COMENTARIOS SOBRE ARTICULOS PUBLICADOS EN MESES ANTERIORES

Comentarios al artículo «Nota acerca de la presión intersticial», de J. L. Fernández Casado, publicado en el mes de mayo de 1974.

Por MANUEL ALONSO FRANCO Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

En el estudio de J. L. Fernández Casado sobre la presión intersticial, que tratamos de comentar y complementar en su aspecto teórico, se ha prescindido de las fuerzas derivadas de la aceleración del fluido intersticial; se ha prescindido también de la acción de la viscosidad en el fluido.

Estas acciones, por tratarse de velocidades muy pequeñas, tienen una influencia despreciable. Se prescinde de ellas en las aplicaciones, pero entiendo que deben citarse para aclarar posibles puntos dudosos e, incluso, plantear el caso de una circulación transitoria en el fluido intersticial. Las ecuaciones que resultan, naturalmente, son más complejas, aspecto que no tiene mayor importancia, pues como hemos indicado, se trata solamente del planteamiento del problema en el campo teórico, sin miras de aplicación práctica.

El punto de partida para el estudio del problema es determinar las fuerzas que actúan para mantener el fluido en equilibrio dinámico. Las fuerzas de masa necesarias para este equilibrio, con sentido contrario, son las fuerzas de masa que aparecen en el medio poroso debido a la circulación del fluido. Es simplemente la aplicación del principio de la acción y la reacción.

Prescindiendo de la viscosidad, las ecuaciones de equilibrio en el fluido se expresan mediante las fórmulas de Euler, que no son sino la aplicación del principio de D'Alembert a un fluido en régimen transitorio. En nuestro caso, los términos afectados por las velocidades (que deben considerarse las medias existentes) hay que multiplicarlos por la porosidad geométrica (n), y los términos dependientes de la presión (p) por la porosidad efectiva (η). Resultan las ecuaciones del sistema (1):

$$\left.\begin{aligned}
n\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)&=X-\frac{\partial(\eta p)}{\partial x}\\
n\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)&=Y-\frac{\partial(\eta p)}{\partial y}\\
n\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)&=Z-\frac{\partial(\eta p)}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

En el caso de que la circulación del fluido se establezca en régimen permanente se anulan las derivadas de las velocidades respecto al tiempo. Si además consideramos despreciables los términos en los que aparecen las velocidades, las fuerzas de masa resultan funciones sólo de la presión. Llevadas estas fuerzas de masa a las ecuaciones diferenciales de las tensiones del elemento poroso, resultan las conocidas ecuaciones de Biot, sistema (2):

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}&=\frac{\partial(\eta p)}{\partial x}\\
-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\ldots\ldots\ldots\ldots&=\frac{\partial(\eta p)}{\partial y}\qquad(2)\\
-\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\ldots\ldots\ldots\ldots&=\frac{\partial(\eta p)}{\partial z}-\gamma_{sat.}
\end{aligned}$$

No es de extrañar que las tensiones deducidas de este sistema (2) no cumplan las condiciones de compatibilidad, puesto que, como ya hemos indicado, se ha prescindido de las velocidades, y por tanto el sistema es incorrecto, aunque de utilización práctica por ser despreciable el error que se comete.

Este sistema (2) puede ponerse en función de las "tensiones totales", definiendo éstas como la tensión correspondiente a considerar, en cada cara del elemento diferencial, las fuerzas que actúan en el medio poroso y las que actúan en el fluido, teniendo presente la porosidad efectiva. En el nuevo sistema desaparecen las fuerzas de masa, cosa de prever si tenemos presente la interpretación mecánica de la definición de tensiones totales".

En el caso de que no se prescinda de las velocidades, dando por válida la fórmula de Darcy, pueden introducirse algunas simplificaciones (ver REVISTA DE OBRAS PUBLICAS, octubre 1973). Si se emplean "tensiones totales" en el correspondiente sistema diferencial, aparecen fuerzas de masa debidas a tales velocidades.

En cuanto al caso de una circulación transitoria en el fluido intersticial, pueden hacerse análogas consideraciones. Si se prescinde de las velocidades, la única diferencia con el caso de movimiento permanente es que las presiones no solamente dependen de las coordenadas del punto considerado, sino que también son función del tiempo. La dificultad está, como siempre, en conocer la distribución de presiones en el fluido.

Por último, si se considera la viscosidad del fluido, las ecuaciones de Euler se transforman en las de Navier-Stokes, que en nuestro caso y para la proyección sobre el eje X, resulta (3). El coeficiente de viscosidad se designa por (ψ):

$$n\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = X - \frac{\partial(\eta p)}{\partial x} + {} + n\psi'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (3)$$

Sobre estas ecuaciones, en las que se ha introducido la viscosidad del fluido intersticial, podríamos hacer análogas consideraciones a como se ha hecho respecto al sistema (1), pero el tema, como hemos repetido varias veces, es puramente teórico y, en consecuencia, es suficiente su enunciado con vista a una apreciación cualitativa.

BIBLIOGRAFIA

PRANDLT: Applied Hidro and Aero Mechanics. New York, 1934.

Contestación del autor

Conforme con las apreciaciones teóricas que hace M. Alonso Franco. Igualmente podría haberse partido del volumen elemental e ir considerando las diferentes acciones. En esencia, la cuestión de la presión intersticial se reduce a una aplicación elemental del principio de D'Alembert o, si se quiere del de la conservación de energía (*), junto con el principio de la acción y de la reacción —las fuerzas que se introducen para establecer el equilibrio dinámico en el fluido son iguales y contrarias a las que el fluido ejerce en el cuerpo poroso—.

En realidad, el planteamiento del problema se hace como si el medio poroso fuese continuo y la porosidad continua y uniformemente distribuida. En las fórmulas, los términos afectados por la presión vienen multiplicados por la porosidad efectiva y en los que interviene la velocidad por la porosidad geométrica.

En cuanto al movimiento transitorio, se podría añadir algo respecto a fenómenos de aire entrampado y a efectos de capilaridad (sobre estas cuestiones se discutió en relación con la catástrofe de la presa de San Francisco; C. F. Tolman, pág. 153), pero creemos que lo fundamental es lo expuesto y, en realidad, no se diferencia en su desarrollo el movimiento transitorio del movimiento permanente.

(*) Las fuerzas a introducir para establecer el equilibrio no son otra cosa que las derivadas de la energía potencial respecto a las direcciones de referencia,