RELACIONES ENTRE EL NUMERO DE HABITANTES DE VARIAS POBLACIONES, SUS DISTANCIAS Y LOS GASTOS DE TRANSPORTE (*)

Por M. A. HACAR BENITEZ (1)
Ing. de Caminos, Canales y Puertos

Con hipótesis simplificativas se establecen las relaciones matemáticas que deben existir entre las distancias de varias poblaciones y el número de sus habitantes para que industrias de un mismo producto puedan competir, a causa de los transportes, en ciertas condiciones de igualdad.

1. Igualdad de gastos globales de transporte.

Consideremos las n poblaciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de número de habitantes $U_1, U_2, \ldots, U_n$, respectivamente (fig. 1).

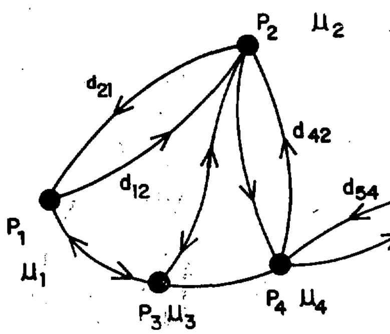

Figura 1.

Sea d_{ij} la distancia existente entre las poblaciones P_i y P_j (2).

Supongamos que un determinado tipo de industria se puede instalar en cualquiera de las poblaciones y que los gastos de producción puedan ser exactamente los mismos.

Para competir en la venta el único incremento en los gastos son los del transporte desde la población de producción a las de consumo.

Se trata de determinar las relaciones entre los valores $U_1, U_2, \ldots, U_n$, para que puedan competir las industrias instaladas en $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en condiciones de igualdad.

Admitiremos que *el número de unidades que se pueden vender en cada población* P_i *es proporcional al número de sus habitantes* U_i.

Los gastos de transporte de los envíos de los productos de la industria montada en P_1 serán:

$$G_1 = U_2 k d_{12} + U_3 k d_{13} + \ldots + U_n k d_{1n} \text{ (3).}$$

Del mismo modo los de la industria montada en P_2 serán:

$$G_2 = U_1 k d_{21} + U_3 k d_{23} + \ldots + U_n k d_{2n},$$

y así sucesivamente.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la redacción de esta Revista hasta el 28 de febrero de 1972.

(1) La mayor parte de lo expuesto en este escrito está contenido en mi comunicación, de título parecido, dirigida a la Sección II, Geometría y Topología, de la XI Reunión Anual de Matemáticos Españoles (Murcia, diciembre 1970).

(2) En general, d_{ij} no será igual que d_{ji}. La distancia de P_i a P_j no tiene que ser igual a la de P_j a P_i; puede tratarse de recorridos diferentes o en condiciones diversas (subiendo o bajando, etc.). Las distancias que consideramos son *virtuales*.

En realidad, podemos suponer que las poblaciones P_1, P_2, ..., P_n, corresponden a los vértices de un *grafo*. Debiendo poderse siempre ir de cualquier P_i a cualquier P_j el grafo será *conexo*. Más bien podemos decir que se trata de un *multigrafo*, pues puede haber varios *arcos* o *aristas* que unan P_i con P_j.

(3) Hemos considerado que los gastos de transporte son proporcionales únicamente al producto de las cantidades transportadas por las distancias recorridas, o sea, a las toneladas por kilómetros. Se comprende que es una simplificación excesiva aun cuando tomásemos distancias virtuales.

En un estudio más riguroso habría que considerar las cargas y las descargas, las tarifas escalonadas y las no proporcionales, etc.

Si por ejemplo hacemos $n = 4$, para que $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G$ (4), se verificará que:

$$\left.\begin{aligned} 0 + U_2 d_{12} + U_3 d_{13} + U_4 d_{14} &= g \\ U_1 d_{21} + 0 + U_3 d_{23} + U_4 d_{24} &= g \\ U_1 d_{31} + U_2 d_{32} + 0 + U_4 d_{34} &= g \\ U_1 d_{41} + U_2 d_{42} + U_3 d_{43} + 0 &= g \end{aligned}\right\}$$

escribiendo para simplificar $g = \dfrac{G}{K}$.

Al resolver el sistema anterior por la regla de Cramer resulta:

$$\frac{U_1}{\begin{vmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{U_2}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 1 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & 1 & 0 & d_{34} \\ d_{41} & 1 & d_{43} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{U_3}{\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & 1 & d_{14} \\ d_{21} & 0 & 1 & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 1 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{U_4}{\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & 1 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 1 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 1 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 1 \end{vmatrix}}$$

2. Caso de tres poblaciones: ejemplo.

Consideremos el caso de tres poblaciones (figura 2) distantes entre sí:

$$d_{23} = d_{32} = a \text{ » } d_{31} = d_{13} = b \text{ » } d_{12} = d_{21} = c.$$

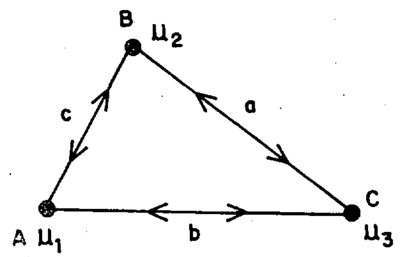

Figura 2.

Se verificará entonces que:

$$0 + c\,U_2 + b\,U_3 = c\,U_1 + 0 + a\,U_3 = b\,U_1 + a\,U_2 + 0,$$

resultando:

$$\frac{U_1}{\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & 0 & a \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix}} = \frac{U_2}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ c & 1 & a \\ b & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{U_3}{\begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ c & 0 & 1 \\ b & a & 1 \end{vmatrix}}$$

o lo que es igual:

$$\frac{U_1}{a\,(p - a)} = \frac{U_2}{b\,(p - b)} = \frac{U_3}{c\,(p - c)},$$

siendo p el semiperímetro del triángulo que formen dichas poblaciones, $a + b + c = 2\,p$.

Si las tres poblaciones están en los vértices de un triángulo de lados a, b, c proporcionales a 5, 4 y 3 (fig. 3).

$$\frac{U_1}{5\,(6 - 5)} = \frac{U_2}{4\,(6 - 4)} = \frac{U_3}{3\,(6 - 3)},$$

o sea,

$$\frac{U_1}{5} = \frac{U_2}{8} = \frac{U_3}{9}.$$

Los números de habitantes de las poblaciones deberán estar en la proporción del:

$$100\,\frac{5}{9 + 8 + 5} = 22{,}7\ \%,$$

$$100\,\frac{8}{22} = 36{,}4\ \%$$

$$100\,\frac{9}{22} = 40{,}9\ \%$$

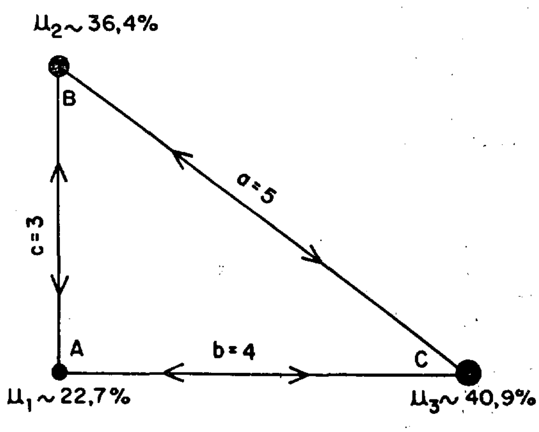

Figura 3.

(4) El igualar estos gastos de transporte entraña la hipótesis de que la competencia está equilibrada vendiendo cada fábrica en *todas* las poblaciones. Consideramos que los gastos de transporte de los productos de una fábrica a la población en que está emplazada son nulos.

3. Caso de dos poblaciones.

Si se tratase de $n = 2$ y $d_{12} \neq d_{21}$ (fig. 4), o sea, de dos poblaciones, P_1 y P_2, tales que la distancia (virtual) d_{12} fuese mayor que la de d_{21} (al estar, por ejemplo, P_1 a cota más baja que P_2,

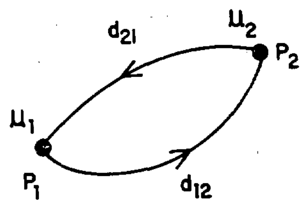

Figura 4.

por una carretera, sería el camino de P_1 a P_2 subiendo y de P_2 a P_1 bajando), obtendríamos del sistema anterior:

$$\frac{U_1}{d_{12}} = \frac{U_2}{d_{21}},$$

es decir, que la población U_1 de P_1 deberá ser mayor que la U_2 de P_2 y estar entre sí en la proporción indicada.

El resultado obtenido es evidentemente el que podíamos esperar.

4. Gastos globales de transporte proporcional en número de habitantes.

Podemos plantearnos otro problema:

Determinar los valores relativos $U_1, U_2, \ldots, U_n$, para que los gastos de transporte de los productos de las industrias montada en cada P_i *sea proporcional* al número de sus habitantes, U_i.

Es evidente que entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 0 + U_2 d_{12} + U_3 d_{13} + \ldots U_n d_{1n} = \lambda U_1 \\ U_1 d_{21} + 0 + U_3 d_{23} + \ldots U_n d_{2n} = \lambda U_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_1 d_{n1} + U_2 d_{n2} + U_3 d_{n3} + \ldots + 0 = \lambda U_n \end{array}\right\}$$

que para que sea compatible es preciso que:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & d_{12} & d_{13} \ldots d_{1n} \\ d_{21} & -\lambda & d_{23} \ldots d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} \ldots -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

que es la *ecuación característica* de la matriz de distancias de transporte:

$$\| d_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} \ldots d_{1n} \\ d_{21} & 0 & d_{23} \ldots d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} \ldots 0 \end{Vmatrix}$$

Determinado λ, el sistema de ecuaciones anterior nos permite hallar sus correspondientes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ (valores proporcionales).

Por tanto podemos decir: *que las poblaciones relativas* $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *son componentes de un vector propio (o autovector) de la matriz* $\| d_{ij} \|$ *de las distancias de transporte.*

5. Caso de tres poblaciones: Ejemplo.

Si las poblaciones están en los vértices de un triángulo $A\,B\,C$ (fig. 5), la ecuación característica resulta ser:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & c & b \\ c & -\lambda & a \\ b & a & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

o sea:

$$\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\,\lambda - 2\,a\,b\,c = 0.$$

En el caso de estar las tres poblaciones en los mismos vértices del triángulo del caso antes expuesto, la ecuación característica será:

$$\lambda^3 - 52\,\lambda - 120 = 0,$$

cuya única raíz positiva es $\lambda = 8{,}07$, y que sustituída en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0 + 3\,U_2 + 4\,U_3 = 8{,}07\,U_1 \\ 3\,U_1 + 0 + 5\,U_3 = 8{,}07\,U_2 \\ 4\,U_1 + 5\,U_2 + 0 = 8{,}07\,U_3 \end{array}\right\}$$

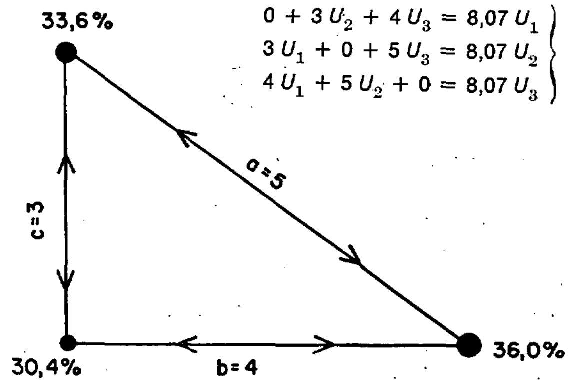

Figura 5

nos da que:

$$U_1 \sim 30{,}4\ \%; \quad U_2 \sim 33{,}6\ \%; \quad U_3 \sim 36{,}0\ \%.$$

6. Tres poblaciones alineadas.

Otro ejemplo sería el de tres poblaciones alineadas, A, B, C, tales que $AB = BC = d$ (figura 6).

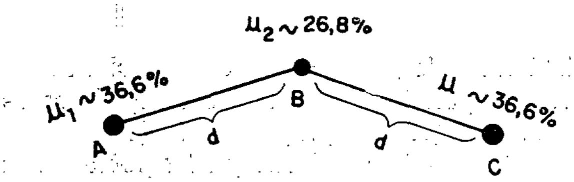

Figura 6.

Entonces $a = c = \frac{b}{2} = d$; la ecuación característica sería:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

o

$$\lambda^3 - 6\lambda - 4 = 0.$$

Cuyas raíces son -2; $1 - \sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3}$. La última, positiva, sustituida en el sistema:

$$\left.\begin{aligned} U_2 + 2U_3 &= (1 + \sqrt{3})\,U_1 \\ U_1 + U_3 &= (1 + \sqrt{3})\,U_2 \\ 2U_1 + U_2 &= (1 + \sqrt{3})\,U_3 \end{aligned}\right\}$$

nos da:

$$\frac{U_1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{U_2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{U_3}{2 + \sqrt{3}},$$

que equivale a decir que:

$$U_1 \sim 36{,}6\ \%; \quad U_2 \sim 26{,}8\ \%; \quad U_3 = 36{,}6\ \%.$$

7. Consideraciones finales.

Casos más complejos trataremos de exponerlos en otra ocasión. Por lo indicado se comprende la importancia que pueden tener las relaciones entre el número de habitantes de las poblaciones y sus distancias en los problemas del transporte (5).

Los estudios sobre la programación del transporte y la localización de las industrias y en general la integración del espacio en la teoría económica fueron ya iniciados por Launhart en el último tercio del siglo pasado en su teoría sobre los *polos* que posteriormente Weber desarrolló en su obra, *Ueber den Standort der Industrien.* En los últimos años han sido E. Hoover y W. Isard y, sobre todo, los economistas Perroux y Tinbergen quienes más se han ocupado de estas cuestiones.

Es ya clásico el problema de encontrar la situación óptima de una fábrica o almacén que haga mínimos los gastos de transporte a tres poblaciones, P_1, P_2, P_3, que han de consumir cantidades U_1, U_2, U_3 (6).

Cuando se trata de una distribución cualquiera de n puntos la teoría de los grafos permite la obtención de un árbol mínimo (7), o sea, tal que la suma de sus aristas sea un mínimo, por medio de un algoritmo debido a Sollin.

Palander con sus *isodápanas* y sus *isovectores* estudia comparativamente la variedad de la tarificación de los transportes.

Es Hoover quien mejor considera las relaciones existentes entre los puntos de localización de industrias y almacenes y los de ruptura de carga para tratar de evitar en lo posible los gastos de trasbordo. Teniendo en cuenta la fisonomía de una red de transporte y los lugares de aprovisionamiento y de mercado, determina los puntos que hacen mínimo el coste global del transporte, utilizando para ello un razonamiento de términos marginales.

---

(5) Los gastos de transporte propiamente dichos pueden no constituir el factor único, ni siquiera el principal, en la determinación del lugar de implantación de una industria. Los contactos directos, rápidos y a menudo personales, con otras actividades tienen mucha importancia y pueden hacer que los gastos de transporte material sean relativamente despreciables. La distribución de los lugares de producción y de mercado y el estudio de los gastos de *comunicaciones* (incluidos los de transporte) con otros productores: con los consumidores y con los poderes locales, ayudarán a determinar cómo los diversos tipos de industrias deben orientarse hacia la oferta o hacia la demanda (L. H. Klaassen, "Méthodes de sélection d'industries pour les régions en stagnation", O.C.D.E., 1967).

Se ha definido una *distancia económica y social* que puede ser varias veces la *distancia material.* Será mayor cuanto más complejo sea el producto y menor si se trata de simples materias primas (E. H. Mulder, Instituto Económico Neerlandés, Rótterdam, 1960).

(6) Basta formar un triángulo de lados proporcionales a ellas y hallar sus ángulos: γ_1, γ_2, γ_3. Describiendo sobre P_2, P_3 el arco capaz de $180^\circ - \gamma_1$ y sobre P_3, P_1 el de $180^\circ - \gamma_2$, obtenemos en su punto de intersección la ubicación óptima del almacén (Nguyen Tien Phuc, "Les Transports. Programmation", 1969).

(7) Por la propiedad importantísima de que un grafo admite un grafo parcial que es un árbol si y solamente si es conexo (Claude Berge, "Théorie des graphes et ses applications", 1958).