_B, \theta_{B'})$$

El sentido positivo de rotación y pares es el antihorario.
El sentido de avance dentro del marco es el horario.

2. ESTADOS BASICOS: SIMETRIA Y ANTIMETRIA, RESPECTO AL EJE VERTICAL.

2.1. Simetría.

La deformada y el tipo de ley de Mf son las siguientes: (fig. 3).

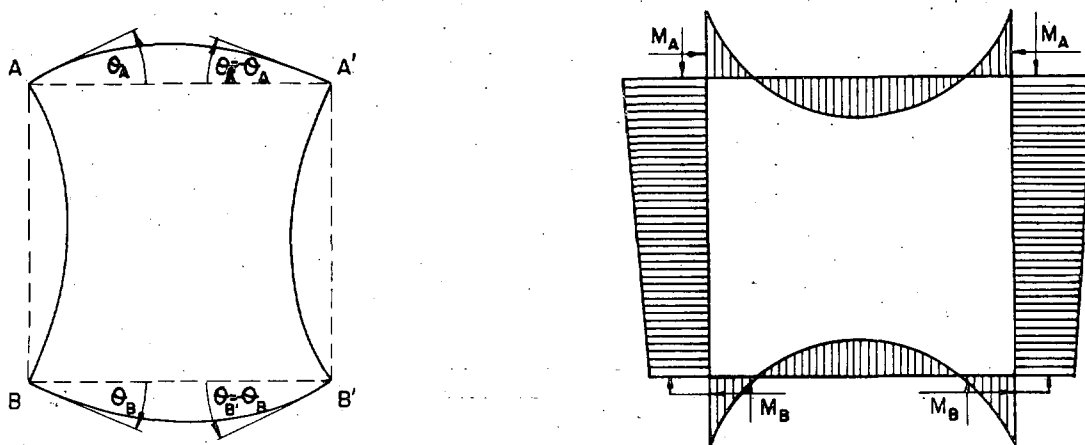


Figura 3.

Los pares que los nudos ejercen sobre los arranques de piezas son: (fig. 4).

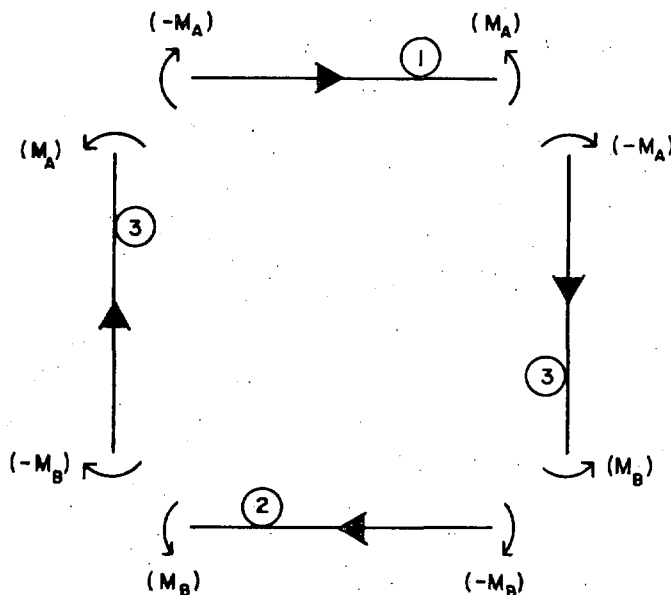


Figura 4.

Existen solamente dos pares incógnitas: M_A y M_B .

Establecemos la igualdad de giros de arranques de piezas en nudos A y B:

$$\text{Nudo A: } \begin{cases} \theta_A = \omega^1_A + \frac{-M_A - M_A \beta_1}{4 R_1 (1 - \beta_1^2)} = \omega^1_A - \frac{M_A}{4 R_1 (1 - \beta_1)} \\ \theta_A = \omega^3_A + \frac{M_A + M_B \beta_3}{4 R_3 (1 - \beta_3^2)} \end{cases}$$

luego:

$$M_A \frac{R_1 (1 - \beta_1) + R_3 (1 - \beta_3^2)}{4 R_1 R_3 (1 - \beta_1) (1 - \beta_3^2)} + M_B \frac{\beta_3}{4 R_3 (1 - \beta_3^2)} = (\omega^1_A - \omega^3_A) \quad (I)$$

$$\text{Nudo B: } \begin{cases} \theta_B = \omega^2_B + \frac{M_B + M_B \beta_2}{4 R_2 (1 - \beta_2^2)} = \omega^2_B + \frac{M_B}{4 R_2 (1 - \beta_2)} \\ \theta_B = \omega^3_B + \frac{-M_B - M_A \beta_3}{4 R_3 (1 - \beta_3^2)} \end{cases}$$

luego:

$$M_A \frac{\beta_3}{4 R_3 (1 - \beta_3^2)} + M_B \frac{R_2 (1 - \beta_2) + R_3 (1 - \beta_3^2)}{4 R_2 R_3 (1 - \beta_2) (1 - \beta_3^2)} = (\omega^3_B - \omega^2_B) \quad (II)$$

o sea:

$$\begin{aligned} a_{11} M_A + a_{12} M_B &= \omega^1_A - \omega^3_A \\ a_{21} M_A + a_{22} M_B &= \omega^3_B - \omega^2_B \end{aligned}$$

y siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix}_{\text{sim.}} = A^{-1} \begin{pmatrix} \omega^1_A - \omega^3_A \\ \omega^3_B - \omega^2_B \end{pmatrix}_{\text{sim.}} \quad (III)$$

Invertiendo la matriz A tenemos:

$$A^{-1} = \alpha \begin{pmatrix} R_1 (1 - \beta_1) [R_2 (1 - \beta_2) + R_3 (1 - \beta_3^2)] & -R_1 R_2 (1 - \beta_1) (1 - \beta_2) \beta_3 \\ -R_1 R_2 (1 - \beta_1) (1 - \beta_2) \beta_3 & R_2 (1 - \beta_2) [R_1 (1 - \beta_1) + R_3 (1 - \beta_3^2)] \end{pmatrix}$$

Siendo el parámetro α igual a:

$$\alpha = \frac{4 R_3}{R_1 R_2 (1 - \beta_1) (1 - \beta_2) + R_1 R_3 (1 - \beta_1) + R_2 R_3 (1 - \beta_2) + R_3^2 (1 - \beta_3^2)}$$

Hemos obtenido, pues, la expresión explícita de los pares de empotramiento para una sollicitación simétrica.

2.2. Antimetria.

En el caso más general, la antimetría supone la existencia de una acción exterior horizontal H sobre el dintel, y otra sobre la base. Esta última es absorbida directamente por la cimentación sin distorsión del marco, y la primera es equilibrada mediante los cortantes de pantallas y la correspondiente reacción de la cimentación.

Las acciones verticales sobre pantallas van a parar al terreno a través de la base sin producir distorsión vertical del marco.

Deformada y tipo de ley de Mf : (fig. 5):

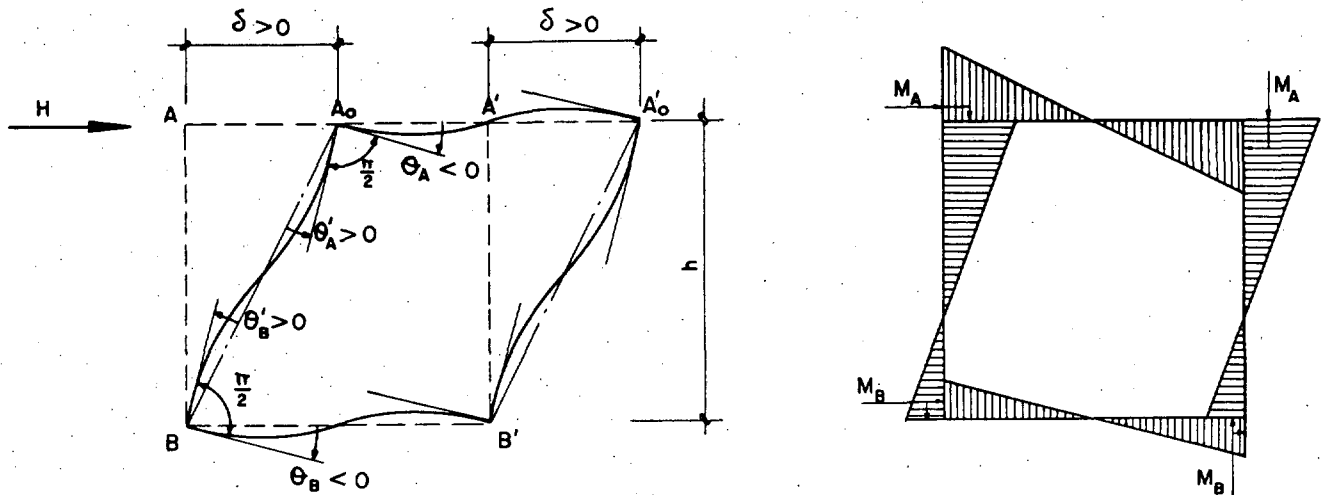


Figura 5.

Pares de nudos sobre barras: (fig. 6).

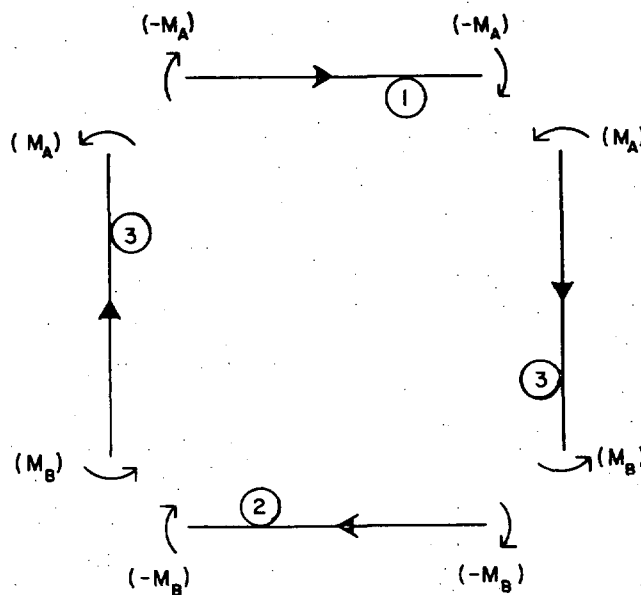


Figura 6.

Equilibrio del dintel a través de las cortantes de pantallas: (fig. 7).

El sentido de H y el corrimiento δ de la figura se consideran positivos.

Geoméricamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_A = \frac{\delta}{h} + \theta_A; \\ \theta'_B = \frac{\delta}{h} + \theta_B; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -\theta_A + \theta'_A = \delta/h \\ -\theta_B + \theta'_B = \delta/h \end{array} \right.$$

Equilibrio del dintel:

$$2(M_A + M_B)/h = H$$

Establecemos el equilibrio de giro de nudos:

Nudo A:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_A = \omega^1_A + \frac{-M_A + M_A \beta_1}{4 R_1 (1 - \beta_1^2)} = \omega^1_A - \frac{M_A}{4 R_1 (1 + \beta_1)} \\ \theta'_A = \omega^3_A + \frac{M_A - M_B \beta_3}{4 R_3 (1 - \beta_3^2)} \end{array} \right.$$

Y al ser:

$$-\theta_A + \theta'_A = \frac{\delta}{h}$$

tenemos:

$$M_A \frac{R_1 (1 + \beta_1) + R_3 (1 - \beta_3^2)}{4 R_1 R_3 (1 + \beta_1) (1 - \beta_3^2)} - M_B \frac{\beta_3}{4 R_3 (1 - \beta_3^2)} = \frac{\delta}{h} + \omega^1_A - \omega^3_A \quad (IV)$$

Nudo B:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_B = \omega^2_B + \frac{-M_B + M_B \beta_2}{4 R_2 (1 - \beta_2^2)} = \omega^2_B - \frac{M_B}{4 R_2 (1 + \beta_2)} \\ \theta'_B = \omega^3_B + \frac{M_B - M_A \beta_3}{4 R_3 (1 - \beta_3^2)} \end{array} \right.$$

Y al ser:

$$-\theta_B + \theta'_B = \frac{\delta}{h}$$

llegamos a:

$$-M_A \frac{\beta_3}{4 R_3 (1 - \beta_3^2)} + M_B \frac{R_2 (1 + \beta_2) + R_3 (1 - \beta_3^2)}{4 R_2 R_3 (1 + \beta_2) (1 - \beta_3^2)} = \frac{\delta}{h} + \omega^2_B - \omega^3_B \quad (V)$$

o sea:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11} M_A + b_{12} M_B = \frac{\delta}{h} + \omega^1_A - \omega^3_A \\ b_{21} M_A + b_{22} M_B = \frac{\delta}{h} + \omega^2_B - \omega^3_B \end{array} \right.$$

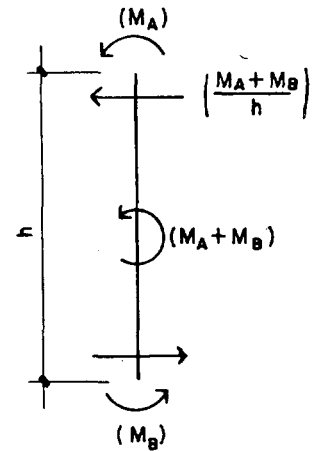


Figura 7.

y siendo:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

llegamos a:

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix}_{\text{ant.}} = B^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{h} + \omega_A^1 - \omega_A^3 \\ \frac{\delta}{h} + \omega_B^2 - \omega_B^3 \end{pmatrix}_{\text{ant.}}$$

Estableciendo la condición de equilibrio horizontal del dintel:

$$M_A + M_B = \frac{H \cdot h}{2}$$

tenemos:

$$M_A + M_B = B^{-1} \left(\frac{2\delta}{h} + \omega_A^1 - \omega_A^3 + \omega_B^2 - \omega_B^3 \right) = \frac{H \cdot h}{2}$$

o sea:

$$\frac{\delta}{h} = \frac{H \cdot h}{4} \cdot B^{-1} \frac{1}{2} (\omega_A^1 - \omega_A^3 + \omega_B^2 - \omega_B^3)$$

de modo que la expresión de pares de nudos resulta:

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix}_{\text{ant.}} = \frac{H \cdot h}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{B^{-1}}{2} \begin{pmatrix} \omega_A^1 - \omega_A^3 - \omega_B^2 + \omega_B^3 \\ -\omega_A^1 + \omega_A^3 + \omega_B^2 - \omega_B^3 \end{pmatrix} = \frac{H \cdot h}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\omega_A^1 - \omega_A^3 - \omega_B^2 + \omega_B^3}{2} \cdot B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{VI})$$

Siendo en esta expresión:

$$B^{-1} = \beta \begin{pmatrix} R_1(1 + \beta_1)[R_2(1 + \beta_2) + R_3(1 - \beta_3^2)] & R_1 R_2(1 + \beta_1)(1 + \beta_2) \cdot \beta_3 \\ R_1 R_2(1 + \beta_1)(1 + \beta_2) \cdot \beta_3 & R_2(1 + \beta_2)[R_1(1 + \beta_1) + R_3(1 - \beta_3^2)] \end{pmatrix}$$

y:

$$\beta = \frac{4 R_3}{R_1 R_2(1 + \beta_1)(1 + \beta_2) + R_1 R_3(1 + \beta_1) + R_2 R_3(1 + \beta_2) + R_3^2(1 - \beta_3^2)}$$

Operando en (VI) llegamos a:

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix}_{\text{ant.}} = \frac{H \cdot h}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2} (\omega_A^1 - \omega_A^3 - \omega_B^2 + \omega_B^3)_{\text{ant.}} \times \begin{pmatrix} [R_1 R_2(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)(1 - \beta_3) + R_1 R_3(1 + \beta_1)(1 - \beta_3^2)] \\ [-R_1 R_2(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)(1 - \beta_3) - R_2 R_3(1 + \beta_2)(1 - \beta_3^2)] \end{pmatrix} \quad (\text{VII})$$

Esta es, pues, la expresión explícita de los pares de nudos sobre barras, para toda sollicitación antimétrica sobre el marco.

3. ESTADO REAL CUALQUIERA.

Una sollicitación cualquiera puede descomponerse en suma de una simétrica y otra antimétrica.

Observando el sentido de los pares de nudos sobre arranques de piezas y el de avance elegido (figs. 4 y 6), podemos escribir como expresión de los momentos flectores en nudos.

$$\left. \begin{aligned} M_A^f &= M_A^{\text{sim.}} + M_A^{\text{ant.}} \\ M_A'^f &= M_A^{\text{sim.}} - M_A^{\text{ant.}} \\ M_B^f &= M_B^{\text{sim.}} + M_B^{\text{ant.}} \\ M_B'^f &= M_B^{\text{sim.}} - M_B^{\text{ant.}} \end{aligned} \right\} \quad \text{(VIII)}$$

Y sustituyendo aquí los valores de $(M_A^{\text{sim.}}, M_B^{\text{sim.}}, M_A^{\text{ant.}}, M_B^{\text{ant.}})$, de (III) y (VII), llegamos a:

$$\left. \begin{aligned} M_A^f &= \alpha R_1 (1 - \beta_1) [R_2 (1 - \beta_2) + R_3 (1 - \beta_3^2)] (\omega_A^1 - \omega_A^3)^{\text{sim.}} - \alpha R_1 R_2 (1 - \beta_1) (1 - \beta_2) \beta_3 (\omega_B^3 - \omega_B^2)^{\text{sim.}} + \\ &+ \frac{\beta}{2} [R_1 R_2 (1 + \beta_1) (1 + \beta_2) (1 - \beta_3) + R_1 R_3 (1 + \beta_1) (1 - \beta_3^2)] (\omega_A^1 - \omega_A^3 - \omega_B^2 + \omega_B^3)^{\text{ant.}} + \frac{H \cdot h}{4} \\ M_A'^f &= \alpha R_1 (1 - \beta_1) [R_2 (1 - \beta_2) + R_3 (1 - \beta_3^2)] (\omega_A^1 - \omega_A^3)^{\text{sim.}} - \alpha R_1 R_2 (1 - \beta_1) (1 - \beta_2) \beta_3 (\omega_B^3 - \omega_B^2)^{\text{sim.}} - \\ &- \frac{\beta}{2} [R_1 R_2 (1 + \beta_1) (1 + \beta_2) (1 - \beta_3) + R_1 R_3 (1 + \beta_1) (1 - \beta_3^2)] (\omega_A^1 - \omega_A^3 - \omega_B^2 + \omega_B^3)^{\text{ant.}} - \frac{H \cdot h}{4} \\ M_B^f &= -\alpha R_1 R_2 (1 - \beta_1) (1 - \beta_2) \beta_3 (\omega_A^1 - \omega_A^3)^{\text{sim.}} + \alpha R_2 (1 - \beta_2) [R_1 (1 - \beta_1) + R_3 (1 - \beta_3^2)] (\omega_B^3 - \omega_B^2)^{\text{sim.}} - \\ &- \frac{\beta}{2} [R_1 R_2 (1 + \beta_1) (1 + \beta_2) (1 - \beta_3) + R_2 R_3 (1 + \beta_2) (1 - \beta_3^2)] (\omega_A^1 - \omega_A^3 - \omega_B^2 + \omega_B^3)^{\text{ant.}} + \frac{H \cdot h}{4} \\ M_B'^f &= -\alpha R_1 R_2 (1 - \beta_1) (1 - \beta_2) \beta_3 (\omega_A^1 - \omega_A^3)^{\text{sim.}} + \alpha R_2 (1 - \beta_2) [R_1 (1 - \beta_1) + R_3 (1 - \beta_3^2)] (\omega_B^3 - \omega_B^2)^{\text{sim.}} + \\ &+ \frac{\beta}{2} [R_1 R_2 (1 + \beta_1) (1 + \beta_2) (1 - \beta_3) + R_2 R_3 (1 + \beta_2) (1 - \beta_3^2)] (\omega_A^1 - \omega_A^3 - \omega_B^2 + \omega_B^3)^{\text{ant.}} - \frac{H \cdot h}{4} \end{aligned} \right\} \quad \text{(IX)}$$

que son las expresiones de los momentos flectores en los cuatro nudos para cualquier hipótesis de carga, en función de las rotaciones isostáticas precedidas por el estado de carga simétrico y antimétrico en que aquélla se descompone.

Para evitar la necesidad de esta descomposición previa, observamos en la figura 8 que para acciones sobre el dintel y base se cumplen las siguientes relaciones:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_A^1 &= \omega_A^1 \text{ sim.} + \omega_A^1 \text{ ant.} \\ \omega_A^1' &= -\omega_A^1 \text{ sim.} + \omega_A^1 \text{ ant.} \end{aligned} \right.$$

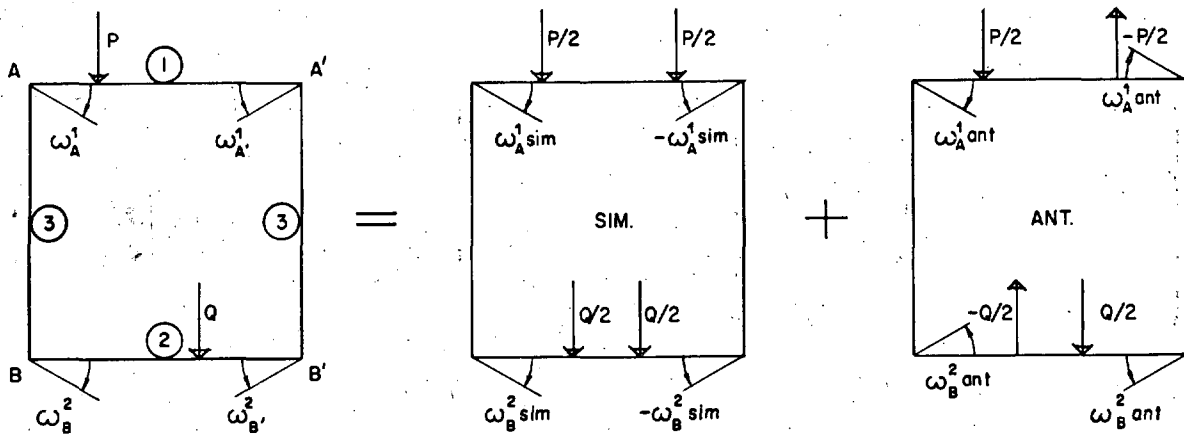


Figura 8.

luego:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_A^1 \text{ sim.} &= \frac{1}{2} (\omega_A^1 - \omega_{A'}^1) \\ \omega_A^1 \text{ ant.} &= \frac{1}{2} (\omega_A^1 + \omega_{A'}^1) \end{aligned} \right.$$

e igualmente:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_B^2 \text{ sim.} &= \frac{1}{2} (\omega_B^2 - \omega_{B'}^2) \\ \omega_B^2 \text{ ant.} &= \frac{1}{2} (\omega_B^2 + \omega_{B'}^2) \end{aligned} \right.$$

(X)

En la figura 9 vemos que en cuanto a acciones sobre pantallas tenemos las mismas relaciones, y podemos escribir:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_A^3 \text{ sim.} &= \frac{1}{2} (\omega_A^3 - \omega_{A'}^3) \\ \omega_A^3 \text{ ant.} &= \frac{1}{2} (\omega_A^3 + \omega_{A'}^3) \\ \omega_B^3 \text{ sim.} &= \frac{1}{2} (\omega_B^3 - \omega_{B'}^3) \\ \omega_B^3 \text{ ant.} &= \frac{1}{2} (\omega_B^3 + \omega_{B'}^3) \end{aligned} \right.$$

(XI)

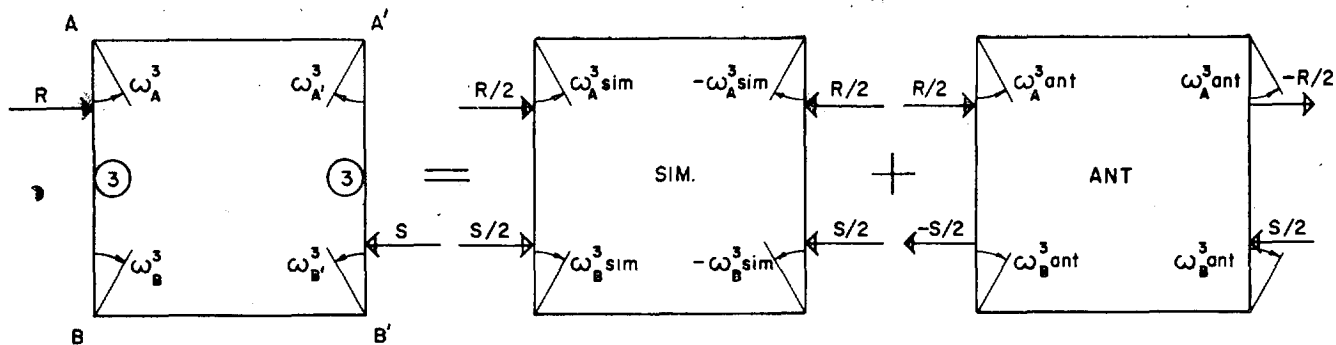


Figura 9.

Entonces, podemos decir, que:

$$\left. \begin{aligned}
 (\omega_A^1 - \omega_{A'}^3) \text{ sim.} &= \frac{1}{2} (\omega_A^1 - \omega_{A'}^1, -\omega_A^3 + \omega_{A'}^3) \\
 (\omega_B^3 - \omega_{B'}^2) \text{ sim.} &= \frac{1}{2} (\omega_B^3 - \omega_{B'}^3, -\omega_B^2 + \omega_{B'}^2) \\
 (\omega_A^1 - \omega_{A'}^3) \text{ ant.} &= \frac{1}{2} (\omega_A^1 + \omega_{A'}^1, -\omega_A^3 - \omega_{A'}^3) \\
 (\omega_B^3 - \omega_{B'}^2) \text{ ant.} &= \frac{1}{2} (\omega_B^3 + \omega_{B'}^3, -\omega_B^2 - \omega_{B'}^2)
 \end{aligned} \right\} \quad \text{(XII)}$$

y hablando de diferencias de rotaciones en cada nudo, para usar un lenguaje más compacto, o sea, llamando:

$$\begin{aligned}
 (\omega_A^1 - \omega_{A'}^3) &= \Delta \omega_A; & (\omega_{A'}^1 - \omega_A^3) &= \Delta \omega_{A'} \\
 (\omega_B^3 - \omega_{B'}^2) &= \Delta \omega_B; & (\omega_{B'}^3 - \omega_B^2) &= \Delta \omega_{B'}
 \end{aligned} \quad \text{(XIII)}$$

podemos escribir las expresiones de los flectores en los nudos como sigue:

$$\begin{pmatrix} M_{A_f}^A \\ M_{A_f}^{A'} \\ M_{B_f}^{B'} \\ M_{B_f}^B \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} (\omega_A^1 - \omega_{A'}^3) \text{ sim.} \\ (\omega_B^3 - \omega_{B'}^2) \text{ sim.} \\ (\omega_A^1 - \omega_{A'}^3) \text{ ant.} \\ (\omega_B^3 - \omega_{B'}^2) \text{ ant.} \end{pmatrix} + \frac{H \cdot h}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siendo K la matriz de los coeficientes de las expresiones (IX).

Y contando con (XII) y (XIII), tenemos:

$$\begin{pmatrix} M_{A_f}^A \\ M_{A_f}^{A'} \\ M_{B_f}^{B'} \\ M_{B_f}^B \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \Delta \omega_A \text{ sim.} \\ \Delta \omega_B \text{ sim.} \\ \Delta \omega_A \text{ ant.} \\ \Delta \omega_B \text{ ant.} \end{pmatrix} + \frac{H \cdot h}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{K}{2} \begin{pmatrix} \Delta \omega_A - \Delta \omega_{A'} \\ \Delta \omega_B - \Delta \omega_{B'} \\ \Delta \omega_A + \Delta \omega_{A'} \\ \Delta \omega_B + \Delta \omega_{B'} \end{pmatrix} + \frac{H \cdot h}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{(XIV)}$$

La expresión de la matriz K puede simplificarse empleando los siguientes parámetros auxiliares:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha R_1 (1 - \beta_1) [R_2 (1 - \beta_2) + R_3 (1 - \beta_3)] \\ A_2 = -\alpha R_1 R_2 (1 - \beta_1) (1 - \beta_2) \beta_3 \\ B_1 = \frac{\beta}{2} [R_1 R_2 (1 + \beta_1) (1 + \beta_2) (1 - \beta_3) + R_1 R_3 (1 + \beta_1) (1 - \beta_3)] \\ B_2 = \frac{\beta}{2} [R_1 R_2 (1 + \beta_1) (1 + \beta_2) (1 - \beta_3) + R_2 R_3 (1 + \beta_2) (1 - \beta_3)] \end{array} \right. \quad (XV)$$

Entonces, es:

$$K = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & B_1 & B_1 \\ A_1 & A_2 & -B_1 & -B_1 \\ A_2 & A_1 \frac{R_2}{R_1} & -B_2 & -B_2 \\ A_2 & A_1 \frac{R_2}{R_1} & B_2 & B_2 \end{pmatrix}$$

Con lo que la expresión final compacta de los momentos flectores en los cuatro nudos, para cualquier hipótesis de carga, es:

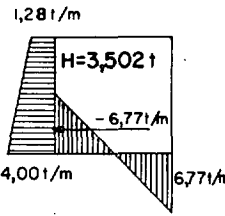
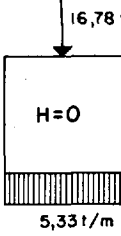
$$\begin{pmatrix} MA_f \\ MA'_f \\ MB'_f \\ MB_f \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & B_1 & B_1 \\ A_1 & A_2 & -B_1 & -B_1 \\ A_2 & A_1 \frac{R_2}{R_1} & -B_2 & -B_2 \\ A_2 & A_1 \frac{R_2}{R_1} & B_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \omega_A - \Delta \omega_{A'} \\ \Delta \omega_B - \Delta \omega_{B'} \\ \Delta \omega_A + \Delta \omega_{A'} \\ \Delta \omega_B + \Delta \omega_{B'} \end{pmatrix} + \frac{H \cdot h}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (XVI)$$

Viniendo los coeficientes A y B , dados por las expresiones (XV), y las funciones de rotaciones isostáticas por (XIII).

4. APLICACION A UN CASO CONCRETO.

Estudiando el marco de la figura 1 encontramos los siguientes valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = 1,835 \frac{EI_0}{I} = 0,388 \cdot E \cdot 10^{-3}; \beta_1 = 0,642 \\ R_2 = R_1 = 0,388 \cdot E \cdot 10^{-3}; \beta_2 = 0,642 \\ R_3 = 2,631 \frac{EI_0}{I} = 0,228 \cdot E \cdot 10^{-3}; \beta_3 = 0,720 \end{array} \right.$$

	HIPOTESIS			
ROTACIONES ISOSTATICAS	ϵ_{A^1}	0	- 14.364/E	- 8.725/E
	$\epsilon_{A'}$	0	+ 14.364/E	+ 8.725/E
	ϵ_{A^3}	0	0	- 18.723/E
	ϵ_{B^3}	0	0	+ 19.036/E
	ϵ_{B^2}	- 583/E	- 9.296/E	- 8.725/E
	ϵ_B^2	- 583/E	+ 9.296/E	+ 8.725/E
	ϵ_B^3	- 11.085/E	0	- 19.036/E
	ϵ_A^3	+ 10.771/E	0	+ 18.723/E
DIFERENCIAS	$\Delta \epsilon_A$	- 10.771/E	- 14.364/E	- 27.448/E
	$\Delta \epsilon_{A'}$	0	+ 14.364/E	+ 27.448/E
	$\Delta \epsilon_{B'}$	+ 583/E	+ 9.296/E	+ 27.761/E
	$\Delta \epsilon_B$	- 10.502/E	- 9.296/E	- 27.761/E
FUNCIONES DE ROTACIONES	$\Delta \omega_A - \Delta \omega_{A'}$	- 10.771/E	- 28.728/E	- 54.896/E
	$\Delta \omega_B - \Delta \omega_{B'}$	- 11.085/E	- 18.592/E	- 55.522/E
	$\Delta \omega_A + \Delta \omega_{A'}$	- 10.771/E	0	0
	$\Delta \omega_B + \Delta \omega_{B'}$	- 9.919/E	0	0
RESULTADOS	M_f^A	+ 0,662	- 3,111	- 4,818
	$M_f^{A'}$	- 2,522	- 3,111	- 4,818
	$M_f^{B'}$	+ 3,018	- 1,053	- 4,946
	M_f^B	- 5,005	- 1,053	- 4,946

Los parámetros α y β valen:

$$\alpha = \frac{8.469}{E}; \quad \beta = \frac{1.264}{E}$$

y los coeficientes de la matriz K son:

$$A_1 = 293 \cdot 10^{-6} \cdot E$$

$$A_2 = -118 \cdot 10^{-6} \cdot E$$

$$B_1 = 116 \cdot 10^{-6} \cdot E$$

$$B_2 = 116 \cdot 10^{-6} \cdot E$$

con lo que la expresión final de los momentos flectores en los cuatro nudos, para cualquier hipótesis de carga, es:

$$\begin{pmatrix} MA_f \\ MA'_f \\ MB'_f \\ MB_f \end{pmatrix} = \frac{10^{-6} \cdot E}{2} \begin{pmatrix} 293 & -118 & 116 & 116 \\ 293 & -118 & -116 & -116 \\ -118 & 293 & -116 & -116 \\ -118 & 293 & 116 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \omega_A - \Delta \omega_{A'} \\ \Delta \omega_B - \Delta \omega_{B'} \\ \Delta \omega_A + \Delta \omega_{A'} \\ \Delta \omega_B + \Delta \omega_{B'} \end{pmatrix} + 0,8 H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Las diversas hipótesis de carga se indican en el cuadro adjunto. Por supuesto, en cada hipótesis deben cumplirse las condiciones de equilibrio general del marco, por lo que en cada caso se incluye la correspondiente reacción de la cimentación.

Los momentos flectores vienen dados en m. Tm./m. de ancho.