LOS ERRORES EN EL CALCULO ELECTRONICO DE ESTRUCTURAS (*)

Por FRANCISCO JAVIER DE AGUEDA
Ingeniero de Caminos, M. E. University of Detroit.

Se presenta un estudio sobre las imprecisiones y fallos que se pueden obtener en el cálculo de estructuras con ordenador por procedimientos matriciales, por causa de las limitaciones del método o de la propia máquina. Se describen tres causas de error: la forma de la estructura, la distribución de rigideces dentro de la misma y las características mecánicas de las barras. Estas causas de tipo físico dan origen a dificultades de origen matemático que producen aberraciones en los resultados obtenidos por cálculo electrónico. Se ofrece una serie de soluciones de tipo general, como son distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, orientación de los ejes coordenados y utilización de programas que trabajen con doble número de cifras significativas en la memoria del ordenador. Se hacen recomendaciones de carácter preventivo y otras que sirven como comprobación de la bondad de los resultados y se citan algunos casos concretos en que estas precauciones son necesarias. Al final se indican al lector algunas referencias bibliográficas que tratan extensamente los fundamentos de las técnicas a las que hace referencia el presente articulo.

La utilización cada vez más extendida de los ordenadores electrónicos en el cálculo de estructuras, ha producido en los proyectistas un convencimiento casi absoluto de la bondad de los resultados facilitados por los programas de cálculo de esfuerzos, ya sea en estructuras porticadas planas, espaciales, celosías o emparrillados.

No obstante, y aunque siempre existe una seguridad prácticamente total en la exactitud de los cálculos efectuados por el ordenador, existen limitaciones en los métodos de cálculo, generalmente basados en procedimientos matriciales, que producen resultados falsos, incluso con errores de bulto, y que requieren un análisis detallado de la estructura en sí y un conocimiento de los condicionantes que introduce la configuración interna de la propia máquina.

Son convenientes, pues, una serie de chequeos de los resultados que aseguren al ingeniero que no se han producido las causas de error que se describen seguidamente.

TIPOS Y CAUSAS DE ERROR

Como es sobradamente conocido, el cálculo electrónico de estructuras se basa fundamentalmente en el análisis mecánico de una serie de barras unidas entre sí en puntos llamados nudos, y cuyas propiedades elásticas se reducen a unos coeficientes de rigidez o flexibilidad, que al sumarse para todas las barras componentes de la estructura dan lugar a una matriz que nos relaciona cargas exteriores con desplazamientos, esfuerzos internos, etc.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la redacción de esta Revista hasta el 28 de febrero de 1972.

Este tratamiento tan general es aplicable a todo tipo de estructuras, con cargas o apoyos cualesquiera, por lo que el problema del cálculo de esfuerzos se convierte en rutinario cuando se dispone de un programa de este tipo. Sin embargo, en ocasiones, según naturaleza de la estructura, por razones de simetría de la misma, o equilibrio de fuerzas exteriores y esfuerzos internos en un nudo, o condiciones de apoyo qe exigen valores fijos de los esfuerzos, el usuario se ve sorprendido por resultados que no se ajustan a la lógica. De esta manera se producen faltas de simetría en las magnitudes de las reacciones en apoyos en estructuras de geometría y carga simétricas, momentos no nulos en los extremos de ménsulas, etc. A veces, los valores relativos de estos errores son pequeños al ser debidos al simple error de redondeo que se produce necesariamente en el ordenador al calcular éste con un número fijo de cifras significativas; pero otras estas imprecisiones son totalmente aberrantes.

Un ejemplo muy sencillo, debido a Livesley, puede aclarar conceptos. Consideremos el conjunto de tres muelles de la figura 1.

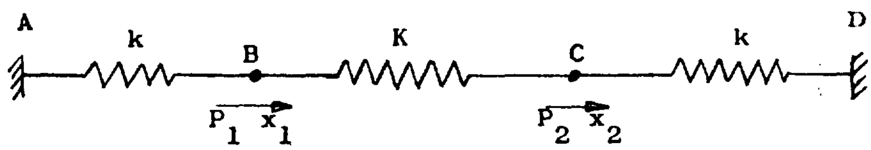

Figura 1.

Tomando como incógnitas los desplazamientos x_1 y x_2 en *B* y *C,* y aplicándose las cargas P_1 y P_2, las ecuaciones de rigidez serían:

$$P_1 = (k + K)\,x_1 - K\,x_2.$$
$$P_2 = -K\,x_1 + (k + K)\,x_2.$$

El ordenador resolvería este sistema matricialmente utilizando, como hacen la mayoría de los programas existentes en el mercado, un método de eliminación tipo Gauss, con lo cual eliminaría x_1 multiplicando la primera ecuación por $\frac{K}{k+K}$ y sumándola a la segunda, con lo que se obtendría:

$$P_2 + K\,P_1/(k + K) = \frac{(k + K)^2 - K^2}{k + K}\,x_2.$$

Inmediatamente se observa un posible error de truncadura muy fuerte en el caso de que *K* sea mucho mayor que *k*. En este caso, considerando el cálculo del coeficiente de x_2 en el segundo miembro como un proceso puramente numérico, la diferencia de cuadrados en el numerador da lugar a una pérdida de cifras significativas cuando, como ya se ha dicho, se trabaja con un número fijo de dígitos en el ordenador, lo que daría lugar a valores absurdos para x_1 y x_2. Puede parecer éste un caso extremo y que nunca se presenta en la práctica. Sin embargo, esto no es cierto, ya que, por ejemplo, hay muchos sistemas de ecuaciones de estructuras reticuladas aparentemente inofensivas que adolecen de esta condición, que Livesley llama sistemas "ill-conditioned", o sea, mal condicionados. No hay más que recordar que dos elementos de la diagonal principal de la matriz de rigidez de una barra en un pórtico son:

$$\frac{A\,E}{L} \quad \text{(en que } A = \text{área transversal de la barra).}$$

L = longitud de la barra

y $\qquad E$ = módulo de elasticidad).

$$\frac{12\,E\,I}{L^3} \quad (I = \text{momento de inercia de la barra}).$$

y que en la mayoría de los pórticos la primera expresión sería bastante mayor que la segunda, no solamente debido a que numéricamente $A > I$, sino principalmente a la potencia cúbica a que está elevada la longitud de la barra en el segundo elemento.

Cuando el pórtico tiene en todos sus nudos tres o más barras, como ocurre, por ejemplo, en pórticos arriostrados, este problema se ve casi totalmente soslayado debido a la contribución que todas las barras tienen sobre el nudo en el que coinciden, al sumar sus respectivas rigideces. Así, es más seguro en cuanto al cálculo automático se refiere, un cálculo en que las barras unan nudos entre sí por varios caminos que uno en que cada nudo vaya unido al siguiente por intermedio de una sola barra, como ocurre en el caso de una viga continua. Por esto, parece recomendable el cálculo de estas vigas de varios vanos por medio de matrices de transferencia, en vez de por una matriz de rigidez o de flexibilidad. Sobre todo, son de temer los casos de vigas continuas en que el último vano está en voladizo y formado por muchas barras sucesivamente encadenadas unas a otras, de diferente sección para tener en cuenta la variación del canto, caso frecuente en puentes pretensados.

Como se ve, el tipo de la estructura es, a veces, determinante de errores, que, en general, siempre pueden soslayarse por medio de un mayor atado entre los nudos. Esto, que se puede solucionar fácilmente en pórticos planos o emparrillados, a veces no es tan sencillo en pórticos espaciales por la mayor dificultad que presentan para comprender de una forma intuitiva su forma de trabajo en carga. En estos casos, la consideración de la deformada de la estructura y las magnitudes de los corrimientos es fundamental. Desde un punto de vista numérico, los errores debidos al tipo de estructura se presentan en matrices cuya anchura de banda, en toda su longitud o en parte de ella, es estrecha.

Otra causa productora de errores es la que antes se ha expuesto en el ejemplo de la figura 1, o sea, diferencias grandes entre las características mecánicas de las barras.

En el ejemplo de Livesley los errores de truncadura producidos en los casos de muelles alternativamente muy rígidos y muy elásticos se podrían fácilmente soslayar tomando como incógnitas no los desplazamientos longitudinales de los puntos B y C, sino los acortamientos o alargamientos de los muelles A B y B C. Sin embargo, este tipo de corrección no es práctico, ya que con ello se perdería la principal ventaja que ofrecen al usuario los programas matriciales de estructuras, es decir, su total automatismo. Se debe, pues, tender a otro tipo de *soluciones, como luego se verá. En general*, se puede decir que un programa basado en el método de rigidez o de flexibilidad dará problemas en estructuras con zonas muy flexibles dentro de un contexto que se pueda calificar como rígido y, viceversa, en estructuras flexibles con zonas altamente rígidas. Otra vez parece que estos son casos poco frecuentes en la práctica, pero no hay que olvidar que muchos programas, po ejemplo, no admiten rótulas como extremo de una barra dentro de la estructura (no en un apoyo), y, entonces, el usuario sustituye la rótula por una barra ficticia de longitud muy reducida y de área y momento de inercia prácticamente nulos. Es necesario en estos casos ajustar las magnitudes de estas barras ficticias de una forma juiciosa, para no introducir errores de truncadura en el proceso de resolución del sistema de ecuaciones.

Aunque los métodos que utilizan matrices de transferencia están más a resguardo de tales problemas en algunos casos, es evidente que en el caso de que K sea muy pequeña en comparación a k, en nuestro ejemplo de la figura 1, cualquier perturbación (carga) en el extremo izquierdo del sistema se propagará muy difícilmente al extremo derecho del mismo, con lo que la relación entre los corrimientos de ambos extremos, base de los métodos de transferencia, será inoperante. El método fallaría totalmente si $K = 0$. Se observará, pues, que los métodos de transferencia evitan los errores de truncadura en los casos más desfavorables para los métodos de rigidez, pero son peligrosos precisamente en estructuras en que éstos son más seguros.

Por último, otra causa de error puede ser introducida por una sola barra, cuyas dimensiones geométricas sean tales que, teniendo una longitud comparativamente normal, su área sea mucho mayor que su inercia, en términos numéricos (caso de vigas planas de gran relación ancho/canto). Sin embargo, este tipo de condición es raramente determinante de errores, por sí sola, a no ser en casos extremos. Ensayos efectuados en ordenador han determinado que se puede multiplicar por 1.000 el área de una barra antes de que se produzcan errores de consideración. De cualquier forma es un factor a tener en cuenta, ya que sumado a otros puede ser peligroso. Este tipo de error, aunque formalmente muy parecido al citado en segundo lugar, es conceptualmente diferente, aunque, efectivamente, se puede decir que ambos van juntos en todo análisis estructural.

SOLUCIONES GENERALES

Dejando aparte los casos en que los fallos son producidos por errores en la entrada de datos, que siempre se deberían repasar antes de iniciar un análisis más complicado de posibles causas de malfunción, queda el problema de detectar tal malfunción. Los programas más elaborados ofrecen una comprobación automática, al dar las resultantes de los equilibrios en todos los nudos, incluidos apoyos, con lo que el proyectista inmediatamente puede verificar la existencia o no de errores, y su magnitud en la resolución del problema. En otro caso, no queda otra solución que la comprobación manual, por otra parte muy sencilla, de dichos equilibrios.

Como ha quedado claro en el apartado anterior. las faltas de precisión se producen en la resolución del sistema de ecuaciones lineales que representan el funcionamiento de la estructura. Se han buscado métodos de mejora de los elementos de la matriz inversa de la de los coeficientes, basados en la conocida propiedad de que una matriz multiplicada por su inversa debe dar la matriz unidad. Sin embargo, Roy advierte que en algunas ocasiones estos procesos iterativos de depuración no son convergentes, llegando a apartarse más aún de la solución real. Varga ha publicado varios métodos de resolución de sistema de ecuaciones lineales por procedimientos iterativos (Gauss-Seidel, S.O.R., A.D.I.P., A.D.I.P.I.T., etc.); estos esquemas de cálculo eliminan automáticamente los errores de redondeo y la acumulación sucesiva de errores de truncadura, pero tienen el defecto de que se debe resolver todo el sistema de ecuaciones para cada hipótesis de carga, cuando cualquier procedimiento de tipo eliminación sólo necesita de una única inversión de la matriz y posterior multiplicación por cada uno de los vectores que representan las hipótesis de carga, por lo que no suelen utilizarse en cálculo de estructuras.

Rosanoff recomienda el utilizar un sistema general de coordenadas que, dentro de lo posible, tenga los ejes paralelos a los principales de inercia del sistema, es decir, a las direcciones de rigidez más importantes.

J. R. Roy ha hecho un estudio muy completo sobre la eliminación de errores que supone el trabajar con precisión extendida (doble número de cifras significativas) en el ordenador. En él analiza una serie de estructuras, extendiendo la precisión en alguna o en todas las partes del proceso de cálculo, pasando de doble a simple precisión por eliminación de la mitad derecha de las cifras significativas. Su conclusión es que únicamente utilizando la doble precisión en todo el proceso de cálculo mejoran sustancialmente los resultados. No obstante, y dado que un programa que trabaje con gran número de cifras significativas ocupa más memoria en el ordenador que uno con menos precisión, aconseja que en todo caso se trabaje siempre en doble precisión, excepto en la multiplicación final de la matriz de los coeficientes invertida por los vectores de carga.

CONCLUSIONES

Los errores en el cálculo electrónico de estructuras, prescindiendo de las equivocaciones de entrada de datos, provienen siempre de la resolución del sistema de ecuaciones lineales elásticas. Estas imprecisiones pueden ser debidas al tipo de estructura y a la distribución de rigideces dentro de ella o a las características mecánicas de algunas barras. Es prácticamente imposible dar valores numéricos concretos con los que el calculista pueda estar seguro de que sus resultados son aceptables, por lo que es muy recomendable el realizar siempre una somera comprobación de los resultados del ordenador, como se ha explicado más arriba. En casos normales no es frecuente la aparición de errores apreciables, pero el conocimiento de las circunstancias que determinan dichos errores puede eliminarlos desde el principio. En todo caso, lo más recomendable parece ser el utilizar programas que trabajen con precisión extendida, que llegan a reducir las imprecisiones a una décima parte.

BIBLIOGRAFIA

R. K. LIVESLEY: "Matrix Methods of Structural Analysis". Pergamon Press.

VARGA: "Matrix Iterative Analysis". Prentice Hall.

J. R. ROY: "Numerical Error in Structural Solutions". Proceedings A.S.C.E.. J. Struc. Div. Abril 1971.

R. A. ROSANOFF: "Numerical Conditions of Stiffness Matrix Formulations for Frame Structures". Proceedings of Conf. on Matrix Methods in Struc. Mech. Ohío, 1968.