

# EL COEFICIENTE DE IMPACTO EN PUENTES DE FERROCARRIL<sup>(\*)</sup>

Por E. DE ALARCON ALVAREZ

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

*El estudio teórico-práctico del coeficiente de impacto ha permitido obtener una fórmula de gran generalidad —en cuanto a material y tipos estructurales— para puentes de ferrocarril. Se presenta dicha fórmula en forma de gráfico de alineación doble, y se indican procedimientos para determinar las frecuencias propias en los casos más corrientes.*

## El coeficiente de impacto en puentes de ferrocarril.

Durante cierto tiempo, y siempre con resultado nulo, el estudio experimental del coeficiente de impacto se ha realizado de espaldas a los conocimientos teóricos. La consecuencia lógica ha sido la multiplicidad de fórmulas, cada una de las cuales venía a negar a las anteriores sin añadir nada nuevo.

Los resultados de las teorías daban, sin embargo, con impresionante machaconería, coeficientes que dependen de tres cantidades fundamentales: la velocidad de paso, la longitud del puente y su período propio de vibración. Las dos primeras son evidentes y, desde los primeros ensayos, se introdujeron en las diferentes fórmulas de impacto. (Algunos autores, no obstante, prefirieron hacer desaparecer  $V$  con objeto de simplificar la fórmula; para ello tomaban un límite superior razonable (1)). La presencia del período, sin embargo, está enmascarada por otros factores. En efecto, sabemos que, v. gr., en una viga, simplemente apoyada, existe una dependencia directa del período con el material y las características resistentes de la pieza. La constancia del primero y la relación del segundo con la luz permitían, no obstante, obtener leyes muy ajustadas al fenómeno real para cada material. Durante mucho tiempo, los grandes puentes ferroviarios han sido coto cerrado de las estructuras metálicas, pero la competitividad actual de los tipos armado y pretensado ha inducido a profundizar en el estudio de un problema que es decisivo para la economía general.

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la redacción de esta Revista hasta el 31 de diciembre de 1971.

En otro lugar (2) hemos presentado los notables resultados obtenidos a través de la recopilación de datos de ensayos en puentes metálicos. Las fórmulas recomendadas en 1963, por la Unión Internacional de Ferrocarriles, permitían abandonar la práctica abusiva impuesta por nuestra instrucción.

También hemos dado las fórmulas teóricas aplicables para cada caso de carga (3) y siempre aparecía la enorme diferencia con nuestro reglamento de puentes.

Recientemente (en abril de 1970) se reunió en Utrecht la Comisión de la UIC, encargada de la cuestión D-23, "Determinación de los efectos dinámicos en los puentes", y sus resultados creemos que resuelven, definitivamente, el dilema entre teoría y práctica. Abandonando viejos prejuicios, se han procurado ajustar los datos experimentales a la teoría y, estadísticamente, se ha estudiado la correlación entre el coeficiente de impacto y el coeficiente  $K =$

$$V T \\ = \frac{2 L}{K}.$$

La gran aproximación obtenida ha permitido recomendar la fórmula (4):

$$\varphi = 0,65 \frac{K}{1 - K + K^2},$$

como representación del impacto de modo general. Es decir, dicha fórmula es válida para puentes de ferrocarril de vía sencilla sea cualquiera su forma, estructura resistente o material con la limitación:

$$L \geq 6 \text{ m.}$$

$$V \leq 200 \text{ Km/h.}$$

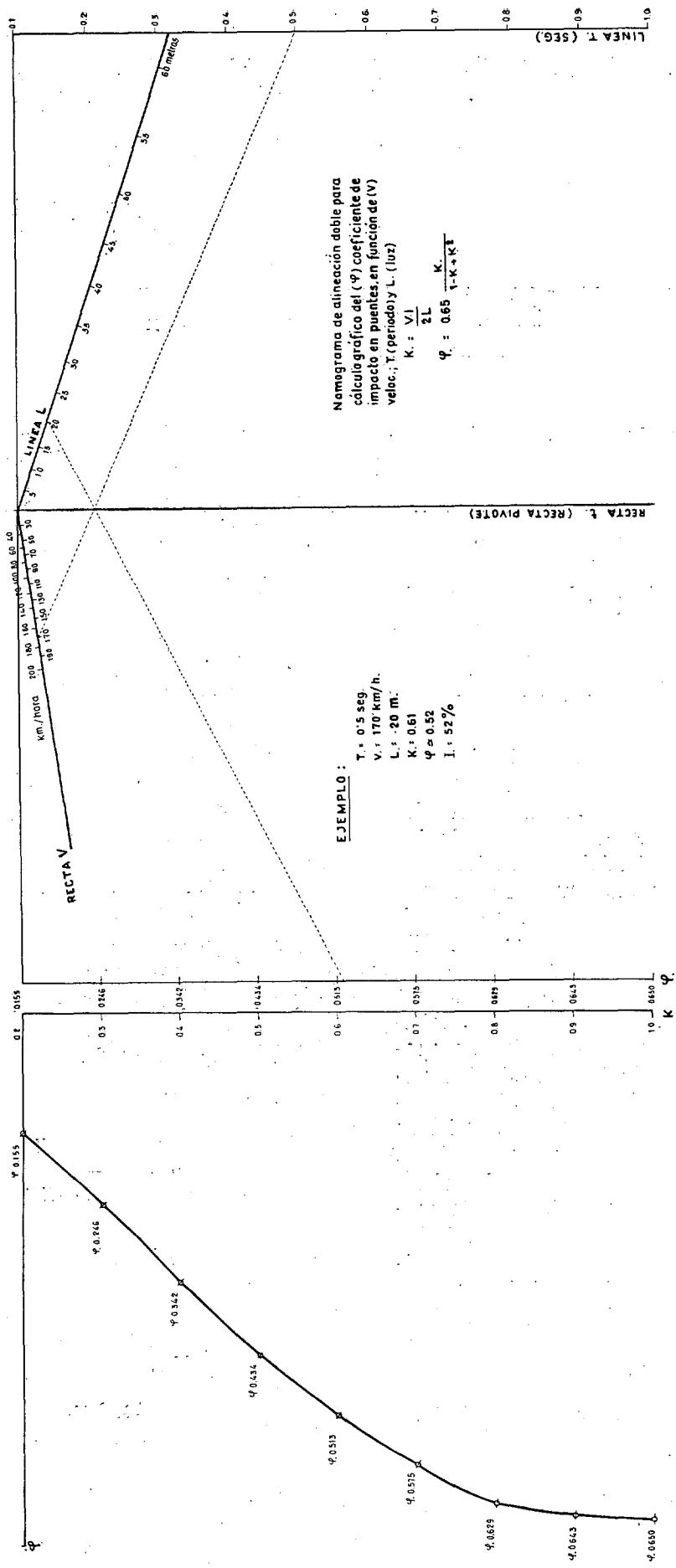


Figura 1.

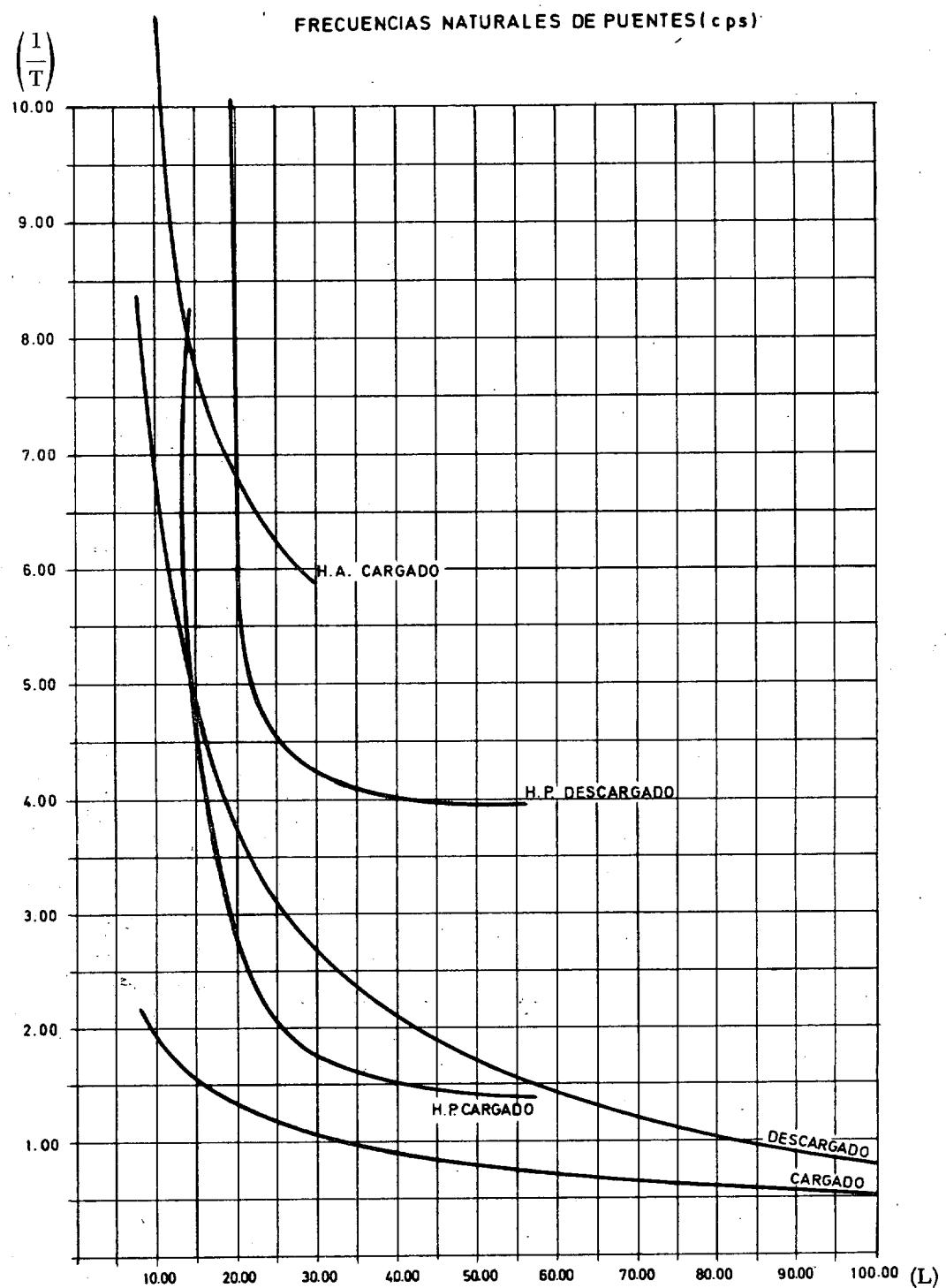


Figura 2.

La trascendencia de esta fórmula no precisa ser justificada, pues su generalidad intrínseca salta a la vista.

Para valores de  $L$  inferiores a los 6 m se aconseja, sencillamente:

$$\varphi = 33 \times 10^{-4} V.$$

$$\text{con } \left\{ \begin{array}{l} V \leq 200 \\ \varphi \leq 0,65 \end{array} \right.$$

Observemos que se limita el coeficiente de impacto al valor del 65 por 100, realmente difícil de obtener en la práctica. Esta expresión es utilizable para largueros y vigas principales, indistintamente.

Como ya hemos dicho, los gráficos resultan del análisis estadístico de numerosos resultados experimentales; los valores introducidos en el estudio estadístico corresponden al máximo de los efectos dinámicos registrados en el curso de cada ensayo. Por tanto, implícitamente, estos valores toman en consideración los efectos más desfavorables de los fenómenos dinámicos y, en particular, ciertos efectos de resonancia que se pueden desarrollar en los puentes reales. Conviene advertir, además, que los ensayos se han realizado con composiciones sumamente desfavorables frente a los casos de trenes normales, por lo que se introduce un coeficiente de seguridad respecto a las cargas habituales. Hay que hacer notar, asimismo, que en los resultados se encuentran incluidos puentes de edad avanzada y conservación no especialmente cuidada; en los puentes actuales son de esperar resultados menores.

Con objeto de facilitar la fórmula, se ha preparado un gráfico de alineaciones (fig. 1) que permite obtener el coeficiente de impacto. Para poner de manifiesto la relación ( $K$ ;  $\varphi$ ) se han superpuesto las escalas de estos parámetros

y se ha dibujado la curva que los relaciona (\*).

Como en cada caso los valores de  $L$  y  $V$  son conocidos, bastará disponer de valores  $T$  para que la fórmula sea inmediata.

A este respecto se podría pensar en la frecuencia del puente descargado; sin embargo, físicamente, la frecuencia significante es la del puente completamente cargado. Tomando como sobrecargas las de la instrucción vigente y como características propias de los mismos, los resultados de un estudio estadístico realizado en puentes de nuestra Renfe, hemos preparado gráficos que dan las frecuencias propias para puentes de un tramo metálicos, de hormigón armado y de hormigón pretensado (fig. 2).

### Viga de un vano.

Si la viga está vibrando, la carga que soporta es la fuerza de inercia alterna, o sea:

$$q = -p A \ddot{y},$$

y

$$\frac{p A}{EI} \ddot{y} + y'''' = 0$$

Se pueden buscar soluciones:

$$y = Y(x) \cdot \sin(p t + \alpha),$$

donde:

$$Y(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x$$

en la que:

$$\lambda^4 = p^2 \frac{p A}{EI}$$

(\*) La curva ha sido dibujada con la colaboración del excelente ingeniero técnico de Obras Públicas D. Antonio Marinello Calvo.

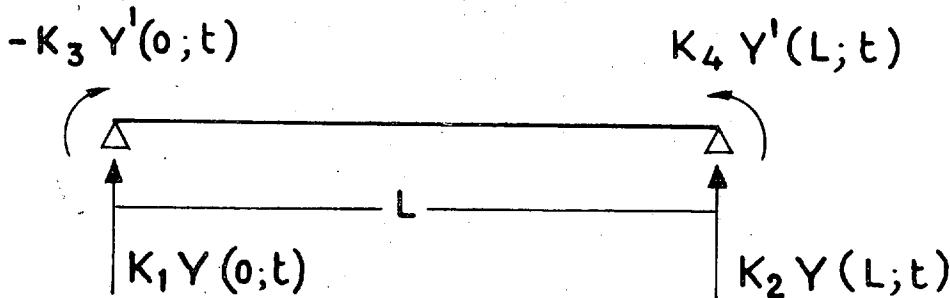


Figura 3.

La determinación de  $Y$  depende, pues, de seis constantes, cuatro de las cuales,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ , se determinan de acuerdo con las condiciones de borde y las dos restantes,  $p$  y  $\alpha$ , a través de dos condiciones de tiempo.

Si establecemos las cuatro condiciones de borde, para que el sistema sea homogéneo el

determinante de los coeficiente debe anularse, lo que nos ofrece la ecuación de las frecuencias, que es lo que más nos interesa.

En el caso general de la viga indicada en la figura 3, apoyada sobre soportes elásticos de constantes  $k_1$  y  $k_2$  para las reacciones y  $k_3$  y  $k_4$  para los giros, el determinante que nos da las frecuencias es el siguiente (5):

$$\begin{array}{c}
 \frac{k_1}{EI} \\
 -\lambda^3 \\
 \hline
 \frac{k_3}{EI} \\
 -\lambda \\
 \hline
 -\lambda^3 \cos \lambda L - \frac{k_2}{EI} \sin \lambda L, \quad \lambda^3 \sin \lambda L - \frac{k_2}{EI} \cos \lambda L, \\
 -\lambda \sin \lambda L + \frac{k_4}{EI} \cos \lambda L, \quad -\lambda \cos \lambda L - \frac{k_4}{EI} \sin \lambda L, \\
 \hline
 \frac{k_1}{EI} \sinh \lambda L - \frac{k_1}{EI} \cosh \lambda L, \quad \lambda^3 \cosh \lambda L - \frac{k_2}{EI} \sinh \lambda L, \\
 \lambda \sinh \lambda L + \frac{k_4}{EI} \sinh \lambda L, \quad \lambda \cosh \lambda L + \frac{k_4}{EI} \cosh \lambda L
 \end{array}$$

### CUADRO DE FREBERG Y KEMLER

VOLADIZO				
SIMPLÉMENTE SOPORTADA				
EXTREMOS EMPOTRADOS				
EXTREMOS LIBRES				
UN EXTREMO EMPOTRADO OTRO ARTICULADO				
UN EXTREMO ARTICULADO OTRO LIBRE				

$$f_n = C \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$f_n$  = FRECUENCIA NATURAL ( $\frac{1}{\text{seg}}$ )

$E$  = MODULO DE ELASTICIDAD ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )

$I$  = MOMENTO DE INERCIA ( $\text{cm}^4$ )

$m$  = MASA DE LA VIGA ( $\text{kg}/\text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{seg}^{-2}$ )

$L$  = LONGITUD (cm)

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{cm}^4}{\text{kg} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{seg}^2 \cdot \text{cm}^4} = \frac{1}{\text{seg}^2}$$

Figura 4.

Imponiendo las condiciones de borde para cada caso e igualando a cero el determinante anterior, al resolver la ecuación resultante obtendríamos las frecuencias y, ya fácilmente, los modos.

A continuación se incluye la tabla de Freberg y Kemler (6), que nos permite obtener, de un modo inmediato los resultados para los casos más corrientes de ligaduras en los bordes.

Por la rapidez de su aplicación se incluyen también las interesantes curvas de Zignoli (7), que nos dan directamente la frecuencia fundamental de piezas rectas de acero en función del

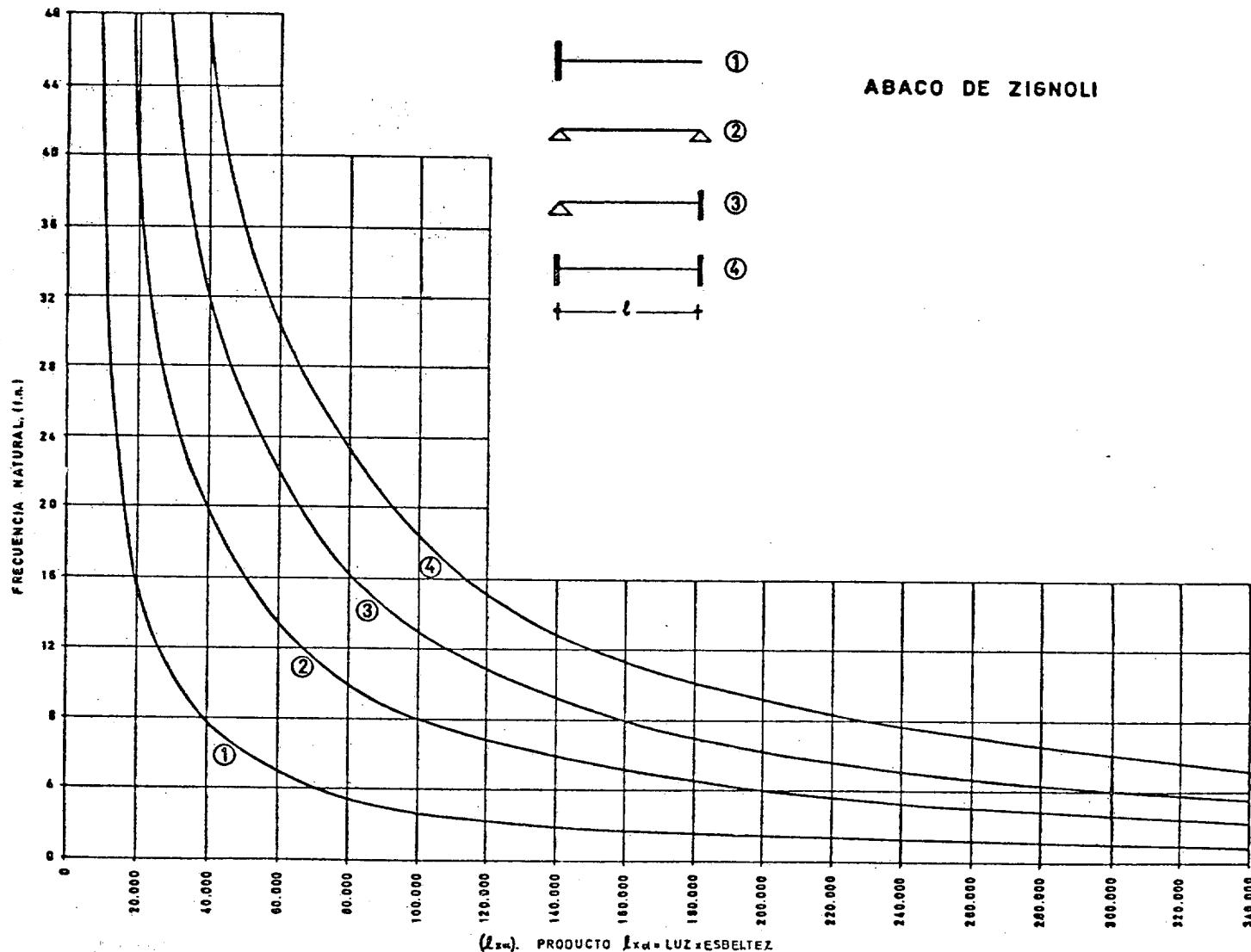
producto  $\beta L$ , donde  $\beta$  es la esbeltez de la pieza  $\beta = L/i$  ( $i$  = radio de giro).

Naturalmente, las curvas son válidas si, además del peso propio, actúa una sobrecarga uniformemente repartida  $q$  Kg/ml. Por ejemplo, si se admite  $\rho = 7,9$  Kg/dm<sup>3</sup> sobre la sección A, deberemos considerar un  $\Delta A = 10 q/7,9$  cm<sup>2</sup>.

$$A_{f_{i,c}} = A + \Delta A \rightarrow i_f = \sqrt{\frac{I}{A + \Delta A}} \rightarrow \beta = \frac{L}{i_f}$$

Entrando en las curvas con este valor obten-

Figura 5.



dríamos las vibraciones en el nuevo estado. Una primera consecuencia, que se desprende claramente de las curvas, es la disminución del modo fundamental que se produce por la presencia de la sobrecarga estática.

### Puentes de vía doble.

En los puentes de vía doble la UIC ha encontrado experimentalmente un curioso fenómeno: el puente presenta idéntica mayoración a otro de vía sencilla de la misma luz. Por ello, recomienda utilizar un coeficiente de acuerdo con esta observación. Evidentemente el problema teórico se complica en este caso por la aparición de oscilaciones de torsión que se acoplan con las de flexión.

En otro artículo estudiaremos este fenómeno mediante la aplicación del método energético y

la utilización de los modos normales fundamentales. De este estudio se deduce que la frecuencia fundamental es menor que en el caso en que no exista acoplamiento. Utilizando un ejemplo concreto hemos demostrado que las previsiones de la ORE se cumplen con gran exactitud, y por ello la norma indicada debe ser aceptada sin más comentarios.

### Puentes continuos.

Los ensayos UIC abarcan, también, este caso de tanto abolengo en las redes ferroviarias. Durante algún tiempo ha sido un problema la determinación del modo fundamental en estas vigas, pero desde los trabajos de Raithel (véase referencia 9) puede utilizarse un método iterativo de gran sencillez. En esencia, se procede como sigue: si aislamos

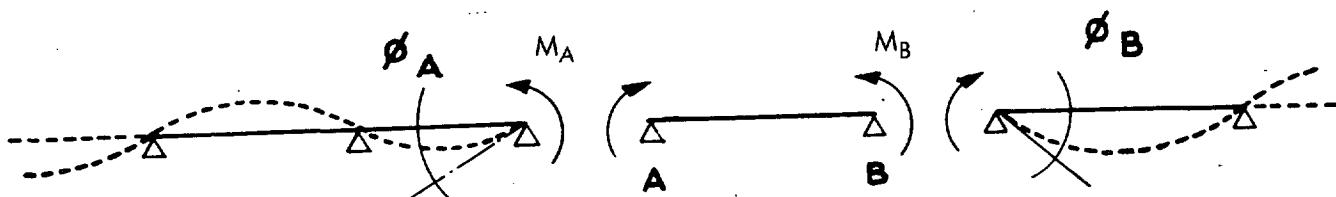


Figura 6.

un vano  $AB$  de la viga, los giros extremos se pueden poner como  $M_A \phi_A$  y  $M_B \phi_B$  si  $\phi_A$  y  $\phi_B$  son los debidos a un momento unidad aplicado a uno y otro lado del vano en cuestión.

Para la viga  $AB$  podemos escribir las siguientes condiciones de borde:

$$Y(0) = Y(L) = 0 \quad \dots \quad 2 \text{ ecuaciones}$$

$$Y'(0) = M_A \phi_A = EI Y''(0) \phi_A \dots \quad 1 \text{ ecuación}$$

$$Y'(L) = M_B \phi_B = -EI''(L) \phi_B \dots \quad 1 \text{ ecuación}$$

NOTA. — Se han despreciado las deformaciones debidas al esfuerzo cortante y los términos de la inercia rotatoria. La ecuación del movimiento, que se obtiene al incluir esos efectos, se conoce con el nombre de "ecuación de Timoshenko", y presenta la forma:

$$EI y'' = f_1(x) - \frac{1}{K' G A} f'_1(x) - f_2(x).$$

Si aplicamos estas condiciones a la función solución general de la viga

$$Y = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x$$

y eliminamos las constantes, para que el sistema sea homogéneo, resulta la ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{K'_A + K'_B}{4} \lambda L (\cos \lambda L \sinh \lambda L - \sin \lambda L \cosh \lambda L) - \\ & - \frac{K'_A K'_B}{8} (\lambda L)^2 (\sin \lambda L \sinh \lambda L + \\ & + \cos \lambda L \cosh \lambda L) - 1 = 0, \end{aligned}$$

donde:

$$K'_A = \frac{4 EI \phi_A}{L}$$

y

$$K'_B = \frac{4EI\phi_B}{L}$$

es decir, resulta una función  $F(L; K'_A; K'_B) = 0$ , que se puede representar, gráficamente, para los valores más interesantes de sus factores (figura 7). Quiere esto decir que si conociéramos

En el esquema expuesto son sencillos los pasos 1, 3 y 4, pero necesitamos evaluar los  $\phi$ .

El problema abarca otros dos: determinar el ángulo de una viga en sus apoyos cuando en los extremos actúan momentos armónicos y conocer los momentos que actúan en los apoyos del resto de la viga continua cuando en su extremo aplicamos el par unidad.

Ambos problemas se resuelven en (9), pero

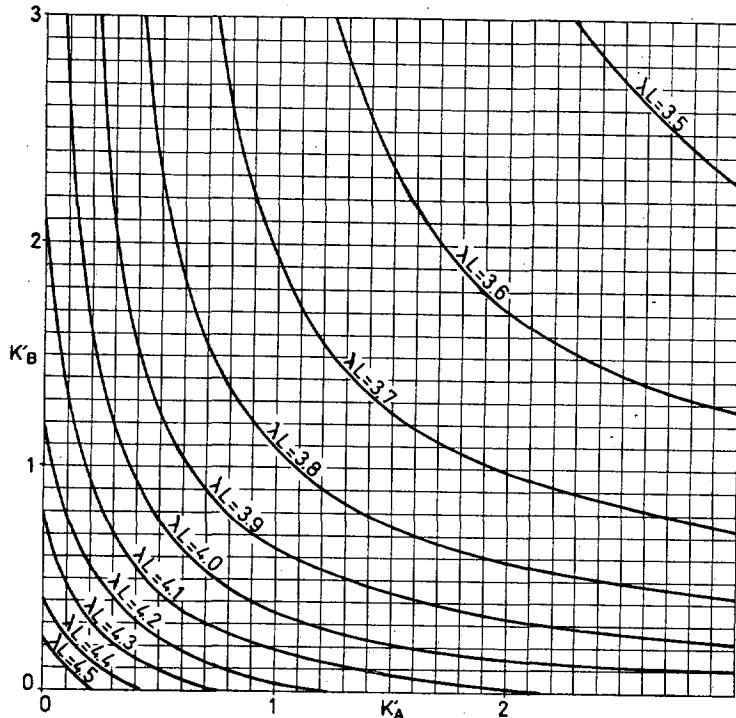


Figura 7.

$\phi_A$  y  $\phi_B$  de esa curva, sacaríamos  $L$ . El procedimiento consistirá en obrar por tanteos mediante el esquema siguiente:

1. Suponemos un valor de  $(\lambda L)_1$ .
2. Buscamos los correspondientes  $\phi$ .
3. Formamos las  $K'$ .
4. Buscamos el correspondiente  $(\lambda L)_2$  en las tablas.

Si este valor no coincide con el supuesto en un principio, repetiremos el proceso hasta que

$$(\lambda L)_i \simeq (\lambda L)_{i+1}.$$

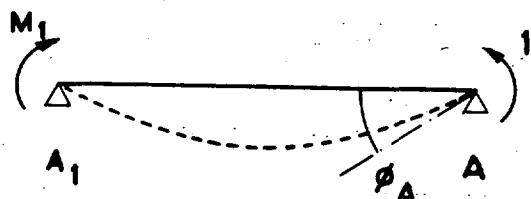


Figura 9.

a continuación exponemos un ejemplo en el que se aclara el método operatorio. Para ello es ne-

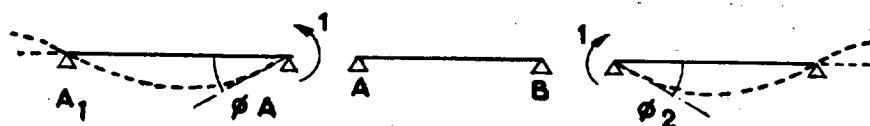


Figura 8.

cesaria la curva (10), que da los coeficientes de las receptancias  $\alpha$ :

$$\alpha_{11} = \frac{L \theta}{3 EI},$$

$$\alpha_{12} = \psi \frac{L}{6 EI}$$

(se llama receptancia a la amplitud de vibración lineal o angular de un punto cuando un par o una fuerza unidad armónica se aplican en otro punto).

En función de las características de un vano:

$$L_n = A_n L_0,$$

$$M_n = B_n M_0,$$

$$E_n I_n = C_n E_0 I_0,$$

$$H_n^2 = \frac{B_n}{C_n},$$

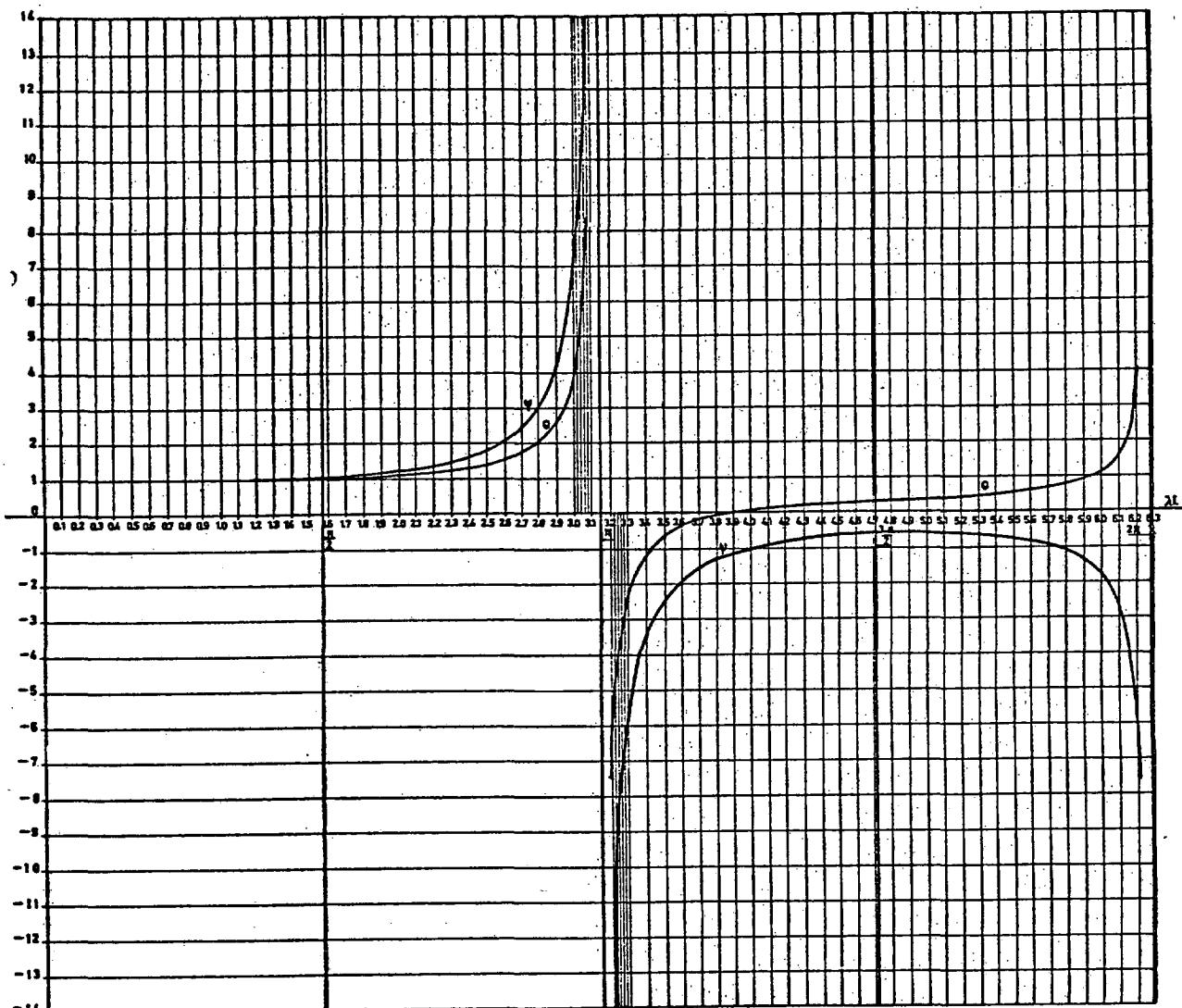
$$K_n = A_n H_n,$$

$$p^2 = \frac{\lambda_n^4 E_n I_n}{m_n} = \frac{\lambda_0^4 E_0 I_0}{m_0},$$

$$\lambda_n = h_n \lambda_0$$

$$\lambda_n L_n = K_n \lambda_0 L_0.$$

Figura 10.



CURVAS  $\theta$ - $\psi$ - $\lambda$  -

Sea, por ejemplo, la viga que esquematizamos:

Las características estructurales son:

Rigideces de tramo.

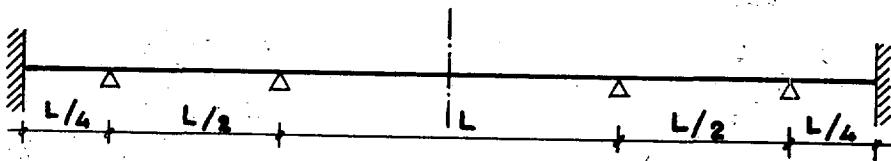


Figura 11.

$$K_1 = \frac{4 E I_1}{L_1} \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right) = \frac{4 E_0 I_0}{0,25 L_0} \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right)$$

$$K_2 = \frac{3 E I_1}{L_2} \frac{1}{\theta_2} = \frac{3 E_0 I_0}{0,5 L_0} \frac{1}{\theta_2},$$

$$K_1 + K_2 = \frac{E_0 I_0}{L_0} \left[ 16 \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right) + 6 \frac{1}{\theta_2} \right]$$

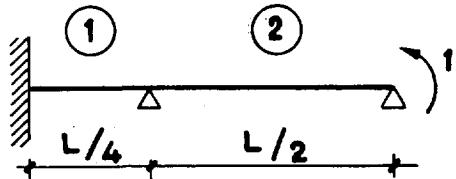


Figura 12.

Empecemos tanteando:

Rigideces relativas (factores de distribución):

$$\lambda_0 L_0 = 4,$$

$$r_1 = \frac{16 \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right)}{16 \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right) + 6 \frac{1}{\theta_2}},$$

$$r_2 = \frac{6 \frac{1}{\theta_2}}{16 \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right) + 6 \frac{1}{\theta_2}},$$

$$\begin{cases} k_1 \lambda_0 L_0 = 1 \\ k_2 \lambda_0 L_0 = 2 \end{cases}$$

$$\theta_1 = \theta(1) = 1,006$$

$$\psi_1 = \psi(1) = 1,012$$

$$\theta_2 = \theta(2) = 1,1212$$

$$\psi_2 = \psi(2) = 1,236$$

$$c_1 = \frac{\psi_1}{2 \theta_1} = \frac{1,012}{2,012} = 0,5$$

$$c_2 = \frac{\psi_2}{2 \theta_2} = \frac{1,236}{2,242} = 0,55$$

$$\frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} = \frac{3 \times 1,006}{4 - 1,012^2} = \frac{3,018}{2,97} = 1,03$$

$$\frac{1}{\theta_2} = \frac{1}{1,1212} = 0,899 \quad \left. \right\}$$

$$r_1 = \frac{16 \times 1,01}{16 \times 1,01 + 6 \cdot 0,89} = \frac{16,2}{21,59} = 0,75$$

$$r_2 = 0,25$$

Factores de transmisión:

$$C_1 = \frac{\psi_1}{2 \theta_1},$$

$$C_2 = \frac{\psi_2}{2 \theta_2}.$$

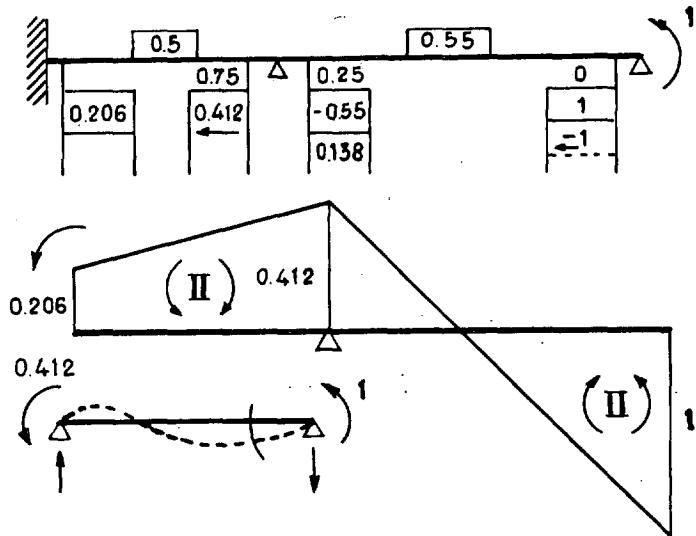


Figura 13.

$$\phi_A = 1 \cdot \frac{\theta_2 L}{3 EI} - 0,412 \cdot \frac{\psi_2 L}{6 EI}$$

$$\phi_A = \frac{L}{3 EI} (1,1212 - 0,206 \cdot 1,236) = \frac{L}{3 EI} \cdot 0,866$$

$$K'_A = K'_B = \frac{4 E_0 I_0}{L_0} \quad \phi_A = 4 \frac{EI}{L_0} \cdot \frac{L_2}{3 EI} \cdot 0,866 =$$

$$= \frac{4}{3} \frac{I}{2} \cdot 0,866; K'_A = K'_B = 0,58; \lambda_0 L_0 = 4,02.$$

Como la aproximación es suficiente, aceptaremos este tanteo y tomaremos:

$$\lambda_0 L_0 = 4,02,$$

$$p = 4,022 \sqrt{\frac{E_0 I_0}{m_0 L_0^4}}$$

Para terminar el ejemplo supongamos que

se trata de un puente metálico de ferrocarril de  $L_0 = 70$  m, y:

$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2 = 2,1 \times 10^7 \text{ Tm/m}^2,$$

$$I = 2,5 \text{ m}^4,$$

$$P = 4,5 \text{ Tm/ml}; m = \frac{4,5 \text{ Tm} \cdot \text{seg}^2}{9,8 \text{ m}}$$

$$\sqrt{\frac{E_0 I_0}{m_0 L_0^4}} = \sqrt{\frac{2,1 \times 2,5 \times 9,8}{4,5 \times 2,4}} = 2,75,$$

$$p = 2,75 \times 4,022 = 44,5,$$

$$n = \frac{P}{2 \pi} = \frac{44,5}{2 \pi} = 7,1 \text{ Hz}$$

### Pórticos intraslacionales.

En el caso de pórticos intraslacionales el método indicado para las vigas continuas se puede utilizar sin más que aumentar el trabajo en cada etapa. Para ello es preciso suponer que la rigidez de los soportes impide su vibración longitudinal y que la transversal no se ve influida por los esfuerzos axiles.

Con estas salvedades, vamos a desarrollar el ejemplo siguiente:

#### Ejemplo 1.

Se trata de un puente hiperestático ligado rígidamente a sus apoyos. La rigidez  $E I$  es constante a lo largo de toda la estructura.

Si tomamos como referencia el vano central y numeramos 1, ..., 4 el resto de las piezas, tendremos:

$$a_1 = a_4 = 0,5; \quad a_2 = a_3 = 0,8;$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1 = \\ = h_1 = h_2 = h_3 = h_4;$$

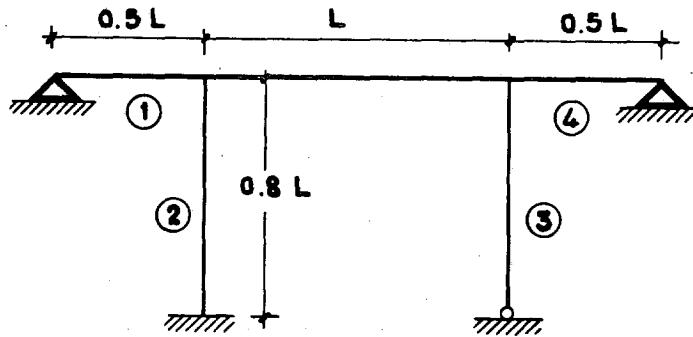


Figura 14.

$$\begin{aligned} k_1 = k_4 &= 0.5 & \lambda_1 L_1 = \lambda_4 L_4 &= 0.5 \lambda_0 L_0, \\ k_2 = k_3 &= 0.8 & \lambda_2 L_2 = \lambda_3 L_3 &= 0.8 \lambda_0 L_0. \end{aligned}$$

Si aislamos la barra central, los ángulos en los extremos se obtienen del reparto en los nudos siguientes:

$$r_2 = \frac{\frac{15 \theta_2}{4 \theta_2^2 - \psi_2^2}}{\frac{6}{\theta_1} + \frac{15 \theta_2}{4 \theta_2^2 - \psi_2^2}}$$

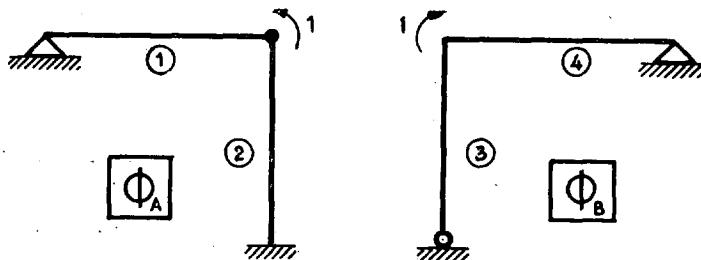


Figura 15.

Determinación de  $\emptyset_A$ .

Rigideces de tramo:

$$K_1 = \frac{3 EI}{L_1} \frac{1}{\theta_1} = \frac{EI}{L_0} \frac{6}{\theta_1};$$

$$K_2 = \frac{4 EI}{L_2} \left( \frac{3 \theta_2}{4 \theta_2^2 - \psi_2^2} \right) = \frac{EI}{L_0} \frac{15 \theta_2}{4 \theta_2^2 - \psi_2^2}.$$

Factores de distribución.

$$r_1 = \frac{\frac{6}{\theta_1}}{\frac{6}{\theta_1} + \frac{15 \theta_2}{4 \theta_2^2 - \psi_2^2}},$$

Factor de transmisión.

$$c_2 = \frac{\psi_2}{2 \theta_2}.$$

Supongamos:

$$\lambda_0 L_0 = 3.8 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 L_1 = 1.9 \\ \lambda_2 L_2 = 3.04 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta(1.9) = 1,095 \left| \frac{6}{\theta_1} = \frac{6}{1,095} = 5,5 \right. \\ \theta_2 &= \theta(3.04) = 5,335 \left| \frac{15 \theta_2}{4 \theta_2^2 - \psi_2^2} = \frac{15 \times 5,335}{114 - 93,5} = 3,9. \right. \\ \psi_2 &= \psi(3.04) = 9,635 \end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{5,5}{9,4} = 0,58$$

$$r_2 = \frac{3,9}{9,4} = 0,42$$

$$c_2 = \frac{9,635}{10,67} = 0,9$$

La distribución es inmediata.  
La barra (1) toma  $M_1 = 0,58$  y  
la (2) 0,42 transmitiendo al ex-  
tremo empotrado  $0,9 \times 0,42 = 0,38$ .

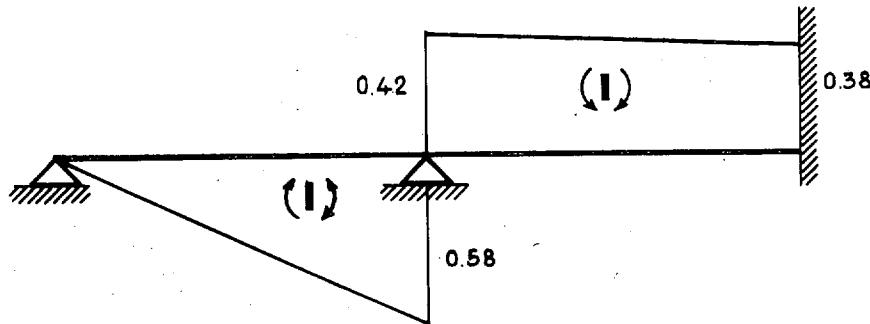


Figura 16.

El giro de la barra 1 es:

$$\phi_1 = 0,58 \frac{\theta_1 L_1}{3 EI},$$

y el de la barra 2 es:

$$\phi_2 = 0,42 \frac{\theta_2 L_2}{3 EI} - 0,38 \frac{\psi_2 L_2}{6 EI};$$

$$\phi_1 = \frac{0,58 \times 1,095 \times 0,5}{3} \frac{L_0}{EI} = 0,105 \frac{L_0}{EI};$$

$$\phi_2 = \left( \frac{0,42 \times 5,335 \times 0,8}{3} - \frac{0,38 \times 9,635 \times 0,8}{6} \right).$$

$$\frac{L_0}{EI} = 0,11 \frac{L_0}{EI}.$$

Evidentemente, deberá ser  $\phi_1 = \phi_2$ , y esto nos da una idea de la precisión de nuestros cálculos. Tomaremos:

$$\phi_A = 0,11 \frac{L_0}{EI}$$

#### Determinación de $\phi_B$ .

#### Rigideces de tramo:

$$K_1 = \frac{EI}{L_0} \frac{6}{\theta_4};$$

$$K_3 = \frac{EI}{L_3} \frac{3,75}{\theta_4}.$$

#### Factores de distribución.

$$r_3 = \frac{3,75}{\frac{\theta_3}{\theta_3 + \theta_4}}; \quad \left. \begin{array}{l} \theta_3 = \theta (3,04) = 5,335 \\ \theta_4 = 1,095 \end{array} \right\} \frac{3,75}{\theta_3} = 0,7 \\ r_3 = \frac{6}{1,25} = 0,56; \\ r_4 = \frac{0,55}{\frac{3,75}{\theta_3 + \theta_4}}; \quad \left. \begin{array}{l} 6/0,45 = 0,55 \\ 0,7 \end{array} \right\} \frac{0,55}{1,25} = 0,44;$$

La distribución de momentos es:

$$M_4 = 0,44, \\ M_3 = 0,56.$$

El giro  $\phi_B$  será:

$$\phi_3 = \phi_4 = 0,44 \frac{1,095 \times 0,5}{3} \frac{L_0}{EI}$$

$$\phi_B = 0,08 \frac{L_0}{EI}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K'_A = 4 \frac{EI}{L_0} \phi_A = 4 \times 0,11 = 0,44; \\ K'_B = 4 \times 0,08 = 0,32. \end{array} \right.$$

Buscando en las tablas, se obtiene:

$$\lambda L = 4,18.$$

El segundo tanteo lo haremos, pues, con el valor:

$$\lambda_0 L_0 = 4,18 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 L_1 = 2,09 = \lambda_4 L_4 \\ \lambda_2 L_2 = 3,344 = \lambda_3 L_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_4 = \theta (2,09) = 1,149 \\ \theta_2 &= \theta_3 = \theta (3,344) = -1,78 \\ \psi_2 &= \psi (3,344) = -4,62 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{6}{\theta_1} = 5,21 \\ \frac{15 \theta_2}{4 \theta_2^2 - \psi_2^2} = \frac{-26,6}{12,6 - 21,5} = \\ \frac{26,6}{8,9} = 3. \end{array} \right.$$

$$r_1 = \frac{5,21}{8,21} = 0,635 \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = 0,635 \\ M_2 = 0,365 \end{array} \right.$$

$$\phi_A = \frac{0,635 \times 1,149 \times 0,5}{3} \frac{L_0}{EI} = 0,12 \frac{L_0}{EI}$$

$$r_3 = \frac{-1,78}{\frac{3,75}{1,78} + \frac{6}{1,149}} =$$

$$= \frac{-2,1}{-2,1 + 5,25} = \frac{2,1}{3,15} = -0,669$$

$$M_3 = -0,669$$

$$r_4 = \frac{5,25}{3,15} = 1,669; \quad M_4 = 1,669 \quad \left. \right\}$$

$$\phi_B = \frac{1,669 \times 1,149 \times 0,5}{3} \frac{L_0}{EI} = 0,32 \frac{L_0}{EI};$$

$$\left. \begin{array}{l} K'_A = 4 \times 0,12 = 0,48 \\ K'_B = 4 \times 0,32 = 1,28 \end{array} \right\} \lambda L = 3,9$$

Para comprender la posibilidad de que  $r_3$  sea negativo, basta observar que  $\lambda_2 L_2$  presenta un valor  $\pi$  alrededor del cual estamos operando.

En el caso límite de  $\lambda_2 L_2 = \pi$  los pilares dejan de tener rigidez y se comportan como simples apoyos de viga continua. En este caso,  $\lambda L = 3,91$ , y:

$$\phi_A = \phi_B = 0,192 \frac{L_0}{EI};$$

$$K'_A = K'_B = 0,768 \rightarrow \lambda_0 L_0 = 3,90.$$

Tomaremos, pues, como valor definitivo  $\lambda_0 L_0 = 3,90$  y, por tanto, la frecuencia fundamental es:

$$p = 15,3 \sqrt{\frac{EI}{m L_0^4}}$$

#### Viga Gerber.

En el caso de las vigas "Gerber" el tratamiento es análogo al de la viga continua. Se escoge un tramo entre dos rótulas y se aplican reacciones armónicas. Las receptancias son

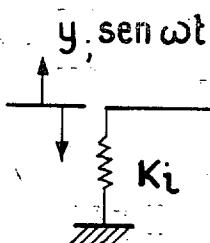
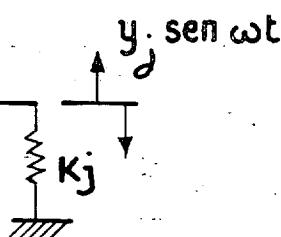


Figura 17.



ahora desplazamientos, y la ecuación que permite obtener  $\lambda L$  es:

$$A^2 + A \left( k_{ii} \frac{L^3}{EI} + k_{jj} \frac{L^3}{EI} \right) + k_{ii} k_{jj} \left( \frac{L^3}{EI} \right)^2 - B^2 = 0;$$

donde:

$$A = -(\lambda L)^3 \frac{c h \lambda L \operatorname{sen} \lambda L - s h \lambda L \cos \lambda L}{2 s h \lambda L \operatorname{sen} \lambda L};$$

$$B = -(\lambda L)^3 \frac{s h \lambda L - \operatorname{sen} \lambda L}{2 s h \lambda L \operatorname{sen} \lambda L}.$$

La resolución por tanteos se facilita mediante el gráfico siguiente, en que:

$$R_i = k_{ii} \frac{L^3}{EI}$$

$$R_j = k_{jj} \frac{L^3}{EI}$$

La determinación de los descensos  $\delta_i$  y  $\delta_j$  se realiza a través de los trozos que quedan a ambos lados de la pieza en estudio, cuando en ellos se aplica una fuerza senoidal unitaria.

El tratamiento más cómodo es mediante la utilización de las rigideces dinámicas y factores de transmisión, tal como se indicó en el caso de vigas continuas. El procedimiento es claro y, aunque farragoso, en los casos normales se aplica con gran rapidez. Es muy interesante la referencia (10), en la que se aplica el método a varios ejemplos.

### Conclusión.

Con el gráfico y los métodos indicados se pueden obtener rápidamente los efectos de mayoración dinámica en los puentes de ferrocarril.

Conste aquí nuestro agradecimiento a don Jaime Badillo, representante español en la UIC, quien nos ha facilitado amablemente los datos de la última reunión del comité de expertos para la cuestión D-23 de la ORE.

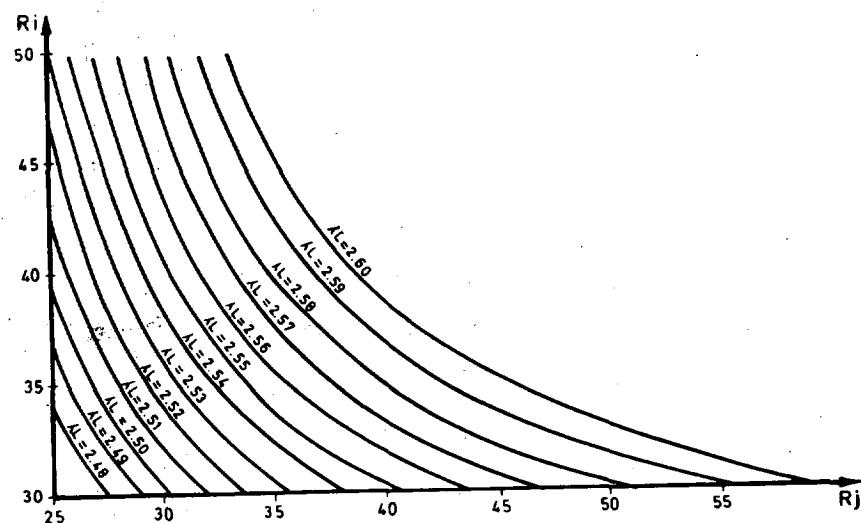


Figura 18.

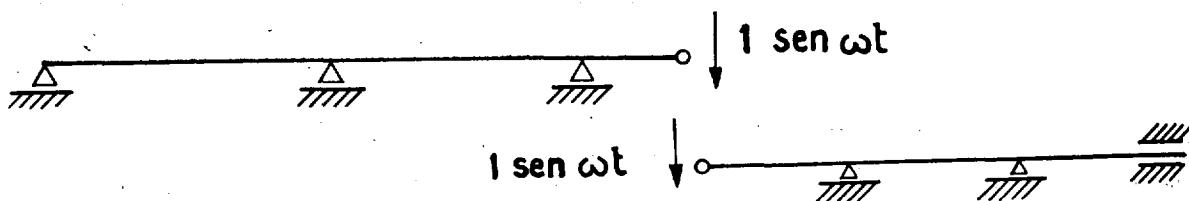


Figura 19.

## BIBLIOGRAFIA

1. MENDIZABAL, A.: "Estudio y construcción de tramos metálicos", 1928.
2. ALARCON, E.: "Tesis doctoral", 1970.
3. HACAR, M. A., y ALARCON, E.: "Elementos de dinámica aplicada a las estructuras", cap. XI, T. I, EDIX 1971.
4. ORE-UIC: "Question D-23". Abril 1970.
5. ROGERS, G. L.: "Dinamics of framed structures". J. Wiley, 1959.
6. FREBERG y KEMLER: "Elements of mechanical vibrations". J. Wiley, 1949.
7. ZIGNOLI: "Construzioni metalliche". T. I. Hoepli.
8. TIMOSHENKO: "Problemas de vibración en la ingeniería". CECSA.
9. RAITHEL, A.: "La dinámica dei sistemi solidali Giornali del Genio civiles". V. 90, 1952.
10. CAIRONI, M.: "Sul calcolo vibr. nat. flessione travi Gerber". Construzioni Metalliche, núm. 6, 1962.