SIMPLIFICACION DE LA DERIVACION DE UN CONJUNTO DE VECTORES UTILIZANDO MATRICES (*)

Por JOSE M.ª HACAR RODRIGUEZ
Estudiante de Ciencias Exactas.

Estableciendo fórmulas de derivación sucesiva de matrices, de su producto y de un conjunto de vectores se simplifican las operaciones.

Entre otras aplicaciones se hace, como ejercicio, la obtención de los símbolos de Christoffel en coordenadas cilíndricas; la determinación de las componentes de la aceleración y de la sobreaceleración en el movimiento del punto sobre una curva alabeada, etc.

1. INTRODUCCION

Las ventajas que las expresiones matriciales presentan sobre las de índices son conocidas.

En la teoría y en los ejercicios que exponemos a continuación se aplica de forma compacta la derivación de un conjunto de vectores.

El paso de la notación matricial a la de índices es inmediata.

2. NOTACIONES

$$\frac{d^n A}{d t^n} = A^{\underline{|n}} = \overset{\overbrace{\cdot\cdot\;\cdot\;\cdot}^{n \text{ veces}}}{A} \qquad \text{Generalizando esta notación: } \frac{\partial^n A}{\partial x^q\, \partial y^r \ldots \partial z^s} = A^{\underline{|q_x\, r_y \cdots s_z}}$$

3. DERIVADA *N*-ESIMA DE UNA MATRIZ $A = [a_{ij}]$

Si los elementos a_{ij} de la matriz A, son función de un único parámetro t, la derivada n-ésima de A es una matriz $A^{\underline{|n}}$, cuyos elementos son los elementos de la matriz A derivados n veces. Esto es:

$$A^{\underline{|n}} = \left[a_{ij}^{\underline{|n}} \right]. \quad \text{Generalizando: } A^{\underline{|q_x\, r_y \cdots s_z}} = \left[a_{ij}^{\underline{|q_x\, r_y \cdots s_z}} \right]$$

4. DERIVADA *N*-ESIMA DE UN PRODUCTO DE MATRICES $C = A \cdot B$

Se comprueba fácilmente que si $C = A \cdot B$, la derivada n-ésima de C es la deri-

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de enero de 1974.

vada n-ésima de $A \cdot B$, considerando a A y B como funciones, conservando el orden. Por tanto:

$$C^{\underline{|n}} = \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} A^{\underline{|\alpha}} B^{\underline{|n-\alpha}}.$$

Generalizando:

$$C^{q_x r_y \ldots s_z} = \sum_{\alpha=0,\beta=0,\ldots,\gamma=0}^{\alpha=q,\beta=r,\ldots,\gamma=s} \binom{q}{\alpha}\binom{r}{\beta}\cdots\binom{s}{\gamma} A^{\underline{|\alpha_x \beta_y \ldots \gamma_z}} \cdot B^{\underline{|(q-\alpha)_x (r-\beta)_y \ldots (s-\gamma)_z}}$$

5. DERIVADA N-ESIMA DE UN CONJUNTO DE VECTORES $\bar{F}_j$ $j = 1, 2, \ldots, p$.

Sea $\{\hat{\bar{e}}_i\}$ una base de vectores constantes en todos los puntos del espacio, y $\{\bar{e}_i\}$ otra base. Supondremos que entre ambas bases existe una relación de la forma:

$$\|\bar{e}_i\| = \|\hat{\bar{e}}_i\| C, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Un problema que se nos plantea a menudo es el siguiente:

"Dados los vectores $\bar{F}_j$ referidos a la base $\{\bar{e}_i\}$, hallar sus derivadas sucesivas en esa misma base."

Tenemos:

$$\|\bar{F}_j\| = \|\bar{e}_i\| F.$$

Para resolver el problema expresamos $\{\bar{F}_j\}$ en la base $\{\hat{\bar{e}}_i\}$, como:

$$\|\bar{e}_i\| = \|\hat{\bar{e}}_i\| C, \qquad \|\bar{F}_j\| = \|\hat{\bar{e}}_i\| C F.$$

Derivando:

$$\|\bar{F}_j\|^{\underline{|n}} = \|\hat{\bar{e}}_i\| (C F)^{\underline{|n}}$$

Como:

$$\|\hat{\bar{e}}_i\| = \|\bar{e}_i\| C^{-1},$$

sustituyendo:

$$\|\bar{F}_j\|^{\underline{|n}} = \|\bar{e}_i\| C^{-1} (C F)^{\underline{|n}} = \|\bar{e}_i\| C^{-1} \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} C^{\underline{|\alpha}} F^{\underline{|n-\alpha}}$$

con lo cual se resuelve el problema. Generalizando:

$$\| \overline{F}_j \| \Big|\underline{q_x\, r_y \ldots s_z} = \| \overline{e}_i \|\, C^{-1} \sum_{\alpha=0,\,\beta=0,\ldots,\,\gamma=0}^{\alpha=q,\,\beta=r,\ldots,\,\gamma=s} \binom{q}{\alpha}\binom{r}{\beta} \cdots \binom{s}{\gamma}\, C\Big|\underline{\alpha_x\, \beta_y \ldots \gamma_z}\; .\, F\Big|\underline{(q-\alpha)_x (r-\beta)_y \ldots (s-\gamma)_z}$$

(derivación covariante).

Ejercicio 1.º

Hallar la derivada 1.ª y 2.ª de $\overline{F} = 5\,u\,v\,\overline{e}_1 + w\,\overline{e}_3$, respecto de t:

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2, \quad z = w.$$

NOTA. — $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ es la base natural o derivada de las coordenadas u, v, w.

Solución:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 5\,u\,v \\ 0 \\ w \end{Bmatrix}; \quad \{\dot{F}\} = \begin{Bmatrix} 5\,(\dot{u}\,v + u\,\dot{v}) \\ 0 \\ \dot{w} \end{Bmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2\,u & 2\,v & 0 \\ 2\,u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\dot{C} \begin{pmatrix} 2\,\dot{u} & 2\,\dot{v} & 0 \\ 2\,\dot{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \frac{1}{-4\,u\,v} \begin{pmatrix} 0 & -2\,v & 0 \\ -2\,u & 2\,u & 0 \\ 0 & 0 & -4\,u\,v \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overline{F}\Big|\underline{1}} = \| \overline{e} \|\, [C^{-1}\, \dot{C}\, \{F\} + \{\dot{F}\}] \boxed{= \| \overline{e} \| \begin{Bmatrix} 5\,(2\,\dot{u}\,v + u\,\dot{v}) \\ 0 \\ \dot{w} \end{Bmatrix}} = \| \overline{e} \|\, B\,; \quad \dot{B} = \begin{Bmatrix} 5\,(2\,\ddot{u}\,v + 3\,\dot{u}\,\dot{v} + u\,\ddot{v}) \\ 0 \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\overline{F}\Big|\underline{2}} = \| \overline{e} \|\, [C^{-1}\, \dot{C}\, \{B\} + \{\dot{B}\}] \boxed{= \| \overline{e} \| \begin{Bmatrix} 5\left(\dfrac{2\,\dot{u}\,v}{u} + 4\,\dot{u}\,\dot{v} + 2\,\ddot{u}\,v + u\,\ddot{v}\right) \\ 0 \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}}$$

Ejercicio 2.º

Hallar la derivada 1.ª y 2.ª del vector de posición en coordenadas cilíndricas:

$$\overline{r} = \rho\,\overline{\rho}_0 + z\,\overline{z}_0\,, \quad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{Bmatrix}; \quad \{\dot{F}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ 0 \\ \dot{z} \end{Bmatrix}; \quad \dot{C} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = C^T$$

$$\boxed{\overline{r}^{\,\underline{|1}}} = \|\overline{e}\| \left[C^{-1}\dot{C}\{F\} + \{\dot{F}\}\right] \boxed{= \overline{(\rho_0, \varphi_0, z_0)} \begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\,\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}} = \|\overline{e}\|\, B\,; \quad \dot{B} = \begin{Bmatrix} \ddot{\rho} \\ \dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\overline{r}^{\,\underline{|2}}} = \|\overline{e}\| \left[C^{-1}\dot{C}\{B\} + \{\dot{B}\}\right] \boxed{= \overline{(\rho_0, \varphi_0, z_0)} \begin{Bmatrix} \ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2 \\ 2\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}}$$

Ejercicio 3.º

Hallar las derivadas de los vectores $\overline{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de la base natural respecto de las coordenadas curvilíneas x^j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Expresar el resultado en la base natural y en la recíproca.

Solución:

En este caso $F = I$, luego:

$$\|\overline{e}_i\|^{\underline{|1}x\,j} = \|\overline{e}_i\|\, C^{-1}\, C^{\underline{|1}x\,j}$$

que puesto a su vez matricialmente, da:

$$\boxed{\left\| \, \|\overline{e}_i\|^{\underline{|1}x\,j} \right\| = \|\overline{e}_i\|\, C^{-1} \left\| C^{\underline{|1}x\,j} \right\|}$$

NOTA. — Por definición, los elementos de la matriz $C^{-1} \| C^{\underline{|1}x\,j} \|$ son los símbolos de Christoffel de segunda especie. Como $\| e_i \| = \| \overline{e^i} \|\, G$, sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\boxed{\left\| \, \|\overline{e}_i\|^{\underline{|1}x\,j} \right\| = \|\overline{e^i}\|\, G\, C^{-1} \left\| C^{\underline{|1}x\,j} \right\|}$$

NOTA. — Por definición, los elementos de la matriz $G\, C^{-1} \| G^{\underline{|1}x\,j} \|$ son los símbolos de Christoffel de primera especie.

Notación:

$$C^{-1} \| C^{\underline{|1}x\,j} \| = \left(\begin{Bmatrix} l \\ m\,n \end{Bmatrix} \right), \begin{Bmatrix} l \\ m\,n \end{Bmatrix} \longleftrightarrow \begin{Bmatrix} l \to \text{indica la fila} \\ m \to \text{indica la columna} \\ n \to \text{indica la caja} \end{Bmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow [m\,n, l], \; ([m\,n, l]) = G\, C^{-1} \| C^{\underline{|1}x\,j} \|$$

Ejercicio 4.º

Hallar los símbolos de Christoffel de las coordenadas cilíndricas:

$$\hat{x} = \rho \cos \varphi, \quad \hat{y} = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad \hat{z} = z, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$C = \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\right) = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi & \rho \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix};$$

$$\| C^{\lfloor 1 x^j} \| = \| C^{\lfloor 1 \rho}, C^{\lfloor 1 \varphi}, C^{\lfloor 1 z} \| = \left(\begin{matrix} 0 & -\operatorname{sen} \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} -\operatorname{sen} \varphi & -\rho \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\rho \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \Omega \right)$$

Aplicando las conclusiones del ejercicio anterior, tenemos:

$$\boxed{C^{-1} \| C^{\lfloor 1 x^j} \| = \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & -\rho & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \Omega \right] = B, \quad \text{símbolos de 2.ª especie.}}$$

$$\boxed{G C^{-1} \| C^{\lfloor 1 x^j} \| = G B = \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & -\rho & 0 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \Omega \right] \quad \text{símbolos de 1.ª especie.}}$$

Ejercicio 5.º

Hallar las componentes de la aceleración y sobreaceleración del movimiento de un punto sobre una curva alabeada:

$$\| \bar{t}, \bar{n}, \bar{b} \|^{\lfloor 1 s} = \| \bar{t}, \bar{n}, \bar{b} \| \, \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1/R & 0 \\ 1/R & 0 & -1/T \\ 0 & 1/T & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{v} = |\bar{v}| \, \bar{t}, \quad \frac{ds}{dt} = |\bar{v}|.$$

Solución:

Introducimos la notación $\| \bar{e}_i \| = \| \bar{t}, \bar{n}, \bar{b} \|$, con lo cual las expresiones anteriores toman la forma:

$$\| \bar{e}_i \|^{\lfloor 1 s} = \| \bar{e}_i \| \, \mathbf{Q}; \qquad \| \bar{e}_i \|^{\lfloor 1 t} = \| \bar{e}_i \|^{\lfloor 1 s} \frac{ds}{dt} = \| \bar{e}_i \| \, \mathbf{Q} \, |\bar{v}|.$$

$$\boxed{\bar{v} = \| \bar{e}_i \| \begin{Bmatrix} |\bar{v}| \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \qquad \bar{v} = \| \bar{e}_i \| \, B_1}$$

Derivando:

$$\overline{a} = \| \overline{e}_i \|^{\lfloor 1 t} \cdot B_1 + \| \overline{e}_i \| \dot{B}_1 = \| \overline{e}_i \| \left[\mathrm{Q} \, |\overline{v}| \, B_1 + \dot{B}_1 \right]$$

$$\boxed{\overline{a} = \| \overline{e}_i \| \begin{Bmatrix} |\dot{\overline{v}}| \\ |\overline{v}|^2/R \\ 0 \end{Bmatrix} ; \qquad \overline{a} = \| \overline{e}_i \| B_2}$$

Operando en igual forma, obtenemos la sobreaceleración:

$$\boxed{\overline{S}_a = \| \overline{e}_i \| \left[\mathrm{Q} \, |\overline{v}| \, B_2 + \dot{B}_2 \right] = \| \overline{e}_i \| \begin{bmatrix} |\ddot{\overline{v}}| - |\overline{v}|^3/R^2 \\ 3 \, |\dot{\overline{v}}| \, |\overline{v}|/R + |\overline{v}|^3 \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{R}\right) \\ |\overline{v}|^3/R\,T \end{bmatrix}}$$