

DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACION, EN SECCION FISURADA, DE SECCIONES DE HORMIGON PRETENSADO PARA LOS ESTADOS LIMITES DE FISURACION(*)

Por JUAN MURCIA VELA

Dr. Ingeniero de Caminos.
Licenciado en Ciencias Matemáticas.
Profesor Agregado de Hormigón Armado
y Pretensado de la E. T. S. de Ingenieros
de Caminos de Santander.

JOSE ANTONIO TORROJA CAVANILLAS

Dr. Ingeniero de Caminos.
Catedrático de Hormigón Armado
y Pretensado de la E. T. S. de Ingenieros
de Caminos de Madrid.

Con la colaboración de

JESUS MONTANER FRAGÜET

Ingeniero de Caminos.

El presente artículo estudia el cálculo, a partir del estado de neutralización, del incremento $\Delta\sigma_s$, que viene limitado por razones de fisuración, en secciones rectangulares, T y doble T (o asimilables a las mismas) de hormigón pretensado. Se trata, en definitiva, del cálculo a fisuración en sección fisurada según el CEB-FIP.

Al final del mismo se llega a una serie de conclusiones prácticas de comprobación y dimensionamiento en forma de fórmulas exactas, fórmulas aproximadas y ábacos.

1. INTRODUCCION

Según las "Recomendaciones internacionales del CEB-FIP para el proyecto y la ejecución de estructuras de hormigón", el estudio de las condiciones de fisuración en elementos de hormigón pretensado viene definido por una serie de estados límites sucesivos:

- Estado límite de descompresión, correspondiente a una probabilidad despreciable de formación de fisuras y caracterizado por una compresión nula en la fibra menos comprimida de la sección.
- Estado límite de formación de fisuras, correspondiente a una probabilidad determinada, pero pequeña, de aparición de fisuras.
- Estado límite de abertura de fisuras, correspondiente a una determinada probabilidad de que el valor característico de la anchura de fisuras no supere ciertos valores límites.

Mediante una combinación conveniente de estos estados, en función de las cargas y acciones, se definen las diferentes clases de verificación relativas a las condiciones de fisuración (clases I, II y III).

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de septiembre de 1974.

En la práctica, las comprobaciones relativas a estos estados llevan consigo una serie de cálculos, cuyo resumen es el siguiente:

- *Estado límite de descompresión:* Cálculo de tensiones en sección no fisurada, suponiendo distribución lineal de las mismas en el hormigón y comprobación de que no aparecen tracciones en ninguna fibra de la sección.
- *Estado límite de formación de fisuras:*
 - Cálculo de tensiones en las hipótesis expuestas anteriormente, comprobando que las tracciones en el hormigón no superan un cierto valor límite distinto de cero (en principio, igual a la resistencia del hormigón a tracción).
 - Cálculo de tensiones en sección fisurada, suponiendo distribución lineal de las mismas en el hormigón, comprobando que el incremento de tensión en la armadura $\Delta \sigma_s$, referido al estado de neutralización de la sección, no supera un cierto valor límite.
- *Estado límite de aberturas de fisuras:*
 - Cálculo de tensiones en sección fisurada y distribución lineal de las mismas, comprobando que el incremento de tensiones en la armadura $\Delta \sigma_s$, referido a neutralización, no supera un cierto valor límite, función de la anchura límite admitida para las fisuras.

Los cálculos sobre sección no fisurada no presentan ninguna dificultad, puesto que se trabaja con la sección total homogeneizada. Sin embargo, los cálculos sobre sección fisurada, que corresponden exactamente al método de la teoría clásica, pero limitando solamente la tensión en la armadura, pueden dar lugar a cierta dificultad operativa.

En el presente trabajo se pretende simplificar el análisis respecto a fisuración de secciones de hormigón pretensado en aquellos casos en los que es necesario realizar el cálculo sobre sección fisurada.

Consideramos tres tipos de secciones:

- Secciones rectangulares.
- Secciones T.
- Secciones doble T.

por estimar que con ellas se cubre, en la práctica, la mayoría de las secciones utilizadas, que, si no corresponden exactamente a alguna de las mencionadas, sí son equivalentes respecto a este tipo de cálculo (por ejemplo, una sección en cajón se puede reducir a una sección doble T).

2. DESARROLLO

Sea una sección de hormigón pretensado sometida a una sollicitación exterior M , N y a un esfuerzo P en la armadura activa o de pretensado (fig. 1).

Es necesario efectuar el estudio de la sección fisurada como si fuera de hormigón armado, pero tomando como referencia el estado de neutralización. Este estado

corresponde a la anulación de las tensiones en el hormigón originadas solamente por el pretensado, y se produce al superponer al anterior el correspondiente a una fuerza de tracción P_n actuando al mismo nivel que P . El valor de P_n varía de unos casos a otros, pero, por supuesto, no hay razón para que coincida con P , puesto que P_n actúa sobre la sección total homogeneizada.

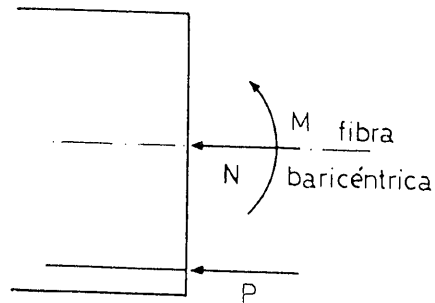


Figura 1.

Según esto habrá que analizar la sección como si fuera de hormigón armado en teoría clásica, sometida a la siguiente sollicitación:

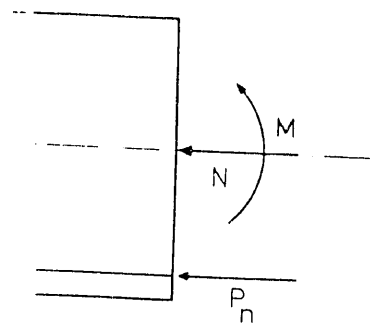


Figura 2.

A efectos de claridad en la exposición consideraremos primeramente los casos más sencillos correspondientes a una sollicitación exterior de flexión simple ($N = 0$) y a la no existencia de armadura pasiva. Con posterioridad se analizarán sucesivamente los demás casos.

Sección rectangular.

Dada una sección de este tipo, tal y como se indica en la figura, se dispone de tres ecuaciones (dos de equilibrio y una de compatibilidad de deformaciones) para

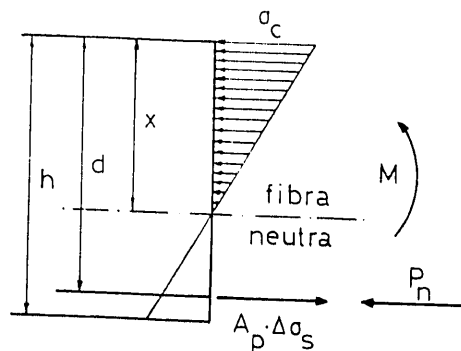


Figura 3.

calcular x , σ_r y $\Delta \sigma_s$, incógnitas en las mismas. Estas ecuaciones, las de teoría clásica como ya dijimos, son:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n = \frac{1}{2} \sigma_c b x - A_p \Delta \sigma_s \\ M = \frac{1}{2} \sigma_c b x \left(d - \frac{x}{3} \right) \\ \frac{n \sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_s}{d-x} \end{array} \right. \quad (1)$$

Llamando $\sigma_0 = \frac{P_n}{A_p}$ obtenemos sucesivamente para la primera ecuación

$$P_n = \frac{1}{2} \sigma_c b x - \frac{P_n}{\sigma_0} \Delta \sigma_s$$

$$P_n \left(1 + \frac{\Delta \sigma_s}{\sigma_0} \right) = \frac{1}{2} \sigma_c b x$$

y llamando $K = 1 + \frac{\Delta \sigma_s}{\sigma_0}$ tenemos

$$K \cdot P_n = \frac{1}{2} \sigma_c b x$$

$$M = \frac{1}{2} \sigma_c b x \left(d - \frac{x}{3} \right)$$

$$\frac{n \sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_s}{d-x}$$

Podemos considerar ahora estas ecuaciones adimensionalmente, dividiendo la primera por $\sigma_r \cdot b \cdot h$, la segunda por $\sigma_r \cdot b \cdot h^2$ y la tercera por $\frac{\sigma_r}{h}$, siendo σ_r una cierta tensión de referencia (que en ciertos casos puede resultar interesante tomarla con un valor igual a $\Delta \sigma_s$).

Las ecuaciones, procediendo así, resultan

$$K P_n = \frac{1}{2} \sigma_c x$$

$$M = \frac{1}{2} \sigma_c x \left(d - \frac{x}{3} \right)$$

$$\frac{n \sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_s}{d-x}$$

donde se ha preferido no cambiar la notación para las variables adimensionales, que en realidad representan

$$\frac{P_n}{\sigma_y b h}, \frac{M}{\sigma_y b h^2}, \frac{x}{h}, \frac{d}{h}, \frac{\sigma_c}{\sigma_y} \text{ y } \frac{\Delta \sigma_s}{\sigma_y},$$

respectivamente a sus correspondientes dimensionales.

Entre las variables desconocidas (x , σ_c y $\Delta \sigma_s$) existe una singular, $\Delta \sigma_s$, que se encuentra limitada merced a la condición impuesta por el estado límite de fisuración que corresponda. Es interesante, por ello, eliminar las otras dos de las tres ecuaciones de forma que se obtenga una función de $\Delta \sigma_s$.

Procediendo de esta forma, es decir, eliminando σ_c y x , se puede comprobar fácilmente que se obtiene la función

$$2 n K^2 P_n^2 (3 M - 2 d K P_n) = 9 \Delta \sigma_s (d K P_n - M)^2$$

que en forma explícita, $M = f(P_n)$, es

$$M = \frac{3 \Delta \sigma_s d K P_n + n K^2 P_n^2 \pm K P_n \sqrt{n^2 K^2 P_n^2 + 2 \Delta \sigma_s n d K P_n}}{3 \Delta \sigma_s}$$

Resulta interesante estudiar esta función tomando como coordenadas a P_n y M y considerando $\Delta \sigma_s$ como parámetro. De este estudio se llega a las siguientes conclusiones:

- La gráfica de esta función, para un valor genérico positivo de $\Delta \sigma_s$, es de una forma cualitativa

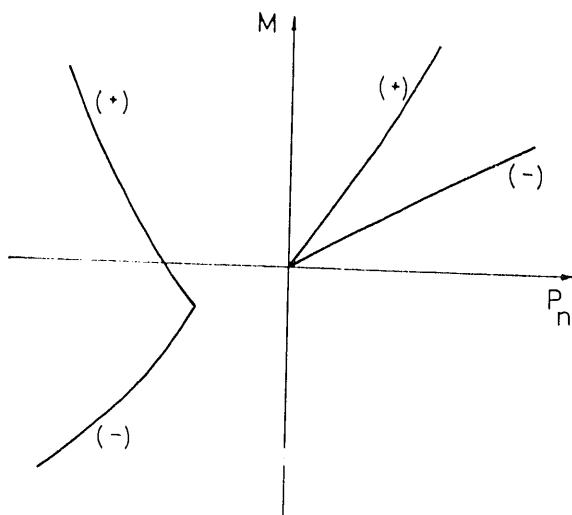


Figura 4.

Las diferentes ramas de la gráfica corresponden, como se indica en la figura, a los dos signos (+ y -) de la raíz cuadrada de la función en su forma explícita.

— Tal como se han tomado los signos de los esfuerzos sólo es interesante para nuestro estudio el cuadrante $M \geq 0$ y $P_n \geq 0$, por lo cual en adelante nos limitaremos al mismo.

— En dicho cuadrante, y considerando en forma explícita e independientemente la función con raíz cuadrada positiva y negativa, se demuestra que:

Para la función con raíz positiva, dado un punto del cuadrante (P_n, M) , se verifica que el mismo no pertenece a la gráfica de la función para ningún valor de $\Delta \sigma_s$ positivo o bien pertenece a la gráfica de la función para dos valores positivos de $\Delta \sigma_s$.

Para la función con raíz negativa, dado un punto del cuadrante (P_n, M) , se verifica que el mismo no pertenece a la gráfica de la función para ningún valor de $\Delta \sigma_s$ positivo o bien pertenece a la gráfica de la función para un solo valor positivo de $\Delta \sigma_s$.

Aún se puede decir más para esta función con raíz negativa. Dado un punto P_n, M del cuadrante, se verifica que éste pertenece a la gráfica de la función para un solo valor de $\Delta \sigma_s$ positivo o negativo. La frontera entre los valores positivos y negativos de $\Delta \sigma_s$, es la recta $M = \frac{2}{3} d P_n$, correspondiente a $\Delta \sigma_s = 0$ (la fibra neutra se encuentra a nivel de la armadura):

— De lo anterior se deduce que la función con raíz cuadrada negativa, en su forma explícita, es la única que tiene sentido físico en nuestro estudio, puesto que sólo para ella existe univocidad entre los puntos del cuadrante y los valores de $\Delta \sigma_s$ correspondientes al mismo.

En adelante sólo utilizaremos ya esta función; es decir,

$$M = \frac{3 \Delta \sigma_s d K P_n + n K^2 P_n^2 - K P_n \sqrt{n^2 K^2 P_n^2 + 2 \Delta \sigma_s n d K P_n}}{3 \Delta \sigma_s}$$

— Dado un valor fijo para $\Delta \sigma_s$, $\Delta \sigma_s = C$, por la continuidad y la univocidad, la gráfica de la función para dicho valor de $\Delta \sigma_s$ constituye frontera entre puntos correspondientes a valores mayores y menores que C .

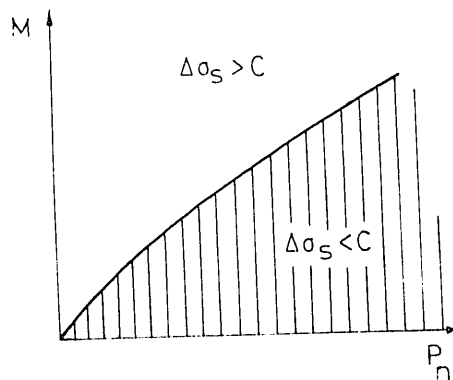


Figura 5.

Si C es el límite de $\Delta \sigma_s$ correspondiente a una determinada condición impuesta por el estado límite de fisuración que se considere, todos los puntos (combinaciones de un momento flector exterior M y una fuerza de neutralización P_n) que pertenezcan a la mencionada gráfica o estén por debajo de ella cumplen aquella condición.

— En el cuadrante que se considera y para $\Delta \sigma_s \geq 0$ se verifica:

La función no tiene puntos de inflexión.

La función derivada, o sea, la pendiente de la curva, es positiva, decreciente y tiene límite para $P_n \rightarrow \infty$. Dicho límite es $\frac{2}{3} dK$, lo cual significa que la curva tiende a ser paralela a la recta $M = \frac{2}{3} dK P_n$ y, por lo anterior, está por encima de ella.

Esto último también se puede demostrar muy fácilmente de la siguiente forma:

$$M = \frac{3 \Delta \sigma_s dK P_n + n K^2 P_n^2 - K P_n}{3 \Delta \sigma_s} \left[n^2 K^2 P_n^2 + 2 \Delta \sigma_s n dK P_n \right]$$

$$\frac{3 \Delta \sigma_s dK P_n + n K^2 P_n^2 - K P_n}{3 \Delta \sigma_s} (n K P_n + \Delta \sigma_s \cdot d)^2 =$$

$$= \frac{3 \Delta \sigma_s dK P_n - \Delta \sigma_s dK P_n}{3 \Delta \sigma_s} = \frac{2}{3} dK P_n$$

— Se puede entonces utilizar la recta $M = \frac{2}{3} dK P_n$ (con $K = 1 + \frac{C}{\sigma_0}$), cuya expresión analítica es muy simple, en lugar de la curva teórica como frontera aproximada para los puntos $\Delta \sigma_s > C$ y $\Delta \sigma_s < C$, siempre que $C \geq 0$.

Todo punto de la recta o que se encuentra por debajo de ella cumple la condición de fisuración, puesto que la recta está por debajo de la curva a su vez.

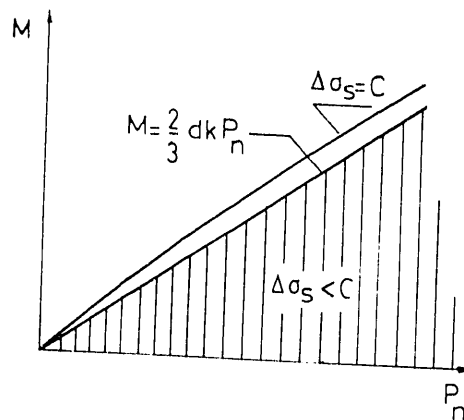


Figura 6.

— Como de los puntos por encima de la recta no se puede asegurar nada sería muy favorable que la curva se aproximase mucho a la recta para poder cubrir una gran parte de los puntos $\Delta \sigma_s < C$, utilizando la recta como frontera aproximada.

Esto, sobre todo para valores pequeños de P_{II} , no es así en todos los casos para este tipo de sección (rectangular) como se ha comprobado mediante ejemplos numéricos.

Conviene, por ello, buscar una frontera más aproximada a la real para los valores pequeños de P_{II} , y cuya expresión analítica continúe siendo sencilla. La mejor solución es la utilización de dos rectas en lugar de una sola: la primera pasando por el origen y la segunda con pendiente igual a $\frac{2}{3} d K$, de forma que se mantengan por debajo de la curva teórica.

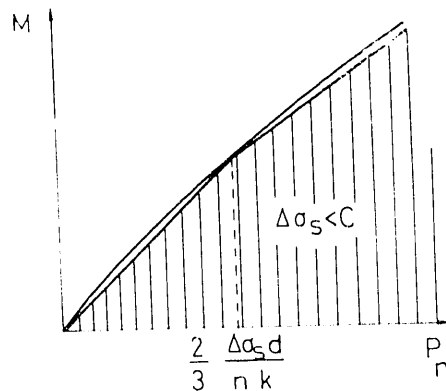


Figura 7.

Examinando la expresión de la función resulta que

$$P_{II} = \frac{2}{3} \frac{\Delta \sigma_s d}{n K}$$

es un valor conveniente para limitar ambas rectas. En efecto, sustituyendo dicho valor en

$$M = \frac{3 \Delta \sigma_s d K P_{II} + n K^2 P_{II}^2 - K P_{II} \sqrt{n^2 K^2 P_{II}^2 + 2 \Delta \sigma_s n d K P_{II}}}{3 \Delta \sigma_s}$$

aparece un cuadrado perfecto bajo la raíz y se obtiene

$$M = \frac{14}{27} \frac{\Delta \sigma_s d^2}{n}$$

que claramente se puede sustituir por

$$M = \frac{1}{2} \frac{\Delta \sigma_s d^2}{n}$$

que es más sencillo, muy aproximado y, lo que es importante, menor.

Tenemos entonces:

$$\text{para } P_n \cdot \frac{2}{3} \frac{\Delta \sigma_s d}{nK};$$

$$\frac{M}{P_n} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\Delta \sigma_s d^2}{n}}{\frac{2}{3} \frac{\Delta \sigma_s d}{nK}} = \frac{3}{4} dK$$

$$\text{para } P_n \cdot \frac{2}{3} \frac{\Delta \sigma_s d}{nK};$$

$$\frac{\left(M - \frac{1}{2} \frac{\Delta \sigma_s d^2}{n} \right)}{\left(P_n - \frac{2}{3} \frac{\Delta \sigma_s d}{nK} \right)} = \frac{2}{3} dK$$

es decir,

$$\text{para } P_n \cdot \frac{2}{3} \frac{\Delta \sigma_s d}{nK};$$

$$M = \frac{3}{4} dK P_n$$

$$\text{para } P_n \cdot \frac{2}{3} \frac{\Delta \sigma_s d}{nK};$$

$$M = \frac{1}{18} \frac{\Delta \sigma_s d^2}{n} + \frac{2}{3} dK P_n$$

- El recinto exacto, en el cual se cumple la condición $\Delta \sigma_s \leq C$, es convexo, lo cual significa que dados dos puntos (P_{n1}, M_1) y (P_{n2}, M_2) que la cumplen, para $0 < \delta < 1$, el punto $(\delta P_{n1} + (1 - \delta) P_{n2}, \delta M_1 + (1 - \delta) M_2)$ cumple también la condición.
- El recinto aproximado también es convexo y verifica, por tanto, la misma propiedad.

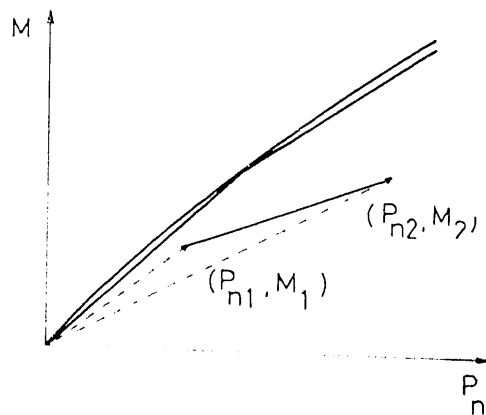


Figura 8.

Sección T.

Dada una sección de este tipo, con la disposición de la figura, se plantean las tres ecuaciones ya conocidas, correspondientes al método de teoría clásica, que en este caso son:

$$\left\{ \begin{aligned}
 P_n &= \frac{\sigma_c}{2x} [b h_f (2x - h_f) + b_{iw} (x - h_f)^2] - A_p \cdot \Delta \sigma_s \\
 M &= \frac{\sigma_c}{2x} \left[b h_f (x - h_f) (2d - h_f) + \frac{b h_f^2 (3d - h_f)}{3} + \frac{b_{iw} (x - h_f)^2 (3d - 2h_f - x)}{3} \right] \\
 \frac{n \sigma_c}{x} &= \frac{\Delta \sigma_s}{d - x}
 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

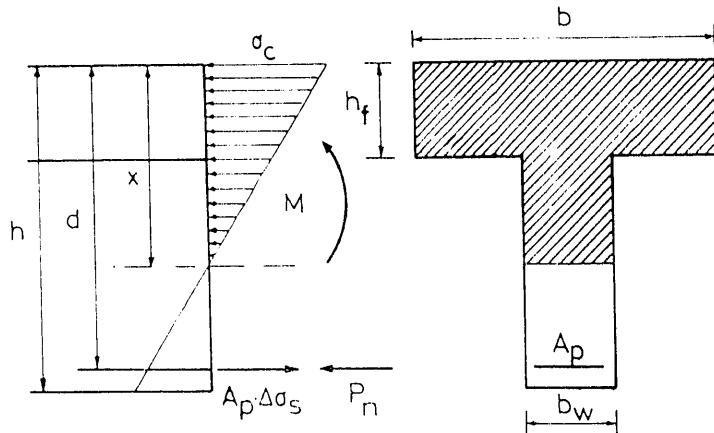


Figura 9.

Llamando, como en el caso de sección rectangular $K = 1 + \frac{\Delta \sigma_s}{\sigma_0}$, donde $\sigma_n = \frac{P_n}{A_p}$ y considerando, de la misma forma, las ecuaciones adimensionales, se obtiene

$$K P_n = \frac{\sigma_c}{2x} [h_f (2x - h_f) + b_{iw} (x - h_f)^2]$$

$$M = \frac{\sigma_c}{6x} [3 h_f (x - h_f) (2d - h_f) + h_f^2 (3d - h_f) + b_{iw} (x - h_f)^2 (3d - 2h_f - x)]$$

$$\frac{n \sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_s}{d - x}$$

donde ahora, al no cambiar la notación, las variables adimensionales representan en realidad a

$$\frac{P_n}{\sigma_c b h}, \frac{M}{\sigma_c b h^2}, \frac{x}{h}, \frac{d}{h}, \frac{h_f}{h}, \frac{b_{iw}}{b}, \frac{\sigma_c}{\sigma_s} \text{ y } \frac{\Delta \sigma_s}{\sigma_s},$$

respectivamente a sus correspondientes dimensionales.

Eliminando σ_c y x de las tres ecuaciones se llega a la siguiente función, ya en forma explícita:

$$M = \frac{1}{3} \left[\frac{K P_n}{\Delta \sigma_s b_{ic}} (3 \Delta \sigma_s [b_{ic} (d - h_f) + h_f] + n K P_n \pm \right. \\ \left. \pm \left[\Delta \sigma_s^2 h_f^2 (1 - b_{ic}) + 2 n K P_n \Delta \sigma_s [b_{ic} (d - h_f) + h_f] + n^2 K^2 P_n^2 \right] \right) + \\ + \frac{h_f^2 (1 - b_{ic}) \Delta \sigma_s}{n b_{ic}} \frac{h_f \Delta \sigma_s (2 - b_{ic}) + 2 n K P_n \pm}{\Delta \sigma_s [b_{ic} (d - h_f) + h_f] + n K P_n \pm} \\ \left. \pm 2 \left[\Delta \sigma_s^2 h_f^2 (1 - b_{ic}) + 2 n K P_n \Delta \sigma_s [b_{ic} (d - h_f) + h_f] + n^2 K^2 P_n^2 \right] \right] \\ \pm \left[\Delta \sigma_s^2 h_f^2 (1 - b_{ic}) + 2 n K P_n \Delta \sigma_s [b_{ic} (d - h_f) + h_f] + n^2 K^2 P_n^2 \right]$$

Se aprecia que la complejidad de la expresión obtenida, respecto a la de sección rectangular, es considerablemente mayor.

Como antes, estudiaremos la función en el plano $P_n - M$, tomando $\Delta \sigma_s$ como parámetro. Nos limitaremos ya directamente al cuadrante $M \geq 0, P_n \geq 0$. Paralelamente al caso de sección rectangular se deducen las siguientes conclusiones:

- La gráfica de la función tiene también dos ramas, una para cada signo (+ y -) de la raíz cuadrada, pero la ordenada en el origen no es nula sino positiva siempre que $\Delta \sigma_s > 0$.

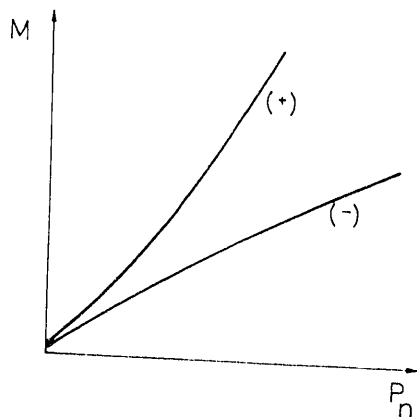


Figura 10.

- La función con raíz cuadrada negativa es la que tiene sentido físico para nuestro estudio por razones similares al caso anterior, por lo que en adelante nos referiremos únicamente a dicha función. Su ordenada en el origen para $\Delta \sigma_s > 0$ es positiva, como ya dijimos, pero es prácticamente despreciable; es nula para $\Delta \sigma_s = 0$.
- Dado un valor fijo para $\Delta \sigma_s$, $\Delta \sigma_s = C$, la gráfica de la función para dicho valor de $\Delta \sigma_s$ constituye frontera entre puntos correspondientes a valores mayores y menores que C .
- Para $\Delta \sigma_s \geq 0$, se verifica que la función derivada, o sea, la pendiente de la curva, tiene límite para $P_n \rightarrow \infty$. Dicho límite es:

$$\frac{2}{3} \frac{K}{b_{ic}} \left[b_{ic} (d - h_f) + h_f - \frac{h_f^2 (2d - h_f) (1 - b_{ic})}{b_{ic} (d - h_f)^2 + h_f (2d - h_f)} \right]$$

o sea:

$$\frac{2}{3} K \frac{d^3 + (d - h_f)^3 (b_{iw} - 1)}{d^2 + (d - h_f)^2 (b_{iw} - 1)}$$

lo cual significa que la curva tiende a ser paralela a la recta:

$$M = \frac{2}{3} K \frac{d^3 + (d - h_f)^3 (b_{iw} - 1)}{d^2 + (d - h_f)^2 (b_{iw} - 1)} P_n$$

- Se puede demostrar de una forma similar a la realizada para sección rectangular, pero más complicada que la gráfica de la función está por encima de la recta mencionada.
- Es posible, por tanto, utilizar esta recta (con $K = 1 + C/\sigma_n$), cuya expresión analítica es muy sencilla, en lugar de la curva teórica como frontera aproximada para las regiones $\Delta \sigma_s \leq C$ y $\Delta \sigma_s > C$, siempre que $C \geq 0$.

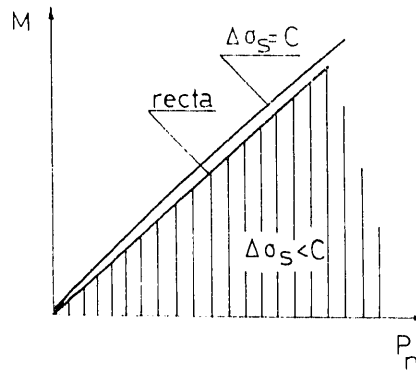


Figura 11.

Si C es el límite establecido para $\Delta \sigma_s$ por la condición de fisuración utilizada, todos los puntos de la recta o situados debajo de ella cumplen dicha condición.

- La aproximación entre recta y curva en este caso es grande como se ha comprobado mediante ejemplos numéricos.
- El recinto aproximado en el cual se cumple la condición $\Delta \sigma_s \leq C$, al estar limitado por dos rectas, es convexo. Esto significa que dados dos puntos (P_{n1}, M_1) y (P_{n2}, M_2) que pertenecen al mismo, para $0 \leq \delta \leq 1$, el punto $(\delta P_{n1} + (1 - \delta) P_{n2}, \delta M_1 + (1 - \delta) M_2)$, pertenece también al recinto.

Hasta el momento, el tratamiento dado a la sección T suponía que la fibra neutra se encontraba en la zona del alma de la sección. Sin embargo, esto no siempre es cierto, pudiéndose dar el caso en que ésta se encuentre en la zona de la cabeza superior; en este caso, a todos los efectos, habría que considerar la sección como rectangular.

Es imprescindible, pues, conocer la posición de la fibra neutra dentro de la sección. Como nos interesa ahora la variable x podemos eliminar σ_c y $\Delta \sigma_s$ de las

ecuaciones (2) ya mencionadas, en forma adimensional, de manera que se obtenga una función en la que aparezca x como parámetro, en lugar de $\Delta \sigma_s$.

Procediendo así se llega a la siguiente expresión, ya en forma explícita:

$$M = \frac{1}{3} \frac{[b_{ic} x^3 - 3 b_{ic} d x^2 - 3 (2d - h_f) (1 - b_{ic}) h_f x + (3d - 2h_f) (1 - b_{ic}) h_f^2] P_n}{\frac{2n}{\sigma_0} (x - d) P_n + b_{ic} x^2 + 2(1 - b_{ic}) h_f x - (1 - b_{ic}) h_f^2}$$

que es una hipérbola en el plano $P_n - M$.

Es preciso advertir que, al tener que eliminar la variable $\Delta \sigma_s$, hay que sustituir el coeficiente K por su valor en función de la anterior, por lo cual en la expresión final aparece σ_n y no K .

Nos interesa, como siempre, estudiar la función en el cuadrante $M_n \geq 0, P_n \geq 0$ y en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ (recordemos que x es adimensional) correspondiente a la fibra neutra dentro de la sección. De dicho estudio se concluye que:

- Dado un punto (P_n, M) del cuadrante, se verifica que tal punto pertenece a la gráfica de la función para un único valor de x comprendido entre 0 y 1 o bien no pertenece a la gráfica para ningún valor de dicho intervalo. Existe, pues, univocidad entre los puntos del cuadrante correspondiente a $0 \leq x \leq 1$ y los valores de x en dicho intervalo.
- Por la continuidad y la univocidad, la gráfica de la función para un cierto valor fijo de $x, x = C (0 \leq C \leq 1)$, constituye frontera entre los puntos correspondientes a valores mayores y menores que C .

Según esto, podemos ya conocer si la fibra neutra se encuentra en la cabeza superior o en el alma de la sección, utilizando la gráfica de la función correspondiente a $x = h_f$.

Sustituyendo dicho valor en la función resulta:

$$M = \frac{1}{3} \frac{h_f^2 (3d - h_f) P_n}{\frac{2n}{\sigma_0} (h_f - d) P_n + h_f^2}$$

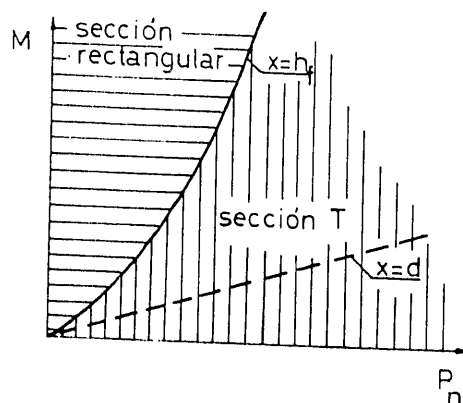


Figura 12.

Otro valor singular es el correspondiente a $x = d$. Sustituyendo este valor se obtiene:

$$M = \frac{2}{3} \frac{d^3 + (d - h_f)^3 (b_{uc} - 1)}{d^2 + (d - h_f)^2 (b_{uc} - 1)} P_u$$

que es una recta y, como se puede comprobar, coincide como era de esperar con la gráfica de la función con parámetro $\Delta \sigma_s$ correspondiente al valor $\Delta \sigma_s = 0$.

Sección doble T.

Para este tipo de sección se pueden plantear las mismas ecuaciones ya vistas para las secciones rectangular y T. Es evidente la mayor complejidad de las mismas, al suponer que la fibra neutra se encuentra en la zona de la cabeza inferior de la sección.

Sin embargo, vamos a comprobar que en la práctica esto no va a ocurrir casi nunca para los valores límites impuestos a $\Delta \sigma_s$ por los diferentes estados límites de fisuración, por lo que, a efectos de las ecuaciones para determinar la frontera de los puntos que cumplen y no cumplen tal condición de fisuración, la sección se comporta como una sección T.

Para ello nos serviremos de la ecuación de compatibilidad.

$$\frac{\sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_s}{n(d-x)}$$

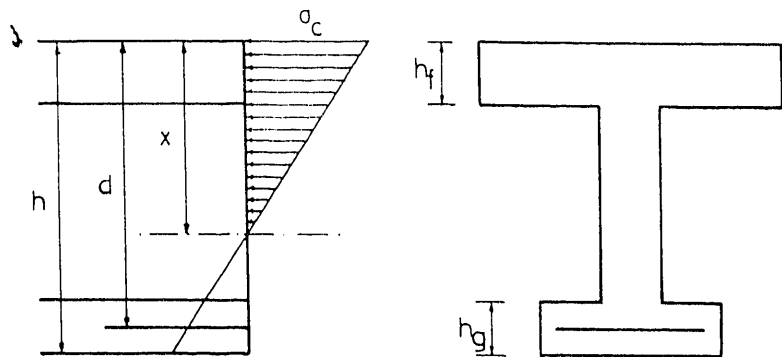


Figura 13.

Se trata de analizar los casos en los cuales la fibra neutra está dentro de la cabeza inferior, es decir, $x \geq h - h_g$. Dichos casos ocurrirán para valores grandes de σ_c y n y pequeños de $\Delta \sigma_s$.

Tomaremos, para considerar un caso muy desfavorable, una $\sigma_c = 250 \text{ Kp/cm}^2$, ya que la fisuración se estudia con coeficientes de seguridad iguales a la unidad y se manejan tensiones reales; el valor mencionado es muy grande incluso para hormigones muy buenos, ya que de alguna manera existe una correlación entre dicho valor y la tensión máxima limitada por el estado último de rotura. Para el coeficiente de equivalencia tomaremos un valor alto, $n = 15$. Para valor límite de $\Delta \sigma_s$ tomaremos

remos el más pequeño de todos los propuestos por el CEB, $\Delta \sigma_s = 4.000 \text{ N/cm}^2 = 400 \text{ Kp/cm}^2$.

Volviendo a la ecuación de compatibilidad y suponiendo que $x = h - h_{tr}$ tenemos:

$$\frac{250}{h - h_{tr}} = \frac{400}{15(d - h + h_{tr})}$$

$$\frac{h_{tr}}{h} = \frac{4 + 37,5 \left(1 - \frac{d}{h}\right)}{41,5}$$

obteniendo para distintos valores de $\frac{d}{h}$ los siguientes límites superiores de la profundidad relativa de la cabeza inferior para no tener que considerar la sección doble T como tal:

$$\frac{d}{h} = 1 \rightarrow \frac{h_{tr}}{h} = 0,096 \text{ (0,176 para } \Delta \sigma_s = 800 \text{ Kp/cm}^2\text{)}$$

$$\frac{d}{h} = 0,9 \rightarrow \frac{h_{tr}}{h} = 0,187 \text{ (0,258 para } \Delta \sigma_s = 800 \text{ Kp/cm}^2\text{)}$$

$$\frac{d}{h} = 0,8 \rightarrow \frac{h_{tr}}{h} = 0,277 \text{ (0,340 para } \Delta \sigma_s = 800 \text{ Kp/cm}^2\text{)}$$

Se puede apreciar que los valores de $\frac{h_{tr}}{h}$ son suficientemente grandes en todos los casos para que las secciones normales doble T se puedan considerar como secciones T.

Consideración de la armadura pasiva.

En muchos casos, la armadura pasiva en secciones de hormigón pretensado no es despreciable y debe ser tenida en cuenta en este tipo de cálculo.

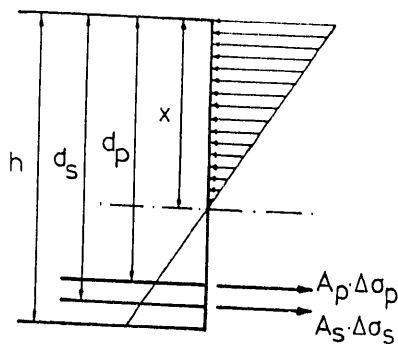


Figura 14.

Interesa entonces encontrar la profundidad d de la armadura equivalente en el cálculo a la suma de las armaduras activa y pasiva.

Tal profundidad será:

$$d = \frac{A_p \Delta \sigma_p d_p + A_s \Delta \sigma_s d_s}{A_p \Delta \sigma_p + A_s \Delta \sigma_s}$$

Por la compatibilidad de deformaciones:

$$\frac{\sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_p}{n(d_p - x)} = \frac{\Delta \sigma_s}{n(d_s - x)}$$

$$\Delta \sigma_p = \frac{d_p - x}{x} n \sigma_c$$

$$\Delta \sigma_s = \frac{d_s - x}{x} n \sigma_c$$

por lo que

$$d = \frac{A_p (d_p - x) d_p + A_s (d_s - x) d_s}{A_p (d_p - x) + A_s (d_s - x)}$$

Ahora bien, en los casos normales, los valores de $(d_p - x)$ y de $(d_s - x)$ son parecidos y, por ello, se pueden eliminar, con poco error, de la expresión anterior (en la práctica, cuando dichos valores fuesen muy diferentes, no se consideraría en el cálculo la armadura más interior).

Si no se hiciera así, por otro lado, la complejidad de los cálculos sería mucho mayor, puesto que x es una de las variables desconocidas:

Utilizaremos, pues, la expresión:

$$d = \frac{A_p \cdot d_p + A_s \cdot d_s}{A_p + A_s}$$

Veamos ahora cómo incide la consideración de ambas armaduras en las ecuaciones que hemos venido utilizando hasta el momento.

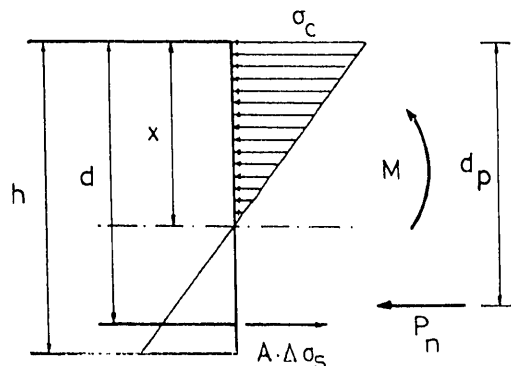


Figura 15.

Por un lado, la armadura total A es $A = A_s + A_p$. Por otro, P_n actúa a la profundidad d_p de la armadura de pretensado, por lo que produce un cierto momento con relación a la profundidad d de la armadura total equivalente.

Las ecuaciones serán ahora para sección rectangular:

$$P_n = \frac{1}{2} \sigma_c b x - (A_p + A_s) \Delta \sigma_s$$

$$M + P_n (d - d_p) = \frac{1}{2} \sigma_c b x \left(d - \frac{x}{3} \right)$$

$$\frac{n \sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_s}{d - x}$$

y llamando

$$\sigma_u = \frac{P_n}{A_p + A_s} \quad \text{y} \quad K = 1 + \frac{\Delta \sigma_s}{\sigma_u}$$

obtenemos

$$K P_n = \frac{1}{2} \sigma_c b x$$

$$M + P_n (d - d_p) = \frac{1}{2} \sigma_c b x \left(d - \frac{x}{3} \right)$$

$$\frac{n \sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_s}{d - x}$$

Las ecuaciones son formalmente iguales a las obtenidas con anterioridad, salvo el término $P_n (d - d_p)$, que al no incluir ninguna de las variables desconocidas (x , σ_c y $\Delta \sigma_s$) no modifica en absoluto las consideraciones realizadas a partir de dichas ecuaciones, aunque sí interviene en las expresiones finales.

Todo lo dicho ahora, en el caso concreto de sección rectangular, se puede extender claramente al caso de sección T.

Para evitar repeticiones inútiles pasaremos ya al caso más general, que considera armadura pasiva y una sollicitación exterior de flexocompresión.

Caso más general.

Se tiene para este caso la siguiente disposición:

$$d = \frac{A_p d_p + A_s d_s}{A_p + A_s}$$

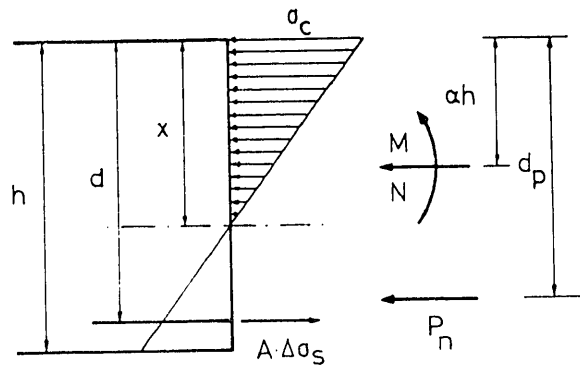


Figura 16.

Para sección rectangular, las ecuaciones son:

$$N_0 = N + P_n = \frac{1}{2} \sigma_c b x - (A_p + A_s) \Delta \sigma_s$$

$$M + N \left(d - \frac{h}{2} \right) + P_n (d - d_p) = \frac{1}{2} \sigma_c b x \left(d - \frac{x}{3} \right)$$

$$\frac{n \sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_s}{d - x}$$

Llamando

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{A_p + A_s}, \quad K = 1 + \frac{\Delta \sigma_s}{\sigma_0}, \quad r = \frac{P_n}{N_0}$$

y

$$s = (1 - r) \left(d - \frac{1}{2} \right) + r (d - d_p)$$

y considerando las ecuaciones en forma adimensional tenemos:

$$K N_0 = \frac{1}{2} \sigma_c b x$$

$$M + s N_0 = \frac{1}{2} \sigma_c b x \left(d - \frac{x}{3} \right)$$

$$\frac{n \sigma_c}{x} = \frac{\Delta \sigma_s}{d - x}$$

donde, como siempre, no se ha modificado la notación para representar las variables adimensionales.

Las ecuaciones son formalmente iguales, salvo el término $s N_0$, que al no incluir ninguna de las variables desconocidas (x , σ_c y $\Delta \sigma_s$) no modifica en absoluto las consideraciones realizadas a partir de aquéllas.

Eliminando σ_c y x se obtiene, por tanto, la expresión:

$$M + s N_0 = \frac{3 \Delta \sigma_s d K N_0 + n K^2 N_0^2 - K N_0 \left[n^2 K^2 N_0^2 + 2 \Delta \sigma_s n d K N_0 \right]}{3 \Delta \sigma_s}$$

de donde se deduce fácilmente que la frontera aproximada de los puntos (N_0 , M), que cumplen y no cumplen la condición de fisuración, es:

$$\begin{aligned} \text{Para } N_0 > \frac{2}{3} \frac{\Delta \sigma_s d}{n K}; \quad M &= \left(\frac{3}{4} d K - s \right) N_0 \\ \text{Para } N_0 < \frac{2}{3} \frac{\Delta \sigma_s d}{n K}; \quad M &= \frac{1}{18} \frac{\Delta \sigma_s d^2}{n} + \left(\frac{2}{3} d K - s \right) N_0 \end{aligned}$$

Para sección T, las ecuaciones se modifican paralelamente a las de sección rectangular y resulta evidente que la expresión que se obtiene para la frontera aproximada es:

$$M = \left[\frac{2}{3} K \frac{d^3 + (d - h_f)^3 (b_{uc} - 1)}{d^2 + (d - h_f)^2 (b_{uc} - 1)} - s \right] N_0$$

donde lo único que sufre una pequeña alteración es el coeficiente s , $s = (1 - r)(d - \alpha) + r(d - d_p)$, siendo α la profundidad relativa de la fibra baricéntrica de la sección T.

La frontera que separa los puntos (N_0 , M) con fibra neutra en cabeza superior y en el alma de la sección es evidentemente:

$$M = \frac{1}{3} \frac{h_f^2 (3d - h_f) N_0}{2n} - s N_0 - \frac{(h_f - d) N_0 + h_f^2}{\sigma_0}$$

3. CONCLUSIONES PRACTICAS

De la comprobación.

A partir de todo el estudio anterior se pueden extraer unas conclusiones muy valiosas para la comprobación a fisuración de secciones de hormigón pretensado en sección fisurada.

Sea una sección de hormigón sometida a una sollicitación exterior M (momento flector), N (esfuerzo axial) y con un esfuerzo de neutralización P_n , y sea C el valor límite impuesto para $\Delta \sigma_s$.

Se cumple la condición de fisuración en sección fisurada en los siguientes casos:

- Sección rectangular.
- Fórmula exacta:

$$M = \frac{3 C b d K N_0 + n K^2 N_0^2 - K N_0 \left[n^2 K^2 N_0^2 + 2 C n b d K N_0 \right]}{3 C b} - s N_0$$

o bien,

$$M = (d K - s) N_0 + \frac{K N_0}{3 C b} \left(n K N_0 - \left[n^2 K^2 N_0^2 + 2 C n b d K N_0 \right] \right)$$

- Fórmula aproximada:

$$\begin{aligned} \text{Para } N_0 & \leq \frac{2 C b d}{3 n K}; & M & = \left(\frac{3}{4} d K - s \right) N_0 \\ \text{Para } N_0 & > \frac{2 C b d}{3 n K}; & M & = \frac{1 C b d^2}{18 n} + \left(\frac{2}{3} d K - s \right) N_0 \end{aligned}$$

en las cuales:

$$\begin{aligned} N_0 & = N + P_n, & K & = 1 + \frac{C}{\sigma_0}, & \sigma_0 & = \frac{N_0}{A_p + A_s} \\ d & = \frac{A_p d_p + A_s d_s}{A_p + A_s}, & s & = (1 - r) \left(d - \frac{1}{2} h \right) + r (d - d_p) \end{aligned}$$

y

$$r = \frac{P_n}{N_0}$$

ABACOS:

Si se dispone de ábacos de dimensionamiento para este tipo de sección es posible utilizarlos también en comprobación.

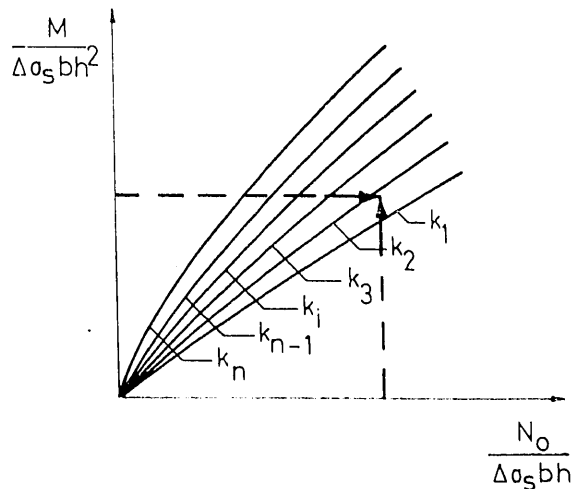


Figura 17.

— Sección T.

— Fórmula exacta:

Si

$$M \leq \frac{1}{3} \frac{h_j^2 (3d - h_j) N_0}{n \sigma_0 b} - s N_0$$

se utiliza la fórmula exacta ya vista para la sección rectangular correspondiente.

Si

$$M \leq \frac{1}{3} \frac{h_j^2 (3d - h_j) N_0}{n \sigma_0 b} - s N_0$$

la fórmula exacta para sección T, por su complejidad, no es en absoluto recomendable.

— Fórmula aproximada:

Se utiliza la fórmula aproximada para la sección correspondiente rectangular en el mismo caso del apartado anterior.

Si

$$M \leq \frac{1}{3} \frac{h_j^2 (3d - h_j) N_0}{n \sigma_0 b} - s N_0$$

se utiliza la fórmula aproximada:

$$M \leq \left[\frac{2}{3} K \frac{b d^3 + (b_{ic} - b) (d - h_j)^3}{b d^2 + (b_{ic} - b) (d - h_j)^2} - s \right] N_0$$

En todas ellas:

$$N_0 = N + P_n; \quad K = 1 + \frac{C}{\sigma_0}; \quad \sigma_0 = \frac{N_0}{A_p + A_s}$$

$$d = \frac{A_p \cdot d_p + A_s \cdot d_s}{A_p + A_s}; \quad s = (1 - r) (d - \alpha h) + r (d - d_p); \quad r = \frac{P_n}{N_0}$$

α es la profundidad relativa de la fibra baricéntrica de la sección.

ABACOS:

Si

$$M \geq \frac{1}{3} \frac{h_f^2 (3d - h_f) N_0}{\frac{n}{2} (h_f - d) N_0 + h_f^2} - s N_0$$

y si existen ábacos de dimensionamiento para sección rectangular se pueden utilizar para comprobación en la forma mencionada.

Si

$$M \leq \frac{1}{3} \frac{h_f^2 (3d - h_f) N_0}{\frac{n}{2} (h_f - d) N_0 + h_f^2} - s N_0$$

y si existen ábacos de dimensionamiento para sección T es posible utilizarlos también para comprobación de manera totalmente similar a la vista para sección rectangular.

— *Sección doble T.*

Para las dimensiones habituales, este tipo de sección se comprueba como sección T.

En secciones especiales habría que efectuar la comprobación de que la fibra neutra se encuentra en el alma de la sección para poder hacer lo mismo.

Del dimensionamiento.

Para el proceso de dimensionamiento es posible también extraer ciertas conclusiones de todo el estudio anterior.

Sea una sección de hormigón pretensado sometida a una sollicitación exterior, M , N . El dimensionamiento de la misma a fisuración en sección fisurada, suponiendo que C es el valor límite para $\Delta \sigma_s$, puede realizarse de la siguiente forma:

— *Sección rectangular.*

— Fórmulas.

Partiendo de los datos C , n , M y N con las fórmulas:

$$\text{Para } (N + P_n) \leq \frac{2}{3} \frac{C b d}{n K}; \quad M = \left[\frac{3}{4} K d - s \right] (N + P_n)$$

$$\text{Para } (N + P_n) \geq \frac{2}{3} \frac{C b d}{n K}; \quad M = \frac{1}{18} \frac{C b d}{n} + \left[\frac{2}{3} d K - s \right] (N + P_n)$$

$$\left(\text{con } K = 1 + \frac{C}{\sigma_0}; \quad \sigma_0 = \frac{N + P_n}{A_p + A_s}; \quad d = \frac{A_p \cdot d_p + A_s \cdot d_s}{A_p + A_s}; \right)$$

$$s = (1 - r) \left(d - \frac{h}{2} \right) + r (d - d_p); \quad r = \frac{P_n}{N + P_n}$$

se tantean d_s , d_p , A_s , A_p y P_n . En muchos casos, algunas de estas variables son datos también por venir fijados por otras consideraciones ajenas a las de nuestro estudio.

Puede interesar en ciertos casos la utilización de las mismas fórmulas, pero en su forma adimensional.

ABACOS:

En alguna ocasión puede resultar interesante, a efectos del dimensionamiento, la construcción de ábacos adimensionales, utilizando la gráfica de la función exacta que define la frontera (en su forma adimensional, naturalmente). Es útil en este caso tomar como tensión de referencia $\sigma_r = \Delta \sigma_s$ para poder independizarse en parte de $\Delta \sigma_s$ y englobar en un solo ábaco, con suficientes valores de K , a todos los valores límites posibles de $\Delta \sigma_s$.

La disposición de estos ábacos adimensionales podría ser la siguiente:

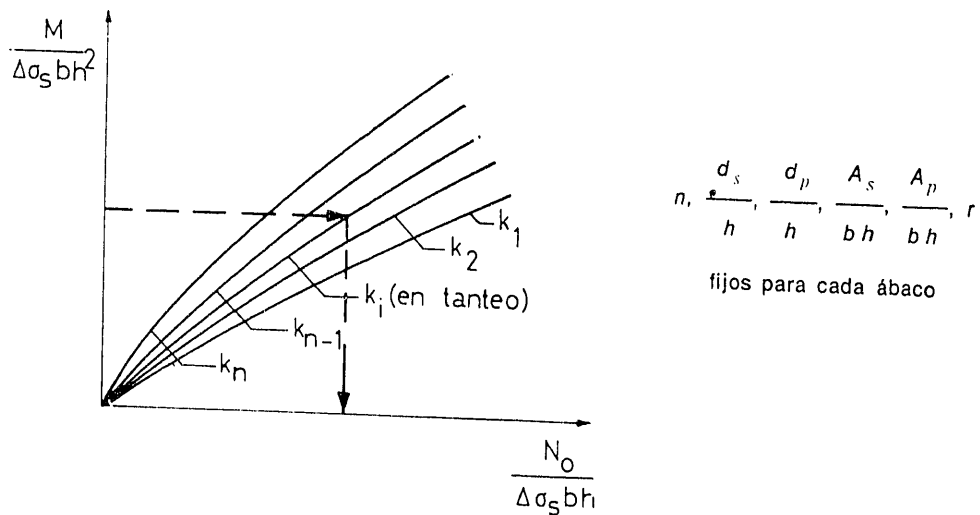


Figura 18.

Se observa que sería necesario disponer de un gran número de ábacos para poder variar convenientemente todos los parámetros que figuran como fijos para cada uno de aquéllos. Por esta razón, en la práctica es posible que sólo sea interesante la utilización de ábacos en los casos en que $N = 0$ y no se considere la armadura pasiva, quedando entonces únicamente los parámetros n , $\frac{d}{h}$ y $\frac{A_p}{bh}$.

En muchos casos, algunos de estos parámetros (n siempre es dato) pueden venir fijados como datos por otras consideraciones.

— Sección T.

— Fórmulas.

Partiendo de los datos C , n , M y N con la fórmula:

$$M = \left[\frac{2}{3} K \frac{b d^3 + (b_{ic} - b) (d - h_f)^3}{b d^2 + (b_{ic} - b) (d - h_f)^2} - s \right] (N + P_n)$$

$$\left(\text{con } K = 1 + \frac{C}{\sigma_0}; \quad \sigma_0 = \frac{N + P_n}{A_p + A_s}; \quad d = \frac{A_p \cdot d_p + A_s \cdot d_s}{A_p + A_s}; \right.$$

$$\left. s = (1 - r) (d - \alpha h) + r (d - d_p); \quad r = \frac{P_n}{N + P_n} \right)$$

se tantean d_s , d_p , A_s , A_p y P_n . Algunas de estas variables pueden venir fijadas como datos por otras consideraciones.

Puede interesar a veces la utilización de las mismas fórmulas en su forma adimensional.

ABACOS:

La utilización de ábacos adimensionales para efectuar el dimensionamiento de estas secciones, mediante la gráfica de la función exacta de la frontera, no será conveniente en general. Ello se debe a la complejidad de dicha función y, sobre todo, a la introducción adicional de dos parámetros adimensionales, $\frac{h_f}{h}$ y $\frac{b_w}{b}$, que aumenta todavía más el número de ábacos necesarios.

— Sección doble T.

Siempre es posible dimensionar una sección doble T como sección T, cuidando de que la profundidad de la cabeza inferior sea lo suficientemente pequeña para que la fibra neutra se encuentre dentro del alma de la sección.