

ANALISIS PROBABILISTA DEL NUMERO DE OLAS Y SU INFLUENCIA EN LA ALTURA DE OLA DE CALCULO DE OBRAS MARITIMAS(*)

Por ENRIQUE CASTILLO
MIGUEL A. LOSADA
JAIME PUIG-PEY

Ings. de Caminos, Canales y Puertos.
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
Universidad de Santander.

En este artículo se desarrolla un modelo matemático para la determinación de la distribución de probabilidad del número de olas superiores a un cierto valor, H, durante un intervalo de tiempo fijado. Para olas de pequeña altura e intervalos de tiempo grandes, la distribución resultante puede aproximarse por la ley normal, mientras que para alturas de ola elevadas o intervalos pequeños debe recurrirse a la función generatriz de probabilidad. En el desarrollo del modelo se han supuesto poissonianos, tanto el número de temporales en el intervalo de tiempo en estudio como el número de olas en cada estado de mar. Asimismo, se supone conocida la curva de evolución de los temporales. El modelo se ha aplicado al mar Cantábrico en profundidades indefinidas, pudiendo utilizarse en cualquier otro mar del que se dispongan datos. Conocida la función de distribución del número de olas superiores a un cierto valor H en el intervalo de tiempo estudiado, el proyectista dispone de un nuevo criterio probabilista para la elección de la ola de cálculo de obras marítimas rígidas y flexibles.

1. INTRODUCCION

Desde el punto de vista de la acción del oleaje, cabe clasificar las obras y estructuras marítimas en dos categorías:

- I. Obras y estructuras cuyo período propio de oscilación es uno de los que llevan asociados una importante cantidad de energía en el espectro del oleaje incidente.
- II. Obras y estructuras con períodos propios diferentes a los de alta transmisión de energía.

En el primero de los casos será necesario hacer un estudio dinámico de la estructura, mientras que en el segundo, bastará con analizarla desde un punto de vista estático.

En un análisis estático las estructuras pueden ser clasificadas, bien en su totalidad o bien en alguna de sus partes, como rígidas y deformables. Se dice que una estructura o una parte de ella es rígida cuando su colapso se produce por la acción de una única ola, mientras que se dice que es flexible cuando su fallo se

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta revista hasta el 30 de noviembre de 1977.

presenta por la acción de varias olas iguales o mayores a una dada, que se denomina en ambos casos ola de cálculo. (Ch. E. Lee, 1962; S. Bores, 1968.)

Como obras rígidas se pueden citar los diques verticales, muros, plataformas offshore, etc., analizadas desde el punto de vista de su estabilidad global a vuelco y deslizamiento. Dentro de las obras deformables se pueden incluir los diques de escollera, las uniones soldadas de una estructura offshore, la protección de pie de una obra, la protección catódica de estructuras metálicas, etc.

De manera breve, las obras flexibles son aquellas en las cuales el fallo se produce por acumulación de daño a lo largo de su vida útil. Por lo tanto, en el cálculo de su estabilidad, deberá tenerse en cuenta no sólo la magnitud de la sollicitación, sino el número de veces que se presenta ésta durante un intervalo de tiempo D (vida útil, tiempo de reparación, etc.).

A lo largo de este intervalo de tiempo, la obra será abordada por un número de temporales, distribuidos y espaciados aleatoriamente. Cada temporal podrá ser analizado como una sucesión de estados de mar y cada estado de mar tendrá un número de olas de altura igual o mayor a una dada.

La elección del intervalo de tiempo D será función del tipo de estructura y de su comportamiento frente al oleaje. Bajo esta perspectiva conviene distinguir entre obras aptas a ser reparadas y obras que no lo son. En el primer caso, por ejemplo un dique de escollera, puede interesar elegir D como el tiempo mínimo necesario para reparar una determinada avería, mientras que en el segundo, por ejemplo, una soldadura a gran profundidad en una plataforma offshore, D debe tomarse como la vida útil de la obra.

Si se conocieran las probabilidades asociadas a los diferentes números de olas que superan un cierto valor durante el tiempo D , se tendría un nuevo criterio para la elección de la altura de ola de cálculo.

El objeto de este artículo es obtener la función de distribución de la variable aleatoria número de olas iguales o mayores que H que se presenta en un intervalo de tiempo D , mediante un modelo matemático adecuado.

2. MODELO MATEMATICO

En el modelo matemático que sigue se divide como es usual la sucesión de olas que abordan una obra, en intervalos denominados estados de mar, en los cuales se puede admitir la estacionariedad de la variable aleatoria, desplazamiento de la superficie libre con respecto al nivel medio del mar. Estos estados de mar se representan por la altura de ola significativa, H_s , y la distribución de alturas de ola en uno de ellos se aproxima por la función de Rayleigh (Longuet-Higgins, 1952). El número de olas en un estado de mar, de altura de ola significativa H_s , depende de su duración y del período del oleaje; por tanto, considerando que un temporal es una sucesión de estados de mar, el número de olas durante el mismo depende del número de estados de mar, de su duración, de su altura de ola significativa H_s , y del período del oleaje.

Durante el período de estudio, D , la obra estará sometida a la acción de un número de temporales distribuidos y espaciados en el tiempo aleatoriamente. El

número de olas que ocurre durante dicho período, depende del número de temporales ocurridos, del número de estados de mar en cada uno de ellos, de su duración, de la altura de ola significativa H_s y del período del oleaje.

A la vista del razonamiento anterior es necesario hacer algunas hipótesis sobre el tipo de variables aleatorias que intervienen. Así, el número de temporales se considera que se distribuye según la ley de Poisson, cuya función de probabilidad es:

$$g_{11}(k) = \frac{(\nu \cdot D)^k}{k!} \cdot e^{-\nu \cdot D} \quad (1)$$

donde k es el número de temporales y ν es el número medio de temporales en la unidad de tiempo. También se considera que el número de olas que se presenta en cada estado de mar es poissoniano.

Para conocer el número de estados de mar de que consta un temporal, es necesario definir previamente la forma del temporal de cálculo, es decir, una función:

$$H_s = f(t) \quad (2)$$

con la que se describirá la forma de crecimiento o generación del oleaje, la persistencia del estado de mar máximo y su decrecimiento.

La elección de la duración d_j de un estado de mar, que en principio es arbitraria, está limitada inferiormente por un mínimo requerido de olas en dicho estado y superiormente por la condición de estacionariedad.

Es difícil dar criterios para definir la curva de la ecuación (2). El gran número de medidas existentes no ha servido todavía para definir una curva, con parámetros adimensionales, que proporcione el crecimiento y decrecimiento del oleaje. Incluso el Jonswap ha puesto en tela de juicio el concepto de oleaje totalmente desarrollado. En este artículo se ha adoptado una postura pragmática ante este pro-

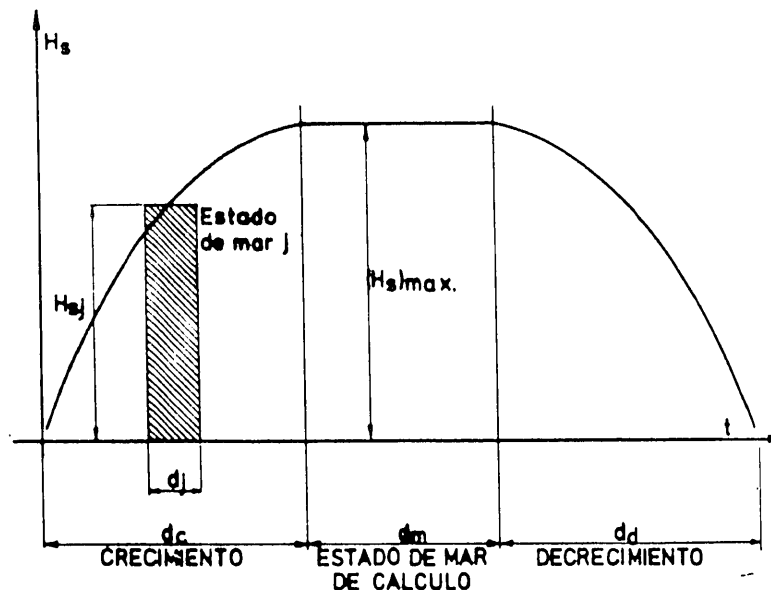


Fig. 1. — Temporal de cálculo.

blema aceptando el criterio de O. T. D. y seleccionando entre las curvas de crecimiento aquella basada en un número elevado de datos.

De esta manera un temporal queda definido por la altura de ola significativa del estado de mar máximo $(H_s)_{\text{máx}}$ y las curvas de crecimiento y decrecimiento adoptadas (fig. 1). Es necesario destacar que con este criterio nos encontramos del lado de la seguridad, ya que se supone que $(H_s)_{\text{máx}}$ corresponde a oleaje totalmente desarrollado, con lo que definida aquélla, conocemos t_m o tiempo mínimo para que el oleaje alcance su total desarrollo y con él la forma del temporal.

Una vez discretizado un temporal en estados de mar de duración d_j , definidos por su altura de ola significativa $(H_s)_j$, puede determinarse el número medio de olas N_j en cada uno de ellos, en función de d_j y del período del oleaje.

Se ha adoptado como período de cálculo en un estado de mar el período de paso ascendente por cero $(T_z)_j$. La relación entre $(T_z)_j$ y $(H_s)_j$ puede ser obtenida de las estadísticas de oleaje en la zona de estudio. Operando de esta manera se pueden calcular en cada estado de mar j los valores medios condicionados de los períodos $(T_z)_j$ asociados a $(H_s)_j$.

El número medio de olas N_j , en el estado de mar j , viene definido por:

$$N_j = \frac{d_j}{(T_z)_j} \quad (3)$$

Si llamamos q_j a la probabilidad de que una ola al azar presentada en el estado de mar j del temporal de altura de ola significativa máxima $(H_s)_{\text{máx}}$, supere la altura H , la probabilidad de que entre v olas del estado de mar j , n de ellas superen H , viene dada por:

$$p_j(n/H, (H_s)_{\text{máx}}) = \binom{v}{n} q_j^n [1 - q_j]^{v-n} \quad (4)$$

ya que en cada estado de mar, v es una variable aleatoria de función de probabilidad $g(v)$, la probabilidad de que en el estado de mar j , n olas superen la altura H , es:

$$P_j(n/H, (H_s)_{\text{máx}}) = \sum_{v=n}^{\infty} p_j(n/H, (H_s)_{\text{máx}}) g(v) \quad (5)$$

Suponiendo que el número de olas que se presentan en el estado de mar j es poissoniano de parámetro $\lambda_j [(H_s)_{\text{máx}}]$, la función generatriz de la variable aleatoria, $N_j(H, (H_s)_{\text{máx}})$ número de olas de altura mayor que H en el estado de mar j de un temporal de altura de ola significativa máxima, $(H_s)_{\text{máx}}$ es:

$$g_{N_j}(H, (H_s)_{\text{máx}})(t) = \sum_{N=0}^{\infty} [q_j(t-1) + 1]^N \frac{\lambda_j^N [(H_s)_{\text{máx}}] \cdot e^{-\lambda_j (H_s)_{\text{máx}}}}{N!} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda_j [(H_s)_{\text{máx}}]} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\{\lambda_j [(H_s)_{\text{máx}}] [q_j(t-1) + 1]\}^N}{N!} = \\ &= e^{-\lambda_j [(H_s)_{\text{máx}}]} e^{\lambda_j [(H_s)_{\text{máx}}] [q_j(t-1) + 1]} = e^{\lambda_j [(H_s)_{\text{máx}}] q_j(t-1)} \quad (7) \end{aligned}$$

La expresión (7) prueba que la variable N_j es poissoniana de parámetro:

$$\lambda_j [(H_s)_{\text{máx}}] q_j$$

Por tanto, y dado que la distribución de Poisson es reproductiva, la media de la variable aleatoria, $N(H, (H_s)_{\text{máx}})$, número de olas de altura superior a H en un temporal de altura de ola significativa máxima $(H_s)_{\text{máx}}$ con s estados de mar, es:

$$r(H, (H_s)_{\text{máx}}) = \sum_{j=1}^s \lambda_j [(H_s)_{\text{máx}}] q_j \quad (8)$$

Puesto que $(H_s)_{\text{máx}}$ es una variable aleatoria, de función de densidad $h[(H_s)_{\text{máx}}]$, la variable aleatoria N_{II} , número de olas de altura superior a H ocurridas en un temporal al azar, tiene como función generatriz:

$$g_{N_{II}}^{-1}(t) = \int_{(H_s)_{\text{máx}}^{\text{inf}}}^{(H_s)_{\text{máx}}^{\text{sup}}} e^{r(H, (H_s)_{\text{máx}})(t-1)} h[(H_s)_{\text{máx}}] d(H_s)_{\text{máx}} \quad (9)$$

Si el número de temporales que ocurren en un cierto período es poissoniano de intensidad ν , el número de olas N_{II} de altura mayor que H durante un periodo de duración D , tiene como función generatriz:

$$g_{N_{II}}(t) = g_{\text{Poisson}}(g_{N_{II}}^{-1}(t)) = \nu \cdot D \left[\int_{(H_s)_{\text{máx}}^{\text{inf}}}^{(H_s)_{\text{máx}}^{\text{sup}}} e^{r(H, (H_s)_{\text{máx}})(t-1)} h[(H_s)_{\text{máx}}] d(H_s)_{\text{máx}} - 1 \right] \quad (10)$$

Por tanto, la media y la varianza de N_{II} es:

$$\begin{aligned} \mu &= g'_{N_{II}}(1) = \nu \cdot D \cdot I_1 \\ \sigma^2 &= g''_{N_{II}}(1) + g'_{N_{II}}(1) - g'^2_{N_{II}}(1) = \nu \cdot D (I_1 + I_2) \end{aligned} \quad (11)$$

siendo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{(H_s)_{\text{máx}}^{\text{inf}}}^{(H_s)_{\text{máx}}^{\text{sup}}} r(H, (H_s)_{\text{máx}}) \cdot h[(H_s)_{\text{máx}}] \cdot d(H_s)_{\text{máx}} \\ I_2 &= \int_{(H_s)_{\text{máx}}^{\text{inf}}}^{(H_s)_{\text{máx}}^{\text{sup}}} r^2(H, (H_s)_{\text{máx}}) \cdot h[(H_s)_{\text{máx}}] \cdot d(H_s)_{\text{máx}} \end{aligned} \quad (12)$$

Por otra parte, la función de probabilidad de N_{II} , a partir de su función generatriz, viene dada por:

$$\text{prob}[N_{II} = k] = \frac{g^{(k)}_{N_{II}}(0)}{k!} \quad (13)$$

Sin embargo, como el número de olas, N_H , de altura superior a H durante un intervalo de duración D es la suma de los números de olas de altura superior a H en sus subperiodos, y éstos pueden suponerse independientes cuando las duraciones de éstos son suficientemente grandes comparadas con la duración de un temporal, resulta que N_H es aproximadamente normal. Por tanto, en general, las expresiones (11) definen completamente la distribución de N_H , siempre que se cumplan las condiciones indicadas. En caso contrario, por ejemplo, cuando el número de olas, N_H , es muy pequeño, es necesario recurrir a la expresión (13).

3. APLICACION AL MAR CANTABRICO

El modelo matemático anterior ha sido aplicado al mar Cantábrico adoptándose los siguientes criterios y datos de partida:

1. El parámetro de la distribución de Poisson del número de temporales de altura de ola significativa $(H_s)_{m\grave{a}x}$ mayor que 1,9 m se ha ajustado, como es normal, mediante el estimador:

$$\hat{\nu} = \frac{\text{Número de temporales observados}}{\text{Duración de la observación}} \quad (14)$$

con lo que resultó $\hat{\nu} = 62,18$ temporales/año.

La muestra ha sido obtenida mediante registro continuo durante once meses en el mar Cantábrico, período que se considera excesivamente reducido para este modelo.

2. A partir de los valores muestrales $(H_s)_{m\grave{a}x}$ se ha estimado la función de distribución de mejor ajuste. Esta ha sido la función de Weibull:

$$F_z((H_s)_{m\grave{a}x}) = 1 - e^{-\left[\frac{(H_s)_{m\grave{a}x} - E}{U \cdot E} \right]^K} \quad (H_s)_{m\grave{a}x} \geq E \quad (15)$$

$E = 1,90000$
 $U = 3,05061$
 $K = 1,00911$

La bondad del ajuste ha sido contrastada con el test de Kolmogoroff-Smirnoff, resultando un nivel de confianza superior al 94 por 100. La distribución se ha truncado en $(H_s)_{m\grave{a}x} = 15$ m, por limitación física del área de generación.

3. La curva de crecimiento y decrecimiento del temporal de cálculo se han supuesto simétricas (fig. 1) y la forma de la curva ha sido definida mediante un polinomio de cuarto grado ajustado a los valores propuestos por Silvester (tabla I). La duración del estado de mar máximo ha sido tomada de Copeiro, el cual la estimó para el barco meteorológico K y cuya expresión analítica es:

$$d_m = 20,857 \cdot e^{-\frac{(H_s)_{m\grave{a}x} - 8}{6,612}} \quad (\text{horas}) \quad (16)$$

TABLA I

$\frac{(H_s)_i}{(H_s)_{\text{máx}}} (\%)$	$\frac{t_i}{t_m} (\%)$
0	0
35	14,5
49,5	20,5
59	26
65,5	31,5
74,5	41
81	50
86	59
90	67,5
93	76
95,5	84
98	92
100	100

con $(H_s)_{\text{máx}}$ en metros.

4. De las estadísticas de olas visuales para el mar Cantábrico dadas por Hogben y Lumb (tabla II), se ha obtenido la relación entre $(T_s)_j$ y $(H_s)_j$ mediante un ajuste a los datos por la función:

$$(T_s)_j = a (H_s)_j^b \quad (17)$$

$$a = 6,10$$

$$b = 0,30285$$

El coeficiente de correlación obtenido fue de 0,967.

5. La duración de los estados de mar en la fase de crecimiento se ha supuesto fija y de valor cuatro horas. El número de estados de mar en esta fase viene dado por la expresión:

$$e = ENT \left(\frac{t_m}{d} + \frac{1}{2} \right) \quad (18)$$

6. El tiempo mínimo t_m para alcanzar el oleaje su total desarrollo se ha obtenido a partir de la expresión dada por el método Direccional (Losada y Serrano, 1977):

$$t_m = \frac{48828}{g} \cdot \left(\frac{g}{0,238} \right)^{1/2} \cdot (H_s)_{\text{máx}}^{1/2} \text{ (seg)} \quad (19)$$

4. RESULTADOS

En la figura 2 se representan en papel doblemente logarítmico las probabilidades de aparición de N o más olas en un período de veinticinco años. Como parámetro se utiliza la altura de ola, variando ésta de 3 a 30 metros.

En las figuras 3 y 4 se representan respectivamente la media y desviación tí-

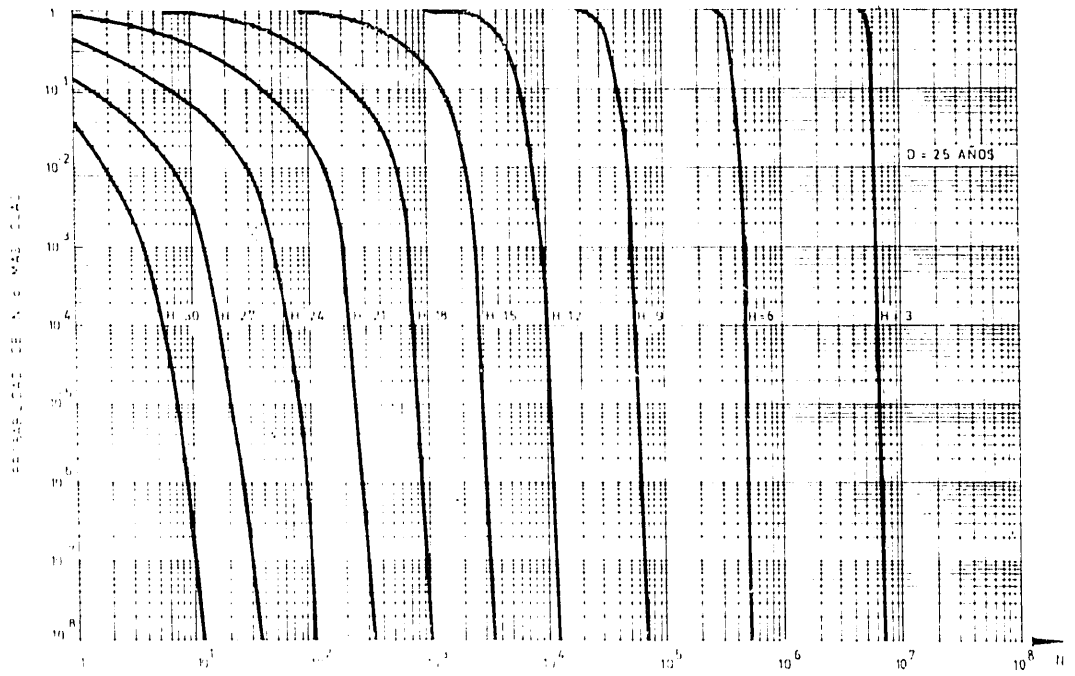


Fig. 2. — Número de olas.

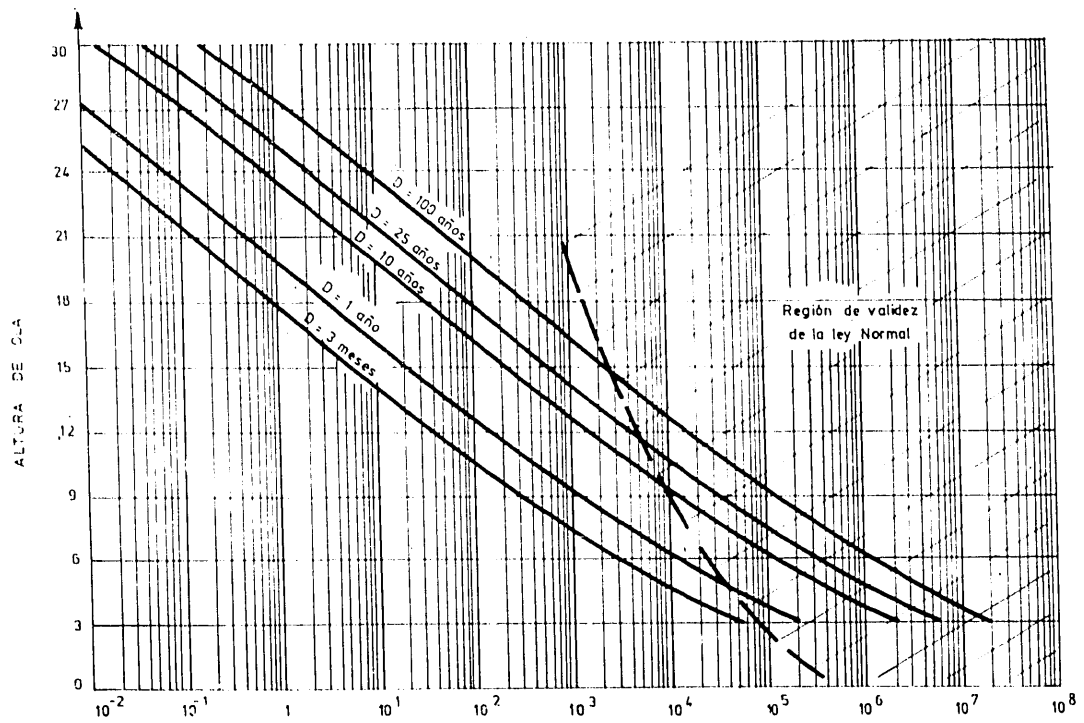


Fig. 3. — Media del número de olas.

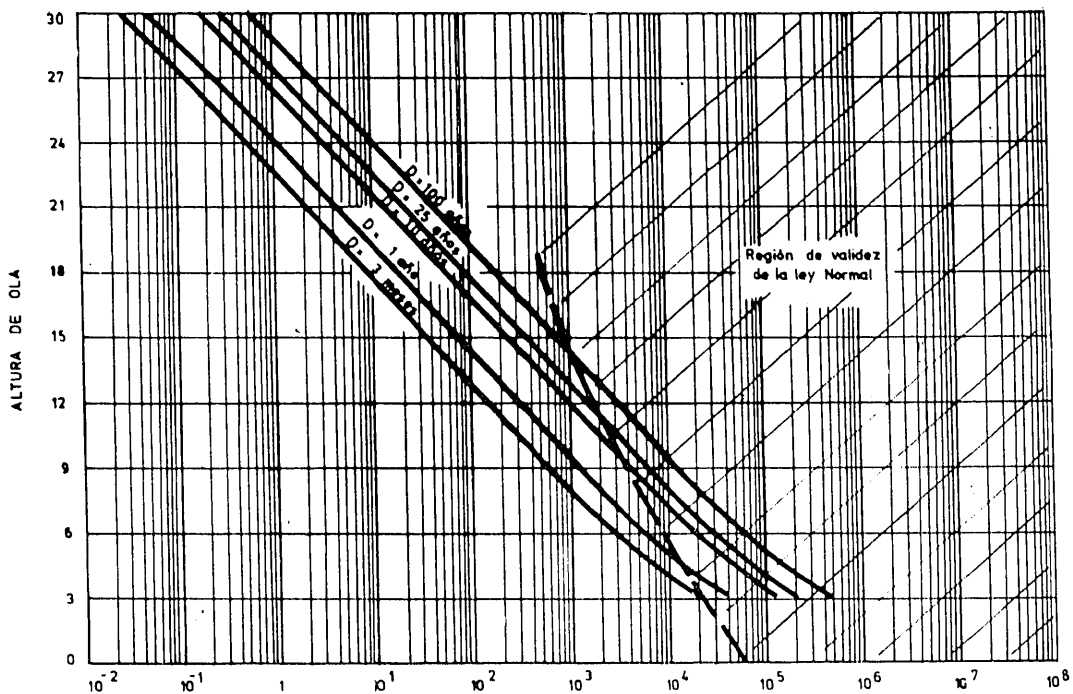


Fig. 4. — Desviación típica del número de olas.

pica del número de olas N en función de la altura de ola para períodos de tiempo de tres meses, uno, diez, veinticinco y cien años. En ambos gráficos se ha sombreado la región de validez de la distribución normal.

TABLA II

H_w (m)	T_w (seg)										
	Calmas	5	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5	16,5	18,5	20,5	≥ 21
0,25	963	1210	48	18	22	9	5	1	2	23	9
0,50	98	2951	350	108	56	12	16	4	1	6	99
1,00	140	5428	2683	631	249	76	31	8	3	14	55
1,50	111	2669	4745	1772	512	194	63	28	4	5	11
2,00	62	817	2867	2238	791	253	73	21	11	1	2
2,50	61	283	1541	1712	1061	356	126	33	9	2	2
3,00	36	121	730	1087	776	338	104	33	7	—	1
3,50	32	75	379	686	551	923	123	36	13	—	1
4,00	15	26	190	323	367	209	80	35	10	1	—
4,50	11	20	139	276	269	191	106	51	17	—	—
5,00	7	5	16	49	49	33	15	2	1	1	—
5,50	6	8	14	36	35	29	11	6	—	1	—
6,00	4	12	29	45	52	35	21	13	2	—	1
6,50	2	2	22	37	46	34	13	8	3	2	—
7,00	1	4	7	24	12	11	6	3	1	—	—
7,50	3	—	12	15	26	21	8	3	3	—	1
8,00	—	1	5	11	13	22	7	3	—	1	—
8,50	—	—	7	8	7	7	2	4	—	1	—
9,00	1	—	—	2	4	3	5	2	—	—	1
9,50	1	—	4	12	12	13	5	3	2	1	—

5. COMENTARIO FINAL

En este artículo se han obtenido los valores medios y desviaciones típicas de la variable aleatoria número de olas que pueden abordar una obra durante un intervalo de tiempo D . La solución matemática del problema es exacta; sin embargo, algunas de las hipótesis del modelo propuesto son ciertamente mejorables. Se considera de especial interés un estudio más profundo a partir de datos registrados de la forma del temporal, la duración del estado máximo y la utilización del período medio obtenido a partir de estadísticas visuales.

Este modelo ha sido aplicado a la costa oriental del mar Cantábrico y en profundidades indefinidas; no obstante la aplicación del modelo a otros mares es sólo un problema de disponibilidad de datos, y su extensión a profundidades reducidas puede llevarse a cabo mediante un estudio de refracción.

BIBLIOGRAFIA

- BENJAMIN JACK, R., and CORNELL, C. A.: "Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers, McGraw-Hill, 1970.
- COPEIRO, E.: "Un método práctico de prever oleaje extremal para el cálculo de estructuras marítimas. *Revista de Obras Públicas*. Junio, 1976.
- HOGBEN, N., and LUMB, F. E.: "Ocean Wave Statistics H. M. S. O., 1967.
- LEE, CH.: "Recent Advances in Coastal Structures Design". Proc. 8th Coastal Conference, 1962.
- LONGUET-HIGGINS, M. S.: "On the Statistical Distribution of the Heights of Sea Waves". *J. Marine Research*, 11, 245-266, 1952.
- LOSADA, M. A., and SERRANO, E.: "Directional Method of Forecasting Wind Generated Sea Waves". Seatec'77. Singapore, 1977.
- LOSADA, M. A.; TEJEDOR, L., y GIMENEZ CURTO L, A.: "Altura de ola de cálculo en diques de escollera". Universidad de Santander. Marzo, 1977.
- NOLTE, K. G., and HANSFORD, J. E.: "Closed-form expressions for determining the fatigue damage of structures due to Ocean Waves". Offshore Technology Conference. Paper No. 2606, 1976.
- SILVESTER, R.: "Coastal Engineering", I, Elsevier, 1975.
- S. BORES, P.: "Ola de cálculo". Laboratorio de Puertos "Ramón Iribarren", núm. 5-B, 1968.