

Comentario al artículo "Estudio sobre pandeo lateral de arcos" de José M.^a Octavio de Toledo Eugui (publicado en la Revista de Obras Públicas de noviembre de 1971).

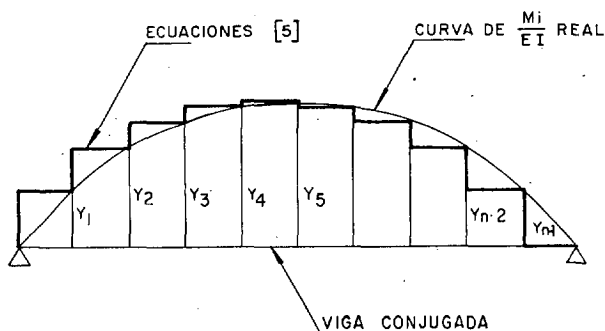
Por FRANCISCO JAVIER DE AGUEDA Doctor Ingeniero de Caminos, M. E. University of Detroit.

El autor ha hecho un estudio muy extenso y de gran claridad de exposición sobre el tema del pandeo de piezas rectas y curvas por métodos numéricos, tan desatendidos en la literatura técnica.

Este tema fue iniciado a principios de siglo con lo que se dio en llamar método de Engesser-Vianello y recibió un gran impulso en 1935 con Stüssi y en 1942 con Newmark. Este último desarrolló un procedimiento de cálculo de flechas similar, en esencia, al propuesto por el autor, aunque de mayor precisión. La diferencia esencial entre las ecuaciones [5] del autor y las de Newmark (ver Timoshenko, por ejemplo) reside en que, aunque los dos utilizan un esquema de cálculo que se puede resumir, con nomenclatura del autor, en:

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \varphi_{i-1} + M_i \Delta x; \\ y_i &= y_{i-1} + \varphi_{i-1} \Delta x;\end{aligned}$$

siendo M_i el momento en el punto i debido a la carga axil P ; sin embargo, Newmark aproxima la curva de momentos por medio de parábolas que pasan por tres puntos de la curva real, mientras que el autor se limita a aproximar dicha curva por líneas rectas horizontales, según se ve en la figura.



Téngase en cuenta que [5] resulta de inte-

grar en dos pasos la ecuación básica de la flexión $y'' = \frac{M}{EI}$.

De tal manera, mientras para el autor:

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} - \frac{P}{EI} y_i \Delta x, \quad [5]$$

para Newmark:

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} - \frac{P}{12EI} (y_{i-1} + 10y_i + y_{i+1}) \Delta x.$$

Debido a esta mayor precisión, este comentarista ha logrado calcular las cargas de pandeo con errores menores del 1 por 100 tomando solamente 10 intervalos en la barra, en vez de los 350 que propone el autor (aunque bien es verdad que en este caso se refiere a barras curvas).

Por otra parte, si $n = 2$ en las repetidas ecuaciones [5] queda, por simple sustitución:

$$y_2 = \varphi_0 \Delta x \left[2 - \frac{P}{EI} (\Delta x)^2 \right]$$

resultando, como efectivamente apunta el autor, que la flecha final y_2 es proporcional a la φ_0 inicial en el proceso numérico. Sin embargo, si según el autor, $y_2 > 0$ en el cálculo significa que la barra no ha llegado a las condiciones críticas de pandeo, e $y_2 < 0$ que se han sobrepasado dichas condiciones, se implica que $y_2 = 0$ representa el instante de pandeo. De tal forma, haciendo $y_2 = 0$ en la ecuación arriba indicada, y como $\varphi_0 \neq 0$ e $\Delta x \neq 0$, debe ser nulo el término entre corchetes, de donde se deduce que:

$$P_{cr} = \frac{2EI}{(\Delta x)^2};$$

lo cual señala que P_{cr} depende de la longitud del intervalo Δx , lo cual no parece lógico. Para $n = 3$ obtendríamos:

$$y_3 = \varphi_0 \Delta x \left[3 - 4 \frac{P}{EI} (\Delta x)^2 + \frac{P^2}{E^2 I^2} (\Delta x)^4 \right]$$

y vuelve a aparecer dicha anomalía.

La opinión de este comentarista es que el resultado de una $y_n \neq 0$, representa el no haber tomado un valor inicial de φ_0 correcto, aparte de la influencia de los errores acumulados de que antes se habló. Como por otra parte este valor de φ_0 que hace $y_n = 0$ es difícilmente adivinable, se impone, como hace Newmark, el partir de un valor arbitrario de φ_0 y corregir los valores finales de las y_i en una cantidad:

$$\frac{X_i y_n}{L}$$

siendo:

X_i la distancia del punto considerado al origen,

L longitud de la barra.

Esta corrección es perfectamente exacta, ya que un error en el valor inicial de φ_0 se propaga linealmente a todo lo largo de la barra, como es trivialmente demostrable.

Seguindo estas premisas, el firmante de este comentario ha desarrollado un método y varios programas de cálculo electrónico para el cálculo directo de las cargas de pandeo de barras de sección constante o variable, incluyendo todo tipo de condiciones de apoyo de las mismas e incluso considerando su peso propio, obteniendo en todos los casos errores menores del 1 por 100.

BIBLIOGRAFIA

- TIMOSHENKO & GERE: "Theory of Elastic Stability". McGraw-Hill, 1961, pp. 120-123.
- NEWMARK: "Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments, and Buckling Loads". Proceedings ASCE, vol. 68, 1942.
- MALTER: "Numerical Solutions for Beams on Elastic Foundations". Proceedings ASCE. J. Structural Division, marzo 1958.

Contestación del autor

Siempre resulta grato que otros se interesen por lo que uno ha hecho, razón por la que agradezco a F. J. de Agueda su comentario, sobre el que quiero hacer las siguientes observaciones:

I. El comentario alude solamente al caso de la pieza recta, que yo considero únicamente como introducción al caso de *pandeo lateral de arcos*. Como en ese caso, a partir del planteamiento inicial, llego a la conocida ecuación de Euler, que podríamos calificar de "solución exacta", el método numérico expuesto no tiene interés en sí mismo, sino por la posibilidad de su extensión al caso de los arcos. Este es, precisamente, el que hubiera deseado que fuese comentado.

II. El método que utilicé es perfectamente normal en análisis matemático, pues se basa en sustituir un arco por su cuerda, tomando como

esfuerzos medios los correspondientes al extremo inicial de la rebanada o dovela correspondiente, y después hacer tender la longitud del arco a *ceró*. Las relaciones que se obtengan, en el límite, si son abordables por métodos matemáticos, conducen a la que hemos llamado "solución exacta", habiendo admitido previamente las hipótesis de partida, elasticidad del material, etc.

Cuando el estudio por métodos matemáticos presenta dificultades, se puede sustituir las expresiones diferenciales por expresiones en incrementos finitos, abordando así el problema por métodos numéricos. Al tender a *ceró* los incrementos, los resultados se irán aproximando a la solución exacta, por lo que mediante tanteos, y estudiando la convergencia de dichos resultados, podremos aproximarnos cuanto que-