APLICACION DE LA TEORIA DE LOS GRAFOS A LAS RELACIONES DE DOMINIO ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN GRUPO (*)

Por M. A. HACAR BENITEZ

Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos

Por medio de un grafo orientado y de su matriz correspondiente se establecen las relaciones de dominio entre ellos.

Establecido el concepto de intransitividad se exponen los de dominación en primero, segundo y sucesivos grados; teoremas fundamentales entre dominadores, leaderes, caudillos, etc.) y dominados (súbditos, vasallos).

Definida la matriz de dominación entre los elementos de un grupo se expone la interpretación de las sumas de sus filas y columnas, así como de sus potencias sucesivas; con lo que puede definirse de varios modos el poder de cada uno de dichos elementos.

Se indican los distintos tipos, esencialmente diferentes, de grupos formados por 2, 3, 4 y 5 individuos.

Por último se muestra cómo el cálculo matricial expuesto permite examinar rápidamente las repercusiones que en la distribución del poder tiene la modificación de las relaciones de dominio entre algunos de sus elementos o su desaparición.

1. Relación de dominio.

En el interior de un grupo (de animales o de seres humanos) compuesto de n individuos $A_1 A_2 \ldots A_n$ (o $A\ B\ C\ D \ldots$) podemos indicar la relación de dominio entre cada dos de ellos por $A_i \gg A_j$, significando con ello que A_i vence a A_j (o que el equipo A_i gana al A_j, etc.)

Observaciones:

1.ª Sería falso $A_i \gg A_i$, pues se supone que un individuo no se va a vencer a sí mismo.

2.ª O bien $A_i \gg A_j$, o bien $A_j \gg A_i$, lo que equivale a *establecer que* entre dos individuos *siempre hay* uno de ellos que domina al otro.

2. La intransitividad.

La transitividad no interviene en las relaciones de dominación. Así, el que $A_1 \gg A_2$ y $A_2 \gg A_3$, no permite afirmar que forzosamente $A_1 \gg A_3$.

Esto se comprueba con frecuencia en competiciones deportivas (fútbol, tenis, boxeo, etc.).

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta revista hasta el 30 de septiembre de 1976.

3. Los grafos orientados.

Si por puntos indicamos los individuos y por segmentos *orientados* que unen cada dos puntos su relación de dominio, obtenemos una representación cómoda y muy intuitiva.

En las figuras 1 establecemos los tipos *esencialmente diferentes* de dominación que pueden existir entre dos, tres, cuatro y cinco individuos.

— Entre $n = 2$ individuos,
$T_2 = 1$ tipo de dominio.

Figura 1, *a*.

— Entre $n = 3$ individuos.
$T_3 = 2$ tipos de dominio.

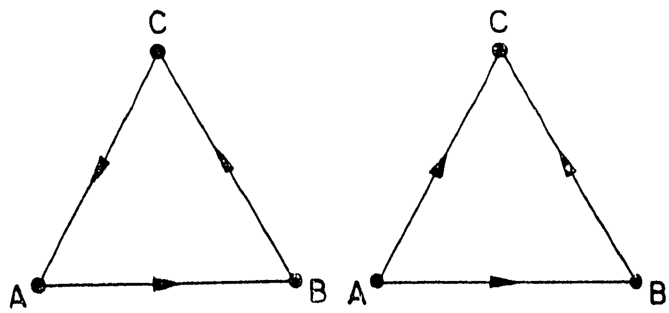

Figura 1, *b*.

— Entre $n = 4$ individuos,
$T_4 = 4$ tipos de dominio.

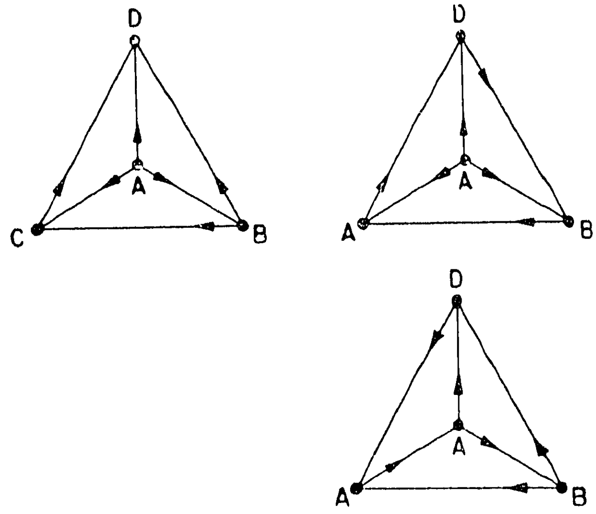

Figura 1, *c*.

— Entre $n = 5$ individuos,
$T_5 = 8$ tipos de dominio.

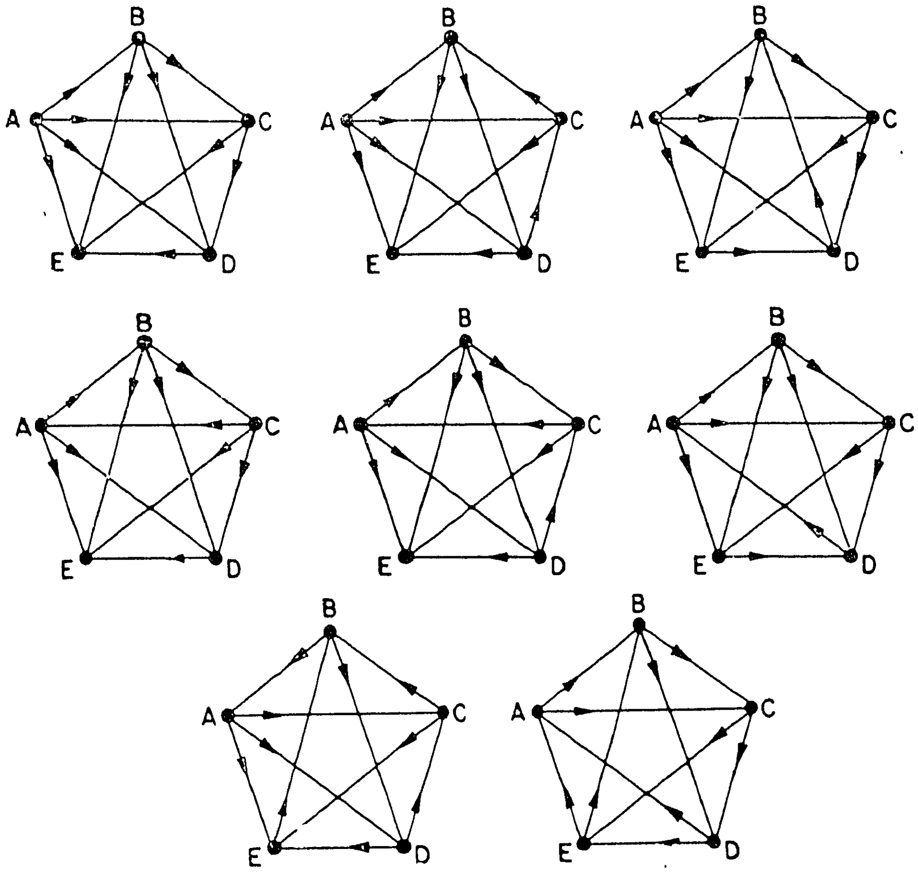

Figura 1, *d*.

(El número de tipos de dominio T_n para n individuos debe ser $T_n = 2^{n-2}$.)

4. Matriz de dominación.

Es una matriz cuadrada formada por n^2 elementos a_{ij}, que son 1 ó 0, según que A_i domine a A_j o viceversa. Así, por ejemplo, la matriz correspondiente al segundo tipo indicado de un grupo de tres individuos sería:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por las hipótesis establecidas, es evidente que:

1.º Los elementos de la diagonal principal son nulos.

2.º Si un elemento a_{ij} es 1, su simétrico a_{ji} es nulo.

3.º La suma de los elementos de una fila i de la matriz D son los individuos sobre los que A_i *ejerce* un mando o *dominio directo.*

4.º La suma de los elementos de una columna j representa el número de individuos que *le dominan directamente* al elemento A_j.

5.º La suma de los elementos de la matriz de dominio D es, evidentemente:

$$\frac{1}{2} n (n-1) .$$

5. Potencias de la matriz de dominación, "D".

Siendo la matriz de dominación D cuadrada, podemos establecer sus potencias sucesivas D^2 D^3 ..., etc., que serán también matrices cuadradas del mismo orden.

Consideremos en particular la matriz $D^2 = E$, que evidentemente tiene nulos los elementos de su diagonal. Sus elementos e_{ij} se obtendrán a partir de los d_{ij} de D mediante la conocida regla:

$$e_{ij} = d_{i1} d_{1j} + d_{i2} d_{2j} + \ldots + d_{in} d_{nj}$$

Cada uno de los sumandos $d_{ik} \cdot d_{kj}$ que sea diferente de cero es a causa de serlo sus dos factores lo que obliga entonces a que $d_{ik} = 1$ y a que $d_{kj} = 1$ o, lo que es lo mismo, que $A_i \gg A_k \gg A_j$, que llamaremos *dominación de segundo grado* de A_i sobre A_j. *Dominación directa o de primer grado* es, por analogía, simplemente $A_i \gg A_j$.

Por tanto, el elemento e_{ij} nos indica el número de dominaciones que el individuo A_i ejerce sobre A_j.

6. Teoremas fundamentales: dominadores y dominados.

Si hay relación de dominio entre cada dos individuos de un grupo, se demuestra que siempre se verifica que:

a) Existe *por lo menos un individuo* que *ejerce* sobre cada uno de los otros individuos del grupo *una dominación* de primero o de segundo grado, y que

b) También existe *por lo menos un individuo que es dominado* en primero o en segundo grado por cualquier otro individuo del grupo.

Omitiremos la demostración de estos teoremas, pero comprobaremos más adelante, en un ejemplo, como se verifican.

7. Poder de un individuo en un grupo social.

Se puede definir de modos distintos, según el carácter sociológico del grupo.

Se acostumbra a tomar como poder del individuo A_i la suma de los elementos de la fila i de la matriz de dominación D y la de los elementos de la misma fila de la matriz $E = D^2$.

Por ejemplo, la matriz expresión del grafo de la figura 2:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

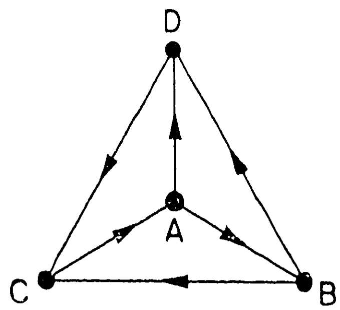

Figura 2.

Cuyo cuadrado es:

$$D^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

nos permite formar su suma:

$$S = D + D^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

cuyas filas, representativas de poderes, suman:

Poder de	A	5
"	B	4
"	C	3
"	D	2

8. Otras definiciones de poder.

Otra definición de poder sería por la suma de los elementos de las filas de la matriz:

$$S = D + \frac{1}{2} D^2$$

Aunque no entraremos en ello, son cuestiones interesantes a considerar, que dejamos al lector:

— La interpretación de la suma de las columnas de la matriz $S = D + D^2$.

— La interpretación de las sumas de las líneas de la matriz $S = D + D^2 + D^3 + \ldots + D^n$.

— La de las componentes de la:

$$S = D + \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{3} D^3 + \ldots + \frac{1}{m} D^m, \text{etc.}$$

9. Matrices de dominación y poderes en los distintos tipos de grupos formados por 2, 3, 4 y 5 individuos.

Más adelante damos una tabla con las matrices D, $D^2 = E$ y $S = D + D^2$, de los 15 tipos de grupos (1 para $n = 2$; 2 para $n = 3$; 4 para $n = 4$ y 8 para $n = 5$) indicados y en el mismo orden que las figuras correspondientes anteriores, de los grafos orientados.

En la columna de la *matriz de poder S*, se comprueban los dos teoremas antes citados que pudiéramos llamar:

a) De existencia, *al menos, de un caudillo que domine* (en primero o segundo grado) a *todos* los individuos del grupo. Basta observar que en cada matriz S hay, al menos, una línea (a veces varias) cuyos elementos son todos (a excepción del de la diagonal principal) distintos de cero.

b) De existencia, *al menos*, de *un vasallo*, que *es dominado* (en primero o segundo grado) por todos los demás individuos del grupo. Basta observar que en cada matriz S hay al menos una columna (a veces varias) en que todos sus elementos (a excepción del de la diagonal principal) son distintos de cero.

Hay casos en que el poder de un caudillo (*leader, führer, chef, capo, conducátor,* etc.) está bien definido. En otros vemos que el poder está compartido e incluso equilibrado con otros. En otros, prácticamente, su poder sobre los demás no existe.

En el caso de la figura 3, en que:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Los poderes de sus miembros serían (según la forma de su definición):

Poder de	$D + D^2$	$D + \frac{1}{2} D^2$	$D + D^2 + D^3 + D^4 + D^5$
A	10	7	45
B	5	3,5	21
C	4	3	18
D	3	2	14
E	2	1,5	10

Individuos del grupo n	Matriz de dominio D	Cuadrado de la matriz de dominio $D^2 = E$	Matriz de poder $S = D + D^2$	Poder de cada individuo
2	$\begin{array}{cc\|c} 0&1&1\\ 0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{cc\|c} 0&0&0\\ 0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 0&1\\ 0&0 \end{array}$	A... 1 + 0 = 1 B... 0 + 0 = 0
3	$\begin{array}{ccc\|c} 0&1&0&1\\ 0&0&1&1\\ 1&0&0&1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc\|c} 0&0&1&1\\ 1&0&0&1\\ 0&1&0&1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0 \end{array}$	A... 1 + 1 = 2 B... 1 + 1 = 2 C... 1 + 1 = 2
3	$\begin{array}{ccc\|c} 0&1&1&2\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc\|c} 0&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0&1&2\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{array}$	A... 2 + 1 = 3 B... 1 + 0 = 1 C... 0 + 0 = 0
4	$\begin{array}{cccc\|c} 0&1&1&1&3\\ 0&0&1&1&2\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{cccc\|c} 0&0&1&2&3\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 0&1&2&3\\ 0&0&1&2\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{array}$	A... 3 + 3 = 6 B... 2 + 1 = 3 C... 1 + 0 = 1 D... 0 + 0 = 0
4	$\begin{array}{cccc\|c} 0&1&1&1&3\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1 \end{array}$	$\begin{array}{cccc\|c} 0&1&1&1&3\\ 0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 0&2&2&2\\ 0&0&1&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&0 \end{array}$	A... 3 + 3 = 6 B... 1 + 1 = 2 C... 1 + 1 = 2 D... 1 + 1 = 2
4	$\begin{array}{cccc\|c} 0&1&0&1&2\\ 0&0&1&1&2\\ 1&0&0&1&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{cccc\|c} 0&0&1&1&2\\ 1&0&0&1&2\\ 0&1&0&1&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 0&1&1&2\\ 1&0&1&2\\ 1&1&0&2\\ 0&0&0&0 \end{array}$	A... 2 + 2 = 4 B... 2 + 2 = 4 C... 2 + 2 = 4 D... 0 + 0 = 0
4	$\begin{array}{cccc\|c} 0&1&0&1&2\\ 0&0&1&1&2\\ 1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1 \end{array}$	$\begin{array}{cccc\|c} 0&0&2&1&3\\ 1&0&1&0&2\\ 0&1&0&1&2\\ 1&0&0&0&1 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 0&1&2&2\\ 1&0&2&1\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&0 \end{array}$	A... 2 + 3 = 5 B... 2 + 2 = 4 C... 1 + 2 = 3 D... 1 + 1 = 2
5	$\begin{array}{ccccc\|c} 0&1&1&1&1&4\\ 0&0&1&1&1&3\\ 0&0&0&1&1&2\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc\|c} 0&0&1&2&3&6\\ 0&0&0&1&2&3\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 0&1&2&3&4\\ 0&0&1&2&3\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{array}$	A... 4 + 6 = 10 B... 3 + 3 = 6 C... 2 + 1 = 3 D... 1 + 0 = 1 E... 0 + 0 = 0
5	$\begin{array}{ccccc\|c} 0&1&1&1&1&4\\ 0&0&0&1&1&2\\ 0&1&0&0&1&2\\ 0&0&1&0&1&2\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc\|c} 0&1&1&1&3&6\\ 0&0&1&0&1&2\\ 0&0&0&1&1&2\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 0&2&2&2&4\\ 0&0&1&1&2\\ 0&1&0&1&2\\ 0&0&1&0&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}$	A... 4 + 6 = 10 B... 2 + 2 = 4 C... 2 + 2 = 4 D... 2 + 1 = 3 E... 0 + 0 = 0
5	$\begin{array}{ccccc\|c} 0&1&1&1&1&4\\ 0&0&1&0&1&2\\ 0&0&0&1&1&2\\ 0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&1 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc\|c} 0&1&1&2&2&6\\ 0&0&0&2&1&3\\ 0&1&0&1&0&2\\ 0&0&1&0&1&2\\ 0&1&0&0&0&1 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 0&2&2&3&3\\ 0&0&1&2&2\\ 0&1&0&2&1\\ 0&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&0 \end{array}$	A... 4 + 6 = 10 B... 2 + 3 = 5 C... 2 + 2 = 4 D... 1 + 2 = 3 E... 1 + 1 = 2

Individuos del grupo n	Matriz de dominio D		Cuadrado de la matriz de dominio $D^2 = E$		Matriz de poder $S = D + D^2$	Poder de cada individuo
5	0 1 0 1 1	3	0 0 1 1 2	4	0 1 1 2 3	A... 3 + 4 = 7
	0 0 1 1 1	3	1 0 0 1 2	4	1 0 1 2 3	B... 3 + 4 = 7
	1 0 0 1 1	3	0 1 0 1 2	4	1 1 0 2 3	C... 3 + 4 = 7
	0 0 0 0 1	1	0 0 0 0 0	0	0 0 0 0 1	D... 1 + 0 = 1
	0 0 0 0 0	0	0 0 0 0 0	0	0 0 0 0 0	E... 0 + 0 = 0
5	0 1 0 1 1	3	0 0 1 1 2	4	0 1 1 2 3	A... 3 + 4 = 7
	0 0 1 1 1	3	1 0 1 0 2	4	1 0 2 1 3	B... 3 + 4 = 7
	1 0 0 0 1	2	0 1 0 1 1	3	1 1 0 1 2	C... 2 + 3 = 5
	0 0 1 0 1	2	1 0 0 0 1	2	1 0 1 0 2	D... 2 + 2 = 4
	0 0 0 0 0	0	0 0 0 0 0	0	0 0 0 0 0	E... 0 + 0 = 0
5	0 1 1 0 1	3	0 0 1 3 2	6	0 1 2 3 3	A... 3 + 6 = 9
	0 0 1 1 1	3	1 0 0 2 1	4	1 0 1 3 2	B... 3 + 4 = 7
	0 0 0 1 1	2	1 0 0 1 0	2	1 0 0 2 1	C... 2 + 2 = 4
	1 0 0 0 0	1	0 1 1 0 1	3	1 1 1 0 1	D. . 1 + 3 = 4
	0 0 0 1 0	1	1 0 0 0 0	1	1 0 0 1 0	E... 1 + 1 = 2
5	0 0 1 1 1	3	0 2 1 0 2	5	0 2 2 1 3	A... 3 + 5 = 8
	1 0 0 1 0	2	0 0 2 1 2	5	1 0 2 2 2	B... 2 + 5 = 7
	0 1 0 0 1	2	1 1 0 1 0	3	1 2 0 1 1	C... 2 + 3 = 5
	0 0 1 0 1	2	0 2 0 0 1	3	0 2 1 0 2	D... 2 + 3 = 5
	0 1 0 0 0	1	1 0 0 1 0	2	1 1 0 1 0	E.. 1 + 2 = 3
5	0 1 1 0 0	2	0 0 1 2 1	4	0 1 2 2 1	A... 2 + 4 = 6
	0 0 1 1 0	2	1 0 0 1 2	4	1 0 1 2 2	B... 2 + 4 = 6
	0 0 0 1 1	2	2 1 0 0 1	4	2 1 0 1 2	C... 2 + 4 = 6
	1 0 0 0 1	2	1 2 1 0 0	4	2 2 1 0 1	D... 2 + 4 = 6
	1 1 0 0 0	2	0 1 2 1 0	4	1 2 2 1 0	E... 2 + 4 = 6

10. Dinámica de variaciones de poder:

El cálculo matricial expuesto permite examinar rápidamente las repercusiones de una o de varias modificaciones en las relaciones de dominio entre los individuos de un grupo.

Hagamos, independientemente, tres hipótesis en el ejemplo anterior (fig. 3):

I. Que cambie el dominio de $A \gg D$ a ser $D \gg A$.

II. Que se elimine A.

III. Que se cambie la situación de E de tal forma que pase a dominar directamente a A y a B en lugar de ser dominado por ellos.

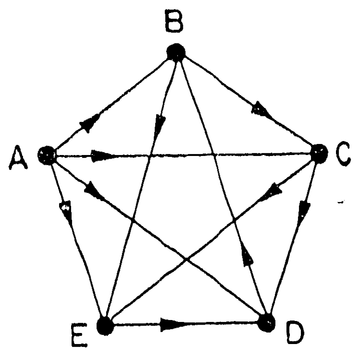

Figura 3.

Las matrices de dominio, sus cuadrados y sus matrices de poder son entonces:

$$D(\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 0&1&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&1&1 \\ 1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{vmatrix} \qquad D^2(\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 0&0&1&2&2 \\ 0&0&0&2&1 \\ 1&1&0&1&0 \\ 0&1&2&0&2 \\ 1&1&0&0&0 \end{vmatrix} \qquad S(\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 0&1&2&2&3 \\ 0&0&1&2&2 \\ 1&1&0&2&1 \\ 1&2&2&0&2 \\ 1&1&0&1&0 \end{vmatrix}$$

$$D(\mathrm{II}) = \begin{vmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{vmatrix} \qquad D^2(\mathrm{II}) = \begin{vmatrix} 0&0&2&1 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 1&0&0&0 \end{vmatrix} \qquad S(\mathrm{II}) = \begin{vmatrix} 0&1&2&2 \\ 1&0&2&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&0&1&0 \end{vmatrix}$$

$$D(\mathrm{III}) = \begin{vmatrix} 0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0 \end{vmatrix} \qquad D^2(\mathrm{III}) = \begin{vmatrix} 0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&1&2&0&0 \\ 0&1&2&0&0 \\ 1&2&2&0&0 \end{vmatrix} \qquad S(\mathrm{III}) = \begin{vmatrix} 0&1&2&1&1 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&1&2&1&1 \\ 1&2&2&0&0 \\ 2&3&2&1&0 \end{vmatrix}$$

Los poderes que antes lo detentaban por orden *A B C D E* ha pasado a establecerse en cada caso en el orden siguiente:

Caso I	A	D	B		C	E
Poder	8	7	5	=	5	3
Caso II	B	C	D		E	A
Poder	5	4	3		2	No existe
Caso III	E	A	C		D	B
Poder	8	5 =	5	=	5	3

Aunque no podemos extendernos en ello, se ha estudiado también, desde el punto de vista matemático, la acción de los *elementos absorbentes* en los grupos sociales.

Bibliografía

PATRICK DOREIAN: *Las matemáticas y el estudio de las relaciones sociales*. Ed. Vicens-Vives, 1973.

WHYTE-WILSON y WILSON: *Las estructuras jerárquicas*. Alianza Editorial, 1973.

CLAUDE BERGE: *Teoría de las redes y sus aplicaciones*. Cap. 14. Cía. Ed. Continental, S. A. Méjico-España, 1962.

KEMENY, SNELL y THOMPSON: *Algébre moderne et activité humaines*.

ANNE ANCELIN SCHÜTZENBERGER: *La Sociometrie*. Editions Universitaires. París, 1972.

JACQUES ATTALI: *Les modèles politiques*. Presses Universitaires de France, 1972.