

Análisis avanzado de estructuras mixtas

Resumen de un curso^(*)

Por JESUS ORTIZ HERRERA
JULIO MARTINEZ CALZON

Dres. Ingenieros de Caminos, C. y P.

Se presenta en este artículo una colección de resultados seleccionados entre los trabajos de curso de una asignatura de doctorado impartida en el año académico 77-78, dedicada a la explicación de los métodos avanzados de análisis de las secciones y estructuras mixtas hormigón-acero estructural, así como de su moderna problemática constructiva y de diseño. El objetivo de este curso no era exclusivamente docente, sino que además pretendía iniciar a los futuros doctorandos en la práctica y hábitos investigadores, aspecto al que se prestó especial atención. Producto de esta actividad fueron —entre otros— los resultados aquí seleccionados y recogidos, algunos de verdadero interés práctico, y que abarcan desde diversos aspectos del cálculo plástico aplicado a las estructuras mixtas, hasta el estudio de los fundamentos del análisis con deformaciones diferidas de la sección parcial de hormigón.

ANTECEDENTES

Como actividades del curso "Análisis avanzado de secciones y estructuras mixtas hormigón-acero estructural", impartido como asignatura de doctorado adscrita al Departamento de Estructuras Metálicas de la E.T.S. de I.C.C.P., de Madrid, durante el pasado año académico 1977-78 se realizó una serie de trabajos de curso cuyo objetivo básico era el de habituar a los alumnos de la asignatura a la realización, presentación y defensa de una investigación de carácter teórico, naturalmente de envergadura y alcance mucho más limitados que los de una tesis doctoral, pero constituyendo un entrenamiento útil para el momento de plantearse y abordar esta última. Para el desarrollo de estos trabajos se proporcionó a los alumnos del curso una serie de temas y directrices de actuación, seleccionando entre la extensa problemática actual del análisis de las piezas mixtas temas que, siendo de interés práctico real, fueran adecuados para su estudio en grupo con una dedicación razonablemente moderada de horas de trabajo. El gran interés demostrado por la mayor parte de los grupos de alumnos del curso permitió llegar a una colección de resultados dignos de ser divulgados, y a ello responde esta publicación, para la cual se han seleccionado esos resultados de mayor valía. Se enumera a continuación a aquellos alumnos, todos ellos ingenieros de Caminos, que intervinieron en la realización de los trabajos más desta-

cados, habiendo merecido las máximas calificaciones:

1. González Sánchez, José Luis.
Moreno Villalobos, Domingo.
Ogueta Fernández, Angel.
Robledo Candela, Julián.
(Estudio estadístico de las diferencias entre los valores rígido-plástico y elastoplástico del momento de agotamiento de las secciones mixtas simples.)
2. Gutiérrez Jiménez, José Pedro.
Martorano Navas, Luis Daniel.
Vilacoba García, Luis Francisco.
Villalba Sánchez, José Manuel.
(Redistribuciones elastoplásticas de esfuerzos en una viga continua simple.)
3. Izquierdo Martínez, María Jesús.
(Comparación de diagramas de interacción axil-flector según los métodos rígido-plástico y elastoplástico.)
4. Burón Maestro, Manuel.
Ortiz Bonet, Angel.
(Contraste numérico de coeficientes de fluencia "aparentes" del hormigón.)
5. González Fernández-Castañeda, J. Javier.
Jurado Cabañes, Carlos.
Rodríguez Santiago, Jesús.
(Reducciones del momento de agotamiento por inestabilidad del alma en secciones semicompactas y esbeltas no rigidizadas.)

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de octubre de 1979.

La presentación unificada de estos trabajos, así como la dirección de los mismos, integrados en la parte teórica del curso, ha sido llevada a cabo por J. Ortiz Herrera, quien expuso dicha parte teórica, mientras que J. Martínez Calzón desarrolló la parte práctica del curso, dedicada a la explicación de la variada problemática actual de criterios de seguridad, dimensionamiento y aspectos constructivos de las estructuras mixtas.

1. Estudio estadístico de las diferencias entre los valores rígido-plástico y elastoplástico del momento de agotamiento de las secciones mixtas simples.

En la actualidad puede afirmarse categóricamente que el cálculo en rotura se halla totalmente implantado como método de análisis resistente de las piezas mixtas de luces y cantos pequeños o medios, habiendo relegado a los métodos elásticos al nivel de comprobaciones, si no "secundarias", sí de importancia menor, como el control de movimientos y otros aspectos del comportamiento en servicio de las piezas y estructuras mixtas. En efecto, los métodos anelásticos se han revelado como absolutamente necesarios para modelar el comportamiento resistente "último" de las piezas mixtas, según se ha observado en infinidad de investigaciones experimentales realizadas en la presente y pasada década. Y, por otra parte, estos métodos anelásticos permiten una gran flexibilidad de utilización de materiales combinados (secciones metálicas "híbridas", compuestas de aceros de diferentes límites elásticos; sección parcial de hormigón superior o inferior, con armaduras pasivas y activas, etc.), cuyo uso amplía considerablemente la variedad y competitividad de las soluciones mixtas, pero se veía muy coartado y limitado por la adopción de los criterios "clásicos" de tensiones admisibles.

Los métodos anelásticos tienen en consideración la entrada en régimen plástico de toda o parte de la sección parcial metálica, a medida que la sollicitación de la sección mixta se aproxima a su valor de agotamiento; y, asimismo, los diferentes aspectos anelásticos del comportamiento del hormigón, tales como la fisuración o, en compresión, la pérdida de linealidad entre tensiones y deformaciones una vez superados los niveles de tensión convencionalmente aceptados como prácticamente elásticos. Al alcanzarse el agotamiento, las zonas todavía elásticas son generalmente muy poco extensas, trabajando en la mayor parte de la sección cada material a su respectivo límite elástico o resistente.

Para cuantificar la resistencia global de las secciones mixtas en el instante de agotamiento, existen diversas formulaciones o modelos teóricos que permiten abordar el problema con distintos

grados de aproximación y de complicación numérica; convencionalmente, pueden establecerse dos categorías de métodos:

- El método "elastoplástico", basado en leyes tensión-deformación de cada material que tienen en cuenta, de manera más o menos simplificada o esquemática, una primera fase de comportamiento elástico o "lineal", y una segunda fase plástica (por ejemplo, en el caso del acero estructural); o una pérdida gradual de linealidad entre tensiones y deformaciones (por ejemplo, el diagrama parábola-rectángulo del hormigón).
- El método "rígido-plástico", el cual prescinde de la fase o rama elástica de los diagramas tensión-deformación; así, en el caso del acero, este método lo considera trabajando siempre a su límite elástico (en tracción o compresión); y, en el caso del hormigón, se aplica (entre otros posibles) el bien conocido diagrama "rectangular", tipificado en las Instrucciones EH73 y EP77 (*).

En el caso de piezas flectadas, el parámetro o magnitud básica a determinar para cada sección es su momento de agotamiento o momento último, utilizándose la notación M_{pl} para significar su valor con arreglo al método elastoplástico, y M_{rp} cuando se utiliza el método rígido-plástico.

En principio, puede parecer difícilmente justificable la drástica simplificación del método rígido-plástico de prescindir de la rama o fase elástica de los diagramas tensión-deformación; pero, según se ha afirmado anteriormente, las zonas todavía elásticas en el instante último o de agotamiento se circunscriben en general a porciones muy poco extensas de la sección mixta y en posiciones próximas a la fibra neutra, lo que determina influencias reducidas en las magnitudes de los esfuerzos, determinando que las imprecisiones derivadas de la utilización del método rígido-plástico sean generalmente de pequeña consideración. Por otra parte, el método rígido-plástico es de aplicación práctica mucho más sencilla y rápida que el método elastoplástico, resultando de gran ayuda en los cálculos "manuales"; y también en los cálculos por ordenador, en el caso común de requerirse la tabulación de los momentos de agotamiento de series muy amplias de secciones distintas, a cuyo efecto la utilización del método rígido-plástico permite reducciones muy considerables de tiempos de cálculo en relación a los exigidos por el método elastoplástico.

(*) La aplicación de ambos métodos a las secciones mixtas puede seguirse en el Cap. IV de la obra "Construcción mixta" (J. Martínez Calzón, J. Ortiz Herrera; ed. Rueda, 1978).

ANÁLISIS AVANZADO DE ESTRUCTURAS MIXTAS

Por todo ello, es práctica generalizada el basar el cálculo resistente de las secciones mixtas flechadas en el momento rígido-plástico M_{pl} , en lugar del valor más exacto M_u , al menos para las clases de secciones de las cuales se dispone información experimental o teórica de que están "bien condicionadas". Esto conlleva omitir la consideración de las diferencias entre M_{pl} y M_u , que, si bien son generalmente pequeñas, pueden llegar a ser sensibles, dejando el camino abierto a extrapolaciones injustificadas salvo que medie un estudio previo de la magnitud de dichas diferencias, efectuado con carácter específico para cada tipología concreta de secciones mixtas.

Precisamente, en este trabajo se ha abordado un contraste sistemático de las diferencias entre los valores de M_{pl} y M_u , habiéndose seguido para ello las etapas siguientes:

- Obtención (por ordenador) de las magnitudes M_{pl} y M_u , así como del cociente $\gamma = M_{pl}/M_u$, para una muestra extensa de secciones mixtas ajustadas al modelo genérico posteriormente descrito.
- Estadística de los valores obtenidos del coeficiente γ .
- Estudio de correlación y regresión de γ respecto a diversos parámetros adimensionales α_i , definidores de las características geométricas y mecánicas de las secciones mixtas consideradas.

Aunque incompletos y perfeccionables, los resultados obtenidos permiten acotar para las secciones mixtas sencillas los valores prácticos del coeficiente γ , y efectuar una estimación directa del mismo en función de los valores de los parámetros α_i en cada caso particular. Ello es de gran interés, ya que permite efectuar una corrección, simplista pero inmediata, del momento de agotamiento obtenido por el método rígido-plástico (división de M_{pl} por γ , o, alternativamente, incorporación de γ como un factor de mayoración adicional del momento aplicado).

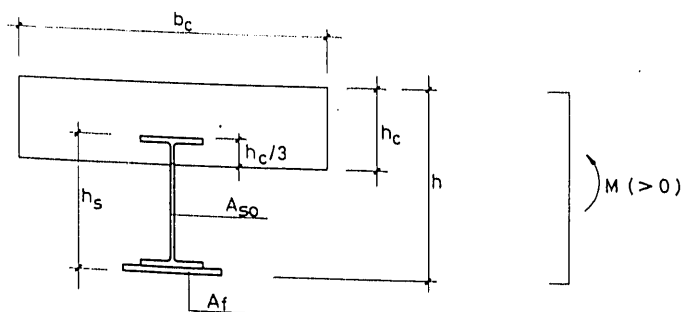


Fig. 1.1.—Sección mixta semidescolgada en flexión positiva
Acero: $f_{yd} = 2.600 \text{ Kp/cm}^2$. Hormigón: $f_{cd} = 200 \text{ Kp/cm}^2$.

La sección genérica analizada está representada en la figura 1.1; se ha adoptado una sección semidescolgada, entendiéndose que los valores de γ obtenidos para este tipo de sección son representativos tanto de las secciones descolgadas como de las embebidas más comunes. La sección se supone solicitada en flexión "positiva"; aunque ha sido abordado el caso de las secciones con armadura longitudinal superior y solicitadas en flexión "negativa", dicha investigación no ha sido completada, por lo cual esta exposición se restringe al caso particular citado de secciones mixtas en flexión "positiva". Ello limita el alcance de los resultados presentados a continuación, pero los mismos, sin ser generales, constituyen indudablemente una información indicativa de gran interés.

Los parámetros α_i adoptados han sido los siguientes:

$$\alpha_1 = \frac{b_c f_{cd}}{h f_{yd}}; \quad \alpha_2 = \frac{h_c}{h} = \frac{3}{2} \left(\frac{h - h_s}{h} \right)$$

$$\alpha_3 = \frac{A_f}{A_{s0}}$$

La muestra adoptada ha estado constituida por 144 secciones, comprendiendo todas las combinaciones de los siguientes valores:

$$\alpha_1 = 0,05, 0,15, 0,25$$

$$\alpha_2 = 0,25, 0,50, 0,95$$

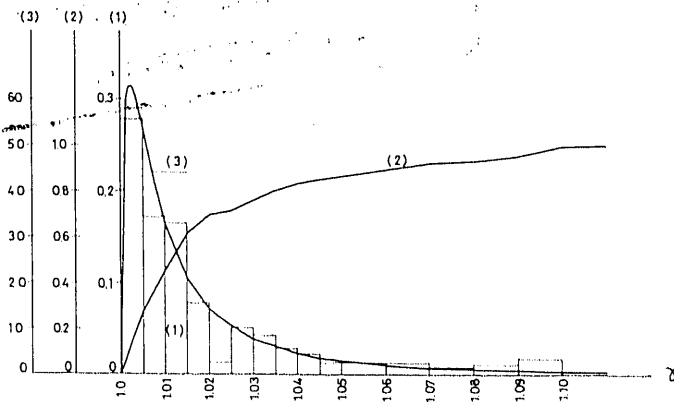
$$\alpha_3 = 0, 0,33, 0,66, 1$$

$$A_{s0} = \text{IPN } 160, \text{IPN } 400, \text{IPE } 160, \text{IPE } 400$$

Los resultados obtenidos para los cuatro tipos de perfiles indicados no presentan diferencias importantes, por lo cual se ha juzgado aceptable realizar una estadística común del parámetro γ , sin distinción para perfiles IPN o IPE ni diferenciación de distintos grupos de cantos de perfiles.

En la figura 1.2 se ha representado un histograma de frecuencias y la función de distribución (F) de la muestra. A continuación se indican las principales características muestrales:

| | |
|--------------------|---------------------------|
| Media: | 1,022 |
| Desviación típica: | 0,0253 |
| Mediana: | 1,012 ; $F(1,012) = 0,50$ |
| Fractil 25 %: | 1,029 ; $F(1,029) = 0,75$ |
| Fractil 10 %: | 1,062 ; $F(1,062) = 0,90$ |
| Fractil 5 %: | 1,087 ; $F(1,087) = 0,95$ |



(1): Histograma de frecuencias relativas
 (2): Función de distribución de la muestra (F)
 (3): Función de densidad logarítmico-normal (p), con $a = -1,9666$, $b = 0,5278$

Fig. 1.2.—Estadística del parámetro γ .

En la misma figura 1.2 se halla representada una distribución logarítmico-normal, con función de densidad del tipo:

$$p(\gamma) = \frac{\exp(-\mu^2/2)}{(\gamma - 1) \cdot b \cdot \ln 10 \cdot \sqrt{2\pi}} = \frac{0,1733 \exp(-\mu^2/2)}{(\gamma - 1) b}$$

$$\text{con } \mu = \frac{\log_{10}(\gamma - 1) - a}{b}$$

siendo $a = -1,9666$ y $b = 0,5278$ los valores estimados de los coeficientes a y b . Se ha efectuado un contraste χ^2 del ajuste de esta distribución logarítmico-normal, habiéndose encontrado $\chi^2 = 6,05$ (con cinco grados de libertad efectivos), valor que no corresponde a una concordancia excesivamente buena de esta distribución supuesta, pero que tampoco permite rechazarla, aun cuando el nivel de significación para este rechazo sea tan poco extremado como 0,30. Sin ser concluyente este resultado, puede afirmarse que la hipótesis de distribución logarítmico-normal es razonablemente aceptable, lo cual se aprecia también gráficamente en la figura 2.2.

$$\Phi(\gamma) = \int_1^{\gamma} p(\gamma) d\gamma = \Phi_N(\mu)$$

$$\text{con } \mu = \frac{1,9666 + \log_{10}(\gamma - 1)}{0,5278}$$

siendo Φ_N la función de distribución normal $N(0,1)$.

Adoptando esta distribución, se deducen los siguientes valores de γ en función de la probabilidad r de ser sobrepasados:

- $r = 50\% \dots \gamma = 1,011 (\mu = 0; \gamma = 1 + 10^{a + \mu b})$
- $r = 25\% \dots \gamma = 1,026 (\mu = 0,675)$
- $r = 10\% \dots \gamma = 1,051 (\mu = 1,282)$
- $r = 5\% \dots \gamma = 1,080 (\mu = 1,645)$
- $r = 1\% \dots \gamma = 1,183 (\mu = 2,329)$

Estos valores de γ coinciden razonablemente bien con los valores antes indicados a partir de la función de distribución muestral, lo cual constituye una nueva prueba de la bondad relativa del ajuste de la citada distribución logarítmico-normal.

A efectos de fijar una cota práctica de γ aplicable indiscriminadamente para este tipo de secciones, podría adoptarse aquel valor probabilidad de ser sobrepasado fuera muy reducida, por ejemplo un 5 por 100. No obstante, teniendo en cuenta que la muestra analizada incluye secciones pésimamente condicionadas, y dada la fuerte asimetría de la distribución de probabilidad observada, con localización de los valores más probables de γ muy cerca de la unidad, parece aconsejable hacer menos exigente aquella cota práctica, estableciéndola en el fractil 10 por 100 ($\gamma \approx 1,05$) o incluso en el 25 por 100 ($\gamma \approx 1,03$), siempre que se tenga alguna evidencia de que las secciones que se manejan no están anormalmente diseñadas. En cualquier caso, este valor de γ puede reducirse haciendo uso de la fórmula de regresión seguidamente indicada, que establece una relación aproximada entre γ y los datos α_i .

La fórmula de regresión ensayada ha sido de carácter lineal, habiéndose obtenido:

$$\gamma \approx 1,071 - 0,176 \alpha_1 - 0,036 \alpha_2 - 0,008 \alpha_3$$

La correlación observada no ha sido totalmente satisfactoria (coeficiente de correlación múltiple = 0,74), y podría probablemente mejorarse con una fórmula de regresión no lineal, incluyendo términos lineales (en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) y cuadráticos ($\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_3, \alpha_2 \alpha_3$), pero no ha sido estudiada esta variante, ya que mejorar la exactitud de la fórmula a costa de hacerla claramente más compleja desvirtuaría el objeto de la misma.

Teniendo en cuenta la cota práctica de γ previamente establecida, así como la débil correlación observada entre γ y α_3 , reflejada en la escasa incidencia del término $-0,008 \alpha_3$ en la anterior expresión, puede establecerse finalmente el criterio aproximado siguiente:

$$\gamma \approx 1,07 - 0,176 \frac{b_c f_{cd}}{h f_{yd}} - 0,054 \frac{h - h_s}{h} \left\{ \begin{array}{l} \leq 1 \\ \geq 1,05 \end{array} \right.$$

Evidentemente la aplicación práctica de esta fórmula resulta inmediata, siendo, pues, muy adecuada para la corrección de las pequeñas imprecisiones derivadas de la utilización del método rígido-plástico, si bien su empleo queda restringido al caso de secciones de tipología análoga o asimilable a la anteriormente señalada como base de este trabajo.

2. Redistribuciones elasto-plásticas de esfuerzos en una viga continua simple.

Si el cálculo rígido-plástico del momento de agotamiento se halla actualmente implantado como principal herramienta para la comprobación resistente de las secciones mixtas, también su equivalente a nivel de pieza o estructura, el cálculo plástico "clásico", se halla asimismo difundido extraordinariamente en el campo de las piezas mixtas flectadas de luces y cantos moderados. Este cálculo plástico se fundamenta en la hipótesis de rótulas plásticas localizadas, de capacidad de rotación ilimitada a momento constante (M_{pl}), y en la no consideración de las deformaciones elásticas en los intervalos de pieza comprendidos entre rótulas plásticas sucesivas. Pues bien, en realidad las secciones mixtas no presentan capacidad de deformación ilimitada, ni los términos elásticos resultan tan despreciables como supone el cálculo plástico "clásico", por lo cual la aplicabilidad del mismo a las piezas mixtas debe hacerse con diversas limitaciones y precauciones (*).

Para la generalidad de las secciones mixtas simples, la relación entre momentos y curvaturas resulta esquematizable en forma de diagramas "bilineales", tal como el representado en la figura 2.1; los parámetros adimensionales μ_1 y μ_2 indicados en la misma (cocientes de las "coordenadas" del vértice respecto al momento último M_u y curvatura última χ_u) oscilan típicamente entre 0,8 y 1 (μ_1) y entre 0,05 y 0,30 (μ_2), mientras que la hipótesis rígido-plástica exigiría que $\mu_1 = 1$ (vértice del diagrama, situado a la ordenada M_u) y que $\mu_2 = 0$ (curvatura última infinita).

El cálculo plástico "clásico" es generalizable para la consideración de diagramas momentos-curvaturas bilineales e incluso más complejos, pero a costa de dificultar muy considerablemente el análisis, viable entonces prácticamente sólo con medios de cálculo automático. No obstante, con utilización de estos medios, es posible "simular" el comportamiento anelástico de las piezas mixtas flectadas, con costes y tiempos de ejecución mucho más reducidos, lógicamente, que los requeridos por un programa de ensayos. En este trabajo

(*) Apartado VI.4 de la ya citada obra "Construcción mixta".

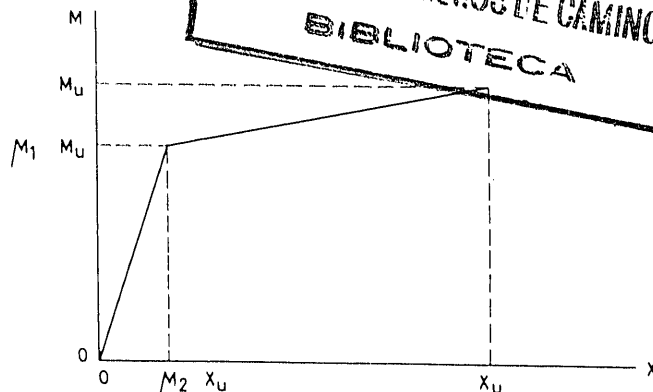


Fig. 2.1.—Diagrama momentos-curvaturas bilineal.

se ha abordado una aplicación sistemática de estos métodos, con alcance limitado (viga continua sencilla, diagrama $M-\chi$ lineal) por las razones luego expuestas, pretendiendo con ello un estudio de los posibles errores resultantes de la aplicación del cálculo plástico a las piezas mixtas.

Tal como en el análisis de secciones (trabajo primero), se denominan métodos elasto-plásticos estas generalizaciones del cálculo plástico en las que se hace intervenir el carácter limitado de las deformaciones últimas (χ_u) y el carácter no despreciable de las deformaciones elásticas ($\mu_2 \chi_1$). Generalmente los resultados del cálculo elasto-plástico se expresan con referencia a los resultados del cálculo elástico ordinario; así, en el caso de vigas continuas, adoptando como magnitudes hiperestáticas los momentos sobre apoyos intermedios, los resultados del cálculo elasto-plástico se expresan comúnmente en forma de coeficientes de redistribución (δ) de dichas magnitudes hiperestáticas, definidos estos coeficientes como los porcentajes o tantos por uno de variación respecto de los correspondientes resultados del cálculo elástico. En el cálculo plástico clásico, estos coeficientes de redistribución no vienen limitados por ninguna condición de rotación límite o última de las rótulas plásticas; en cambio, en el cálculo elasto-plástico, el carácter limitado de las deformaciones impone ciertas acotaciones a dichos coeficientes.

Evidentemente, sería de gran interés práctico disponer de una tabulación extensa de estos coeficientes de redistribución elasto-plásticos, ya que sería posible con ello un reajuste inmediato de las leyes elásticas de esfuerzos de cada pieza, con la garantía de respetarse la capacidad de rotación efectiva de las zonas plastificadas. Pero una tabulación de esta naturaleza encuentra graves dificultades por el gran número de variables involucradas, exigiendo enormes tiempos de cálculo o determinando un excesivo volumen de resultados, si se

pretende cubrir la extensa casuística posible. Ello es motivado por diversas causas:

- A pesar de la relativa sencillez del tipo de estructura a que se hace referencia (viga continua), la casuística de números de vanos, relaciones de luces, cargas, etc., puede ser considerable, tal como se aprecia en cualquier tabulación "elástica".
- Dentro del análisis no lineal no es válido el principio de superposición, lo cual incrementa aún más el número de hipótesis de carga a considerar explícitamente.
- La definición precisa de las características deformativo-resistentes requiere mucha mayor cantidad de información que en los cálculos elásticos, tanto a nivel de sección individual como de pieza completa (variabilidad del diagrama momentos-curvaturas a lo largo de la pieza, el cual se ve considerablemente afectado por los cambios de refuerzos, armaduras, etc.). Ello repercute no sólo en un incremento de la casuística posible, sino además en una grave dificultad de uso de una tal tabulación, cuya utilización presupone el conocimiento de datos de obtención laboriosa y sujetos en general a considerables ajustes y variaciones durante el proceso de dimensionamiento, salvo que el alcance práctico de dicha tabulación se restrinja a la mera comprobación de piezas ya dimensionadas por otros criterios.
- El análisis de cada caso es considerablemente más costoso que en los métodos elásticos: a diferencia de las constantes elásticas, ahora los parámetros deformativos dependen del estado de sollicitación, requiriendo un ajuste iterativo; el agotamiento debe alcanzarse por incrementos sucesivos del parámetro de carga, ya que la no linealidad impide predecir su valor último a partir de un cálculo único de la configuración de acciones prefijadas; generalmente la discretización en barras ha de ser más densa que en los métodos elásticos, y el tratamiento de cada elemento resulta más complicado, etc.

Por estas razones una tabulación referente al comportamiento elastoplástico de las vigas continuas (y con mayor razón para otras tipologías estructurales más complejas) no puede pretender la generalidad, sino tan sólo constituir un "test" más o menos afortunado del comportamiento elastoplástico de una gama particular de casos, y buscando más bien resultados cualitativos que cuantitativos, tales como órdenes de magnitud admisibles de redistribuciones de esfuerzos en agotamiento, o límites orientativos de aplicación del cálculo plástico tradicional en función de las características del diagrama momentos-curvaturas.

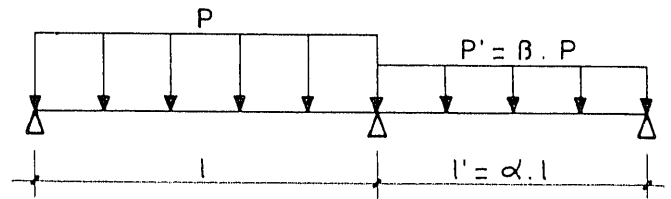


Figura 2.2.

En este trabajo se ha emprendido esa tarea, tomando como base un problema particular relativamente muy sencillo (ver figura 2.2): viga continua de dos vanos desiguales, con cargas uniformemente repartidas p y p' , cuya relación p'/p se mantiene invariable en todo el proceso de carga. Asimismo, se ha adoptado, como modelo deformativo especialmente simple, el ya comentado diagrama momentos-curvaturas bilineal (ver figura 2.1) simétrico en flexión positiva y negativa, y constante a lo largo de toda la pieza.

Se han analizado en total 270 casos, determinados por combinación de los valores siguientes:

$$\alpha (= l'/l) = 1, 0,50, 0,25$$

$$\beta (= p'/p) = 1, 0,50, 0$$

$$\mu_1 = 0,99, 0,90, 0,80, 0,70, 0,60, 0,50$$

$$\mu_2 = 0,01, 0,05, 0,10, 0,25, 0,50$$

Cada vano se ha discretizado en 12 barras, con objeto de permitir la sustitución de las cargas repartidas por cargas puntuales ubicadas exclusivamente en los nudos de la estructura así particionada, y de poder adoptar una distribución lineal de momentos flectores en el interior de cada barra parcial, lo que simplifica la delimitación de las zonas plastificadas y la formulación de los parámetros deformativos de cada elemento.

El algoritmo de análisis empleado ha sido una particularización del algoritmo general desarrollado en la referencia: "Análisis no lineal de estructuras de barras y de láminas de revolución" (*), adaptado para dos grados de libertad por nudo (flexión simple) y para el diagrama momentos-curvaturas bilineal; el método consiste en una transformación del método matricial elástico "de la rigidez", por lo cual es especialmente adecuado para su programación en ordenador.

Para cada caso se han resuelto cinco estados de carga, correspondientes a los siguientes valores de p :

$$p_1 = p_y, \quad p_2 = 0,75 p_y + 0,25 p_{pl},$$

$$p_3 = 0,5 p_y + 0,5 p_{pl}, \quad p_4 = 0,25 p_y + 0,75 p_{pl},$$

$$p_5 = p_{pl},$$

(*) J. Ortiz Herrera, "Hormigón y Acero", núm. 118, 1976.

siendo p_y el valor de p que justamente corresponde a la pérdida de linealidad (flector $|M| = \mu_1 M_u$ en alguna de las secciones de la pieza); y p_{pl} el valor de agotamiento rígido-plástico (carga plástica de colapso, con momento plástico igual a M_u). En realidad, el agotamiento se produce siempre con $p = p_u < p_{pl}$, siendo p_u intermedia entre alguna de las parejas de valores p_i, p_{i+1} ($1 \leq i \leq 4$); si para uno de los estados de carga, p_{i+1} , se alcanza o supera (*) el momento M_u en alguna de las secciones de la pieza (sección "crítica"), mientras que para p_i se mantiene $|M| < M_u$ en todas ellas, entonces evidentemente $p_i < p_u < p_{i+1}$, y p_u puede estimarse de modo aproximado ajustando el flector $|M|$ de la sección crítica al valor M_u , haciendo la hipótesis de variación lineal de dicho flector en el intervalo $p_i < p < p_{i+1}$. Naturalmente el ajuste más preciso de p_u requeriría nuevos cálculos para la reducción progresiva de dicho intervalo, pero se ha considerado suficiente la precisión conseguida con el planteamiento descrito.

La deducción de las magnitudes p_y y p_{pl} para la pieza en cuestión es trivial, indicándose simplemente a continuación la formulación correspondiente (válida para $\alpha \leq 1, \beta \leq 1$):

(a) $p_y = 8 \gamma_y M_u / l^2$, siendo:

$$\gamma_y = \mu_1 / k$$

$$k = k_- = \frac{1 + \alpha^3 \beta}{1 + \alpha}$$

$$\text{si } k_- \geq 4(3 - 2\sqrt{2}) = 0,6863$$

$$k = k_+ = 1 - \frac{1}{2}(k_-) + \frac{1}{16}(k_-)^2$$

$$\text{si } k_- < 0,6863$$

(b) $p_{pl} = 8 \gamma_{pl} M_u / l^2$, siendo:

$$\gamma_{pl} = 1 / [4(3 - 2\sqrt{2})] = 1,4571$$

Análogamente a p_y y p_{pl} , p_u se escribe en la forma $p_u = 8 \gamma_u M_u / l^2$; es decir, se especifica a través del coeficiente adimensional $\gamma_u = p_u l^2 / 8 M_u$

El coeficiente de redistribución del momento sobre el apoyo intermedio de la pieza se define en la forma ya indicada: $\delta = 1 - M^- / M^+_{cl}$, siendo M^- y M^+_{cl} los valores de dicho momento res-

pectivamente según el cálculo elastoplástico y el cálculo elástico. El coeficiente δ varía con p , entre los valores $\delta(p_y) = 0$ y $\delta(p_u) = \delta_u$; conocida p_u , y por consiguiente γ_u , es inmediato expresar δ_u en la forma siguiente:

— Si el agotamiento se produce precisamente en la sección de apoyo (con $|M| = M_u$):

$$(c) \delta_u = 1 - \frac{1}{\gamma_u k_-}$$

— Si el agotamiento se produce en la sección de máximo flector positivo (entonces $|M| < M_u$):

$$(d) \delta_u = 1 - \frac{4}{k_-} \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma_u} \right)$$

Así, pues, determinada la carga última p_u de cada caso analizado, la formulación anterior permite obtener inmediatamente el correspondiente δ_u , y es posible tabular este coeficiente en función de los parámetros adimensionales del diagrama momentos-curvaturas, μ_1 y μ_2 , y de las relaciones de luces y cargas, α y β , de este problema particular.

No obstante, esta mera indicación de coeficientes de redistribución es poco expresiva de la "capacidad de adaptación plástica" inherente a cada diagrama momentos-curvaturas (caracterizado por μ_1 y μ_2), ya que el diagrama más dúctil redistribuirá poco si las particulares combinaciones de luces y cargas determinan ya en régimen elástico valores absolutos similares de los pésimos flectores positivo y negativo, en cuyo caso la formación del mecanismo de colapso plástico "ideal" es posible con redistribuciones δ_{pl} muy pequeñas. Interesa, por lo tanto, valorar en cada caso qué fracción del comportamiento plástico que "se requiere" de una sección dada es capaz de proporcionar ésta; a tal efecto se han definido los siguientes "coeficientes de eficiencia plástica":

$$(e) \lambda_\Delta = \frac{p_u - p_y}{p_{pl} - p_y} = \frac{\gamma_u - \gamma_y}{\gamma_{pl} - \gamma_y}$$

$$(f) \lambda_\gamma = \frac{p_u}{p_{pl}} = \frac{\gamma_u}{\gamma_{pl}}$$

$$(g) \lambda_\delta = \frac{\delta_u}{\delta_{pl}}$$

El primero de ellos (λ_Δ) establece qué proporción del intervalo ideal de carga en régimen plástico, $p_{pl} - p_y$, es realmente desarrollada por la pieza. El segundo (λ_γ) es la relación de cargas p_u y p_{pl} , por lo cual pone de manifiesto directa-

(*) El que se supere M_u es posible porque el algoritmo adoptado, por conveniencia operativa, mantiene más allá de χ_u la rigidez residual de la rama elastoplástica del diagrama momentos-curvaturas. Ello carece de importancia, ya que a posteriori se invalidan las situaciones con $|M| > M_u$.

ANÁLISIS AVANZADO DE ESTRUCTURAS MIXTAS

mente la pérdida de seguridad asociada en cada caso con la utilización del cálculo plástico tradicional. El tercero (λ_{δ}) indica qué fracción de la redistribución ideal δ_{pi} puede llegar a ser alcanzada en el agotamiento de la pieza.

En la tabla adjunta pueden verse los valores de los coeficientes δ_{pi} ("DU"), λ_{Δ} ("LDIF"), λ_{γ} ("LCOC") y λ_{δ} ("LRED") para combinación consi-

derada de los parámetros μ_1 y μ_2 , en un caso particular de relaciones de luces y cargas ($\alpha = 1 = \beta$); se incluyen tan sólo una de las nueve tablas que componen los resultados del trabajo (*), si bien todas ellas han servido de base para la elaboración de la figura 2.3, en la cual se han representado gráficamente los valores pésimos del coeficiente λ_{Δ} , en forma de isocurvas en el plano (μ_2, μ_1). En lo que respecta al coeficiente λ_{γ} , los valores pésimos se han obtenido siempre en el caso simétrico ($\alpha = 1 = \beta$) (**), siendo, por lo tanto, éste el caso de entre los estudiados en que la aplicación del cálculo plástico tradicional conduciría a las mayores pérdidas de seguridad global; no es

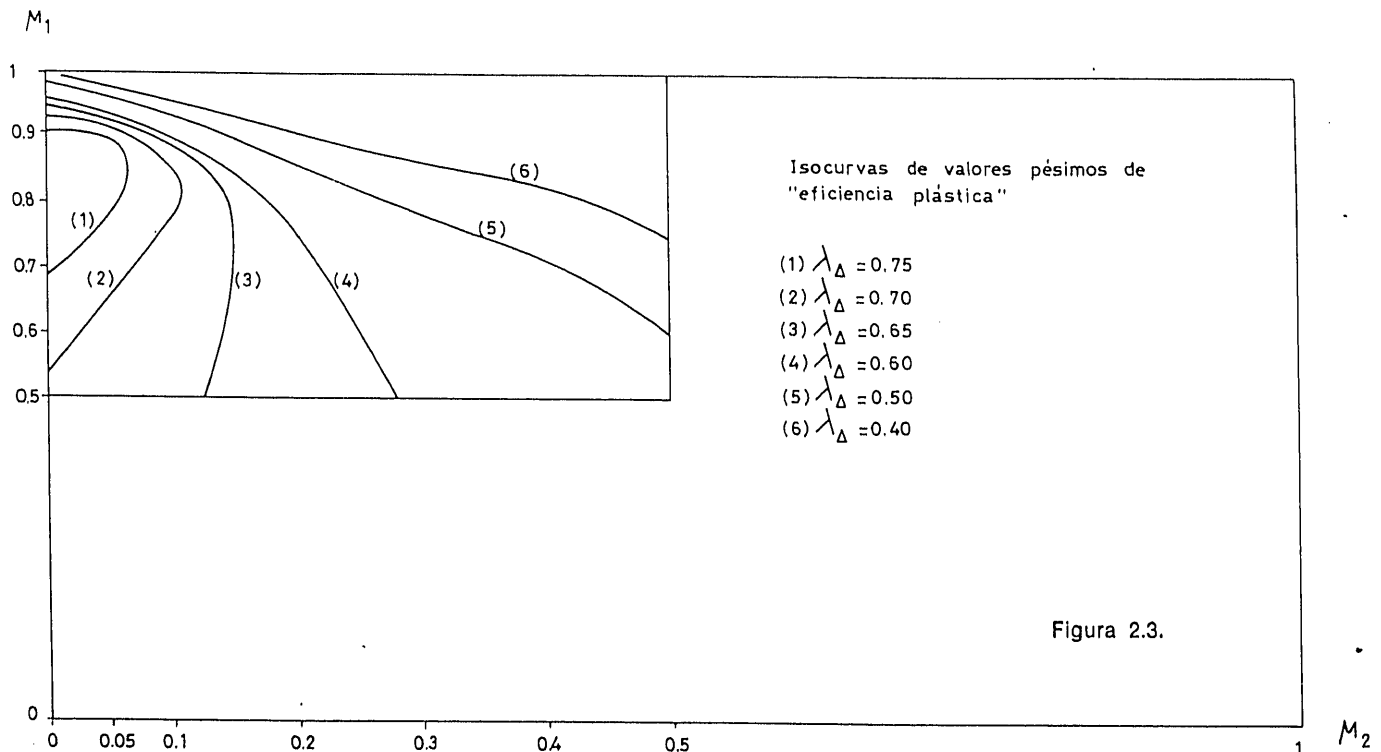
(*) Con objeto de abreviar esta exposición, y teniendo en cuenta que la utilidad de las restantes tablas es relativa dado que se dispone de los valores pésimos de λ_{γ} (tabla adjunta) y de λ_{Δ} (figura 2.3).

(**) Asimismo, los valores pésimos del coeficiente λ_{Δ} (figura 2.3) se han producido mayoritariamente en el caso simétrico. En cambio, la distribución de λ_{δ} es mucho más errática.

ello extraño, ya que en este caso se requiere una elevada redistribución para llegar al mecanismo plástico ideal, y, sin embargo, la extensión de la zona plástica en flexión negativa (la primera en

$L'/L=1.000 \quad P'/P=1.000$

| PARAMETROS ADIMENSIONALES DIAGRAMA BILINEAL | | REDISTRIBUCION EN AGOTAMIENTO DU | COEFICIENTES EFICIENCIA PLASTICA | | |
|--|---------|--|-------------------------------------|------|------|
| μ_1 | μ_2 | | LDIF | LCOC | LRED |
| .99 | .01 | .16 | .44 | .82 | .52 |
| | .05 | .08 | .21 | .75 | .25 |
| | .10 | .06 | .15 | .73 | .19 |
| | .25 | .04 | .11 | .72 | .13 |
| | .50 | .03 | .08 | .70 | .08 |
| .90 | .01 | .27 | .85 | .94 | .86 |
| | .05 | .25 | .78 | .92 | .80 |
| | .10 | .18 | .59 | .84 | .59 |
| | .25 | .08 | .34 | .75 | .26 |
| | .50 | .03 | .24 | .71 | .10 |
| .80 | .01 | .24 | .78 | .90 | .76 |
| | .05 | .23 | .76 | .89 | .74 |
| | .10 | .21 | .71 | .87 | .67 |
| | .25 | .12 | .51 | .78 | .38 |
| | .50 | .04 | .37 | .72 | .14 |
| .70 | .01 | .20 | .74 | .86 | .65 |
| | .05 | .19 | .71 | .85 | .62 |
| | .10 | .18 | .68 | .84 | .57 |
| | .25 | .12 | .58 | .78 | .39 |
| | .50 | .04 | .46 | .72 | .14 |
| .60 | .01 | .17 | .71 | .83 | .54 |
| | .05 | .16 | .69 | .82 | .51 |
| | .10 | .15 | .67 | .81 | .47 |
| | .25 | .10 | .60 | .77 | .33 |
| | .50 | .03 | .50 | .71 | .10 |
| .50 | .01 | .14 | .69 | .79 | .43 |
| | .05 | .13 | .67 | .79 | .40 |
| | .10 | .11 | .66 | .77 | .36 |
| | .25 | .07 | .61 | .74 | .24 |
| | .50 | .01 | .53 | .69 | .02 |



formarse) es especialmente reducida, lo cual limita las rotaciones plásticas alcanzables.

Claramente estos resultados parecen restringir considerablemente la validez de la aplicación indiscriminada de redistribuciones plásticas de esfuerzos hiperestáticos en las piezas continuas. No obstante, es preciso resaltar que existen en las vigas mixtas usuales una serie de efectos no considerados en este estudio, y que explican el mejor comportamiento plástico observado experimentalmente en dichas piezas:

- Las secciones mixtas de edificación exceden normalmente con amplio margen las condiciones de sección compacta (*), por lo cual son generalmente capaces de desarrollar rotaciones plásticas netamente mayores que las teóricas, por aceptar el acero, incluso en las zonas comprimidas, deformaciones superiores a la cota convencional $\epsilon_{x''} = 2,5$ por 100 usualmente adoptada en la determinación de los diagramas momentos-curvaturas (ello se traduce en mayores valores efectivos de χ'' y, por lo tanto, menores valores de μ_{22} , más favorables). Para estos órdenes de deformación, el endurecimiento del acero produce además un incremento resistente no considerado en el análisis límite ordinario.
- Debido al tamaño finito de los apoyos y de los nudos, de magnitud relativa apreciable en el caso de luces cortas, la extensión de las zonas plásticas en flexión negativa puede ser considerablemente mayor (con el consiguiente incremento de las rotaciones plásticas) que bajo la hipótesis de apoyo puntual, aparte de tenerse una cierta reducción de los momentos negativos pésimos respecto de los calculados bajo dicha hipótesis.
- El incumplimiento local de la hipótesis de deformación plana puede dar lugar a redistribuciones adicionales de esfuerzos.
- Las redistribuciones por fisuración, no incluidas en el simplificado modelo teórico supuesto en este trabajo, pueden llegar a ser de considerable importancia.

Así, pues, el estudio realizado se enmarca dentro de los actuales intentos de aproximación teórica progresiva al comportamiento real de las piezas mixtas hiperestáticas, de esfuerzo e interés considerables, pero todavía con numerosos aspectos abiertos a investigaciones futuras.

3. Comparación de diagramas de interacción axil-flector según los métodos rígido-plástico y elastoplástico.

El primer trabajo reseñado en este artículo contrastaba los valores del momento de agotamiento de secciones mixtas determinados con arreglo al método elastoplástico (M_{pl}), más exacto, y con arreglo al método rígido-plástico (M_{rp}), considerablemente menos laborioso. Ese estudio se efectuaba en flexión pura, cuando en realidad es bien conocido el hecho de que el momento de agotamiento efectivo depende del resto de esfuerzos que componen la sollicitación de la sección mixta, fenómeno que se conoce como "interacción" entre esfuerzos últimos. También para el análisis de dicho fenómeno, la generalización del método rígido-plástico resulta ser el procedimiento más sencillo y práctico, pero indudablemente la utilización de este procedimiento simplificado requiere el soporte de un contraste sistemático de sus diferencias con los "resultados elastoplásticos", contraste que hasta el momento presente no ha sido efectuado con la deseable generalidad.

El objeto de este trabajo ha sido el abordar este contraste sistemático en el caso de la interacción flector-axil ($M - N'$) (*), para una extensa serie de secciones mixtas doblemente simétricas representativas de las principales tipologías de secciones de los soportes mixtos. Este estudio, circunscrito al ámbito de la sección individual, no ha incluido ningún efecto relacionado con el pandeo o los fenómenos de segundo orden del soporte comprimido; en estas condiciones, diagramas de interacción como los aquí presentados no pueden utilizarse directamente para la comprobación resistente de los soportes mixtos, salvo en el caso de esbelteces muy reducidas, o introduciendo, en su caso, los términos de esfuerzos asociados con los efectos de segundo orden. No obstante, tales diagramas de interacción $M - N'$ forman parte de los datos básicos necesarios para la adecuada comprobación resistente de los soportes mixtos, y por ello resulta de gran interés disponer de un contraste sistemático de los diagramas obtenidos por el método elastoplástico y por el método rígido-plástico, en orden a delimitar el posible campo de aplicación de este segundo procedimiento.

Para el estudio de la interacción entre sollicitaciones normales M y N' , las hipótesis de trabajo de ambos métodos son análogas a las ya señaladas para el estudio de la situación de flexión pura:

- El método rígido-plástico supone el acero trabajando siempre a su límite elástico (en tracción o compresión), si bien con la precaución de acotar superiormente el de los redondos comprimidos a 4.000 Kp/cm²; para

(*) Ver "Construcción mixta", apartados IV.7 y IV.7.4.

(*) El estudio se limita al caso $N' > 0$ (compresión).

el hormigón se opera con el mismo diagrama rectangular del caso de flexión pura.

- Para la aplicación del método elastoplástico, se ha mantenido el mismo diagrama tensión-deformación birrectilíneo o “elástico-perfectamente plástico” para el acero, incluso armaduras pasivas (supuestas de dureza natural). En cambio, para el hormigón se ha sustituido el diagrama parábola-rectángulo por el diagrama birrectilíneo que reemplaza la rama parabólica por un segmento recto con extremo en el punto $\epsilon'_{cu} = 0,00133$, $\sigma'_{cu} = 0,85 f_c$, diagrama aceptado en el artículo 28.6c de la Instrucción EH-73 (*). Este diagrama tensión-deformación del hormigón une a sus ventajas operativas una perfecta adecuación para los cálculos en agotamiento, tanto en flexión como en compresión simples o compuestas; es, en cambio, muy inexacto a efectos de rigideces en régimen lineal y preagotamiento ($E_c = 637,5 f_c$, valor excesivamente bajo), pero ello no afecta al presente estudio, en el cual se han considerado únicamente estados de agotamiento.

El proceso de aplicación de ambos métodos puede seguirse en los capítulos IV.4.3 y IV.4.4 de la ya citada obra “Construcción mixta”; en esencia, se trata de considerar las diferentes distribuciones de tensiones últimas derivadas de hacer variar la posición de la fibra neutra de tensiones (y respetando la hipótesis de deformación plana y las deformaciones últimas de los materiales en el caso elastoplástico); y determinar los respectivos esfuerzos resultantes M y N' de estas distribuciones de tensiones internas. Estas parejas de valores (M, N') constituyen las coordenadas de sucesivos puntos del diagrama de interacción, cuya representación gráfica, igual que la determinación de los esfuerzos citados, se ha realizado con ayuda de medios automáticos.

La investigación efectuada, cuyos resultados se exponen en las figuras 31, 3.2 y 3.3, ha abarcado un total de 25 secciones distintas, incluyendo soportes rellenos (cuadrados y circulares), recubiertos (con flexión en el plano de mayor inercia o en el de menor inercia) y soportes abiertos. En los tres casos el valor del parámetro $\alpha_r = 0,85 A_c f_c / N'_{pl}$ (***) ha sido variado ampliamente (de 0,2-0,3 a 0,7, aproximadamente).

(*) De acuerdo con lo señalado en la misma, la deformación última del hormigón se ha variado entre los límites $\epsilon'_{cu} = 0,0035$ en flexión pura y $\epsilon'_{cu} = 0,002$ en compresión simple.

(**) Fracción del axil último N'_{pl} (en compresión centrada y ausencia de fenómenos de inestabilidad) asignable a la sección parcial de hormigón.

En el caso de secciones recubiertas flectadas respecto al eje de menor inercia se aprecian diferencias considerables entre ambos diagramas elastoplástico y rígido-plástico (este último, exterior al primero); ello es debido claramente a la desfavorable disposición del acero en este caso, no siendo posible el completo desarrollo del límite elástico en amplias zonas de dicho material (por su excesiva proximidad a la fibra neutra en las situaciones de flexión predominante), en contra de las hipótesis básicas del cálculo rígido-plástico. No obstante, las diferencias entre ambos diagramas se mantienen muy reducidas en las zonas correspondientes a flexiones pequeñas o medias (hasta valores del momento del orden de la mitad del momento último en flexión pura), que es precisamente el rango de sollicitaciones que cabe esperar en el plano de menor resistencia de dichos soportes, en los cuales normalmente se tenderá a que la máxima longitud de pandeo o las flexiones exteriores dominantes se tengan en la dirección ortogonal a la considerada. En el resto de las secciones analizadas se observa una concordancia buena o aceptable entre ambos diagramas de interacción.

Los resultados de este trabajo constituyen, junto con las ventajas operativas del método rígido-plástico, un argumento concluyente a favor de este método, siempre que la aplicación del mismo no se haga extensiva a las secciones de soportes mixtos en los cuales, como en el caso de las secciones 25 a 29, la sección parcial metálica se encuentre en posición claramente desfavorable, o que en tales casos el diagrama rígido-plástico se corrija en función de las diferencias observadas en uno o varios puntos respecto de los resultados de un cálculo elastoplástico específico.

4. Contraste numérico de coeficientes de fluencia “aparentes” del hormigón.

La introducción rigurosa de la deformabilidad diferida del hormigón en el análisis de las secciones mixtas requiere un aparato matemático desproporcionado con la importancia del fenómeno, el cual ha pasado a un segundo plano dentro del conjunto de las comprobaciones de las piezas mixtas, dada su escasa incidencia —teórica y experimentalmente confirmada— en los estados límites de agotamiento de la generalidad de las mismas. Siempre que las características de las secciones y piezas mixtas consideradas permitan su comprobación resistente por métodos plásticos (rígido o elastoplásticos), las deformaciones diferidas de la sección parcial de hormigón son tenidas en cuenta en la práctica solamente a los siguientes efectos:

- Determinación del estado tensional bajo las sollicitaciones características; el objeto de este cálculo tensional en situación de ser-

ANALISIS AVANZADO DE ESTRUCTURAS MIXTAS

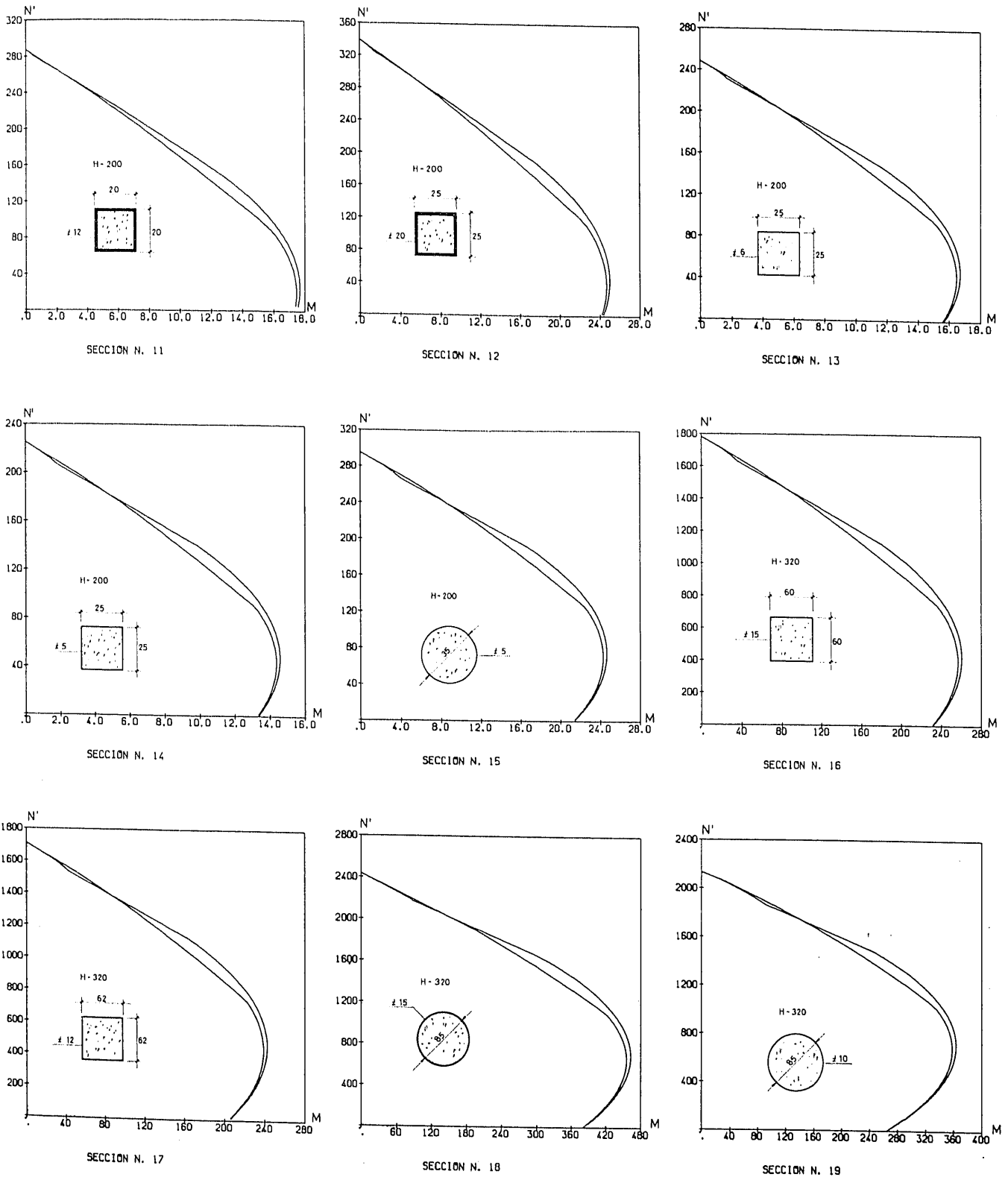


Fig. 3.1.—Diagramas de Interacción $M-N'$ de secciones rellenas.
 Cotas: cm; dimensiones de chapas: mm; acero A-42.
 Esfuerzos (referidos al centro de simetría): M , en mt; N' , en t.

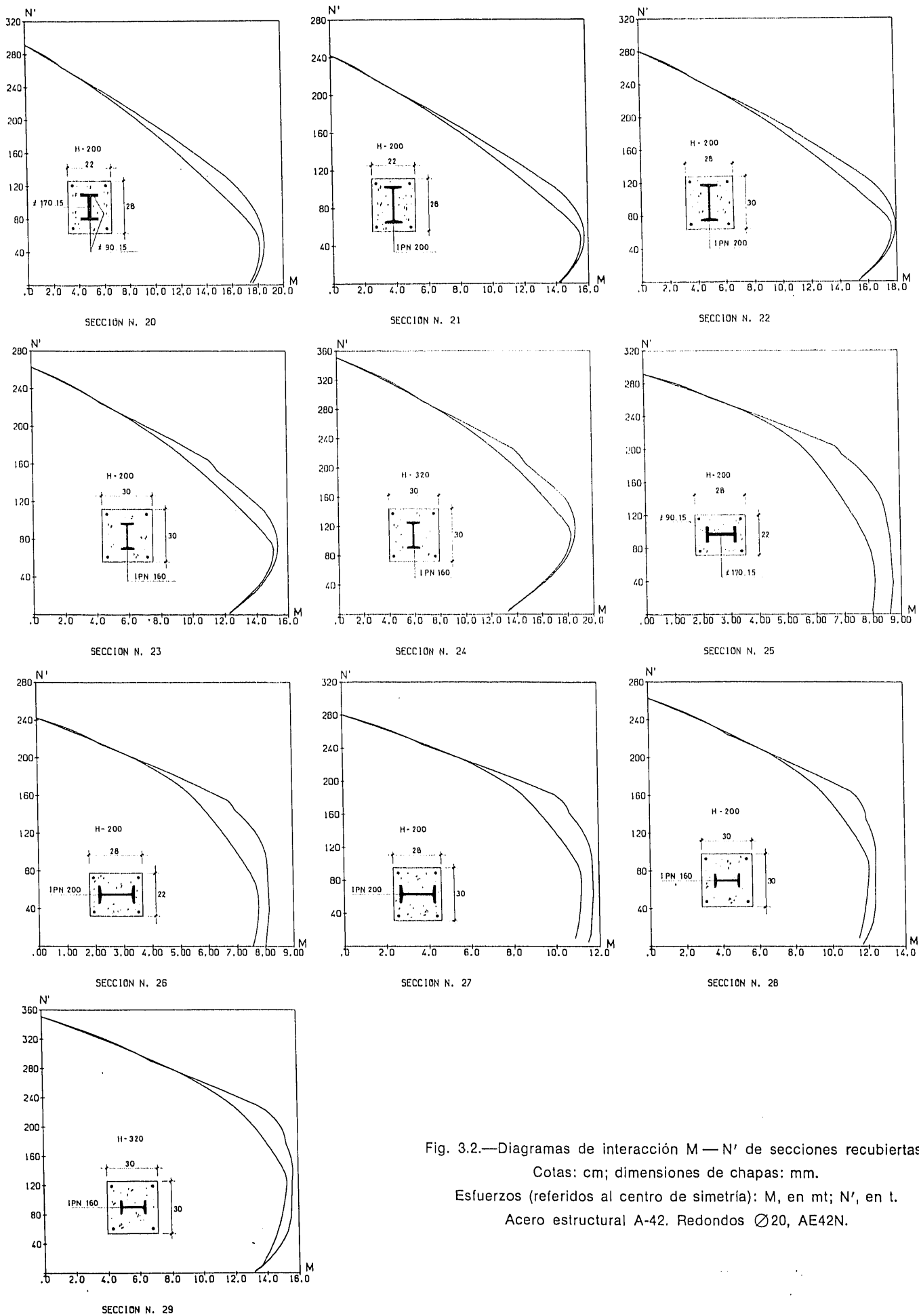


Fig. 3.2.—Diagramas de interacción M—N' de secciones recubiertas.

Cotas: cm; dimensiones de chapas: mm.

Esfuerzos (referidos al centro de simetría): M, en mt; N', en t.

Acero estructural A-42. Redondos $\varnothing 20$, AE42N.

ANÁLISIS AVANZADO DE ESTRUCTURAS MIXTAS

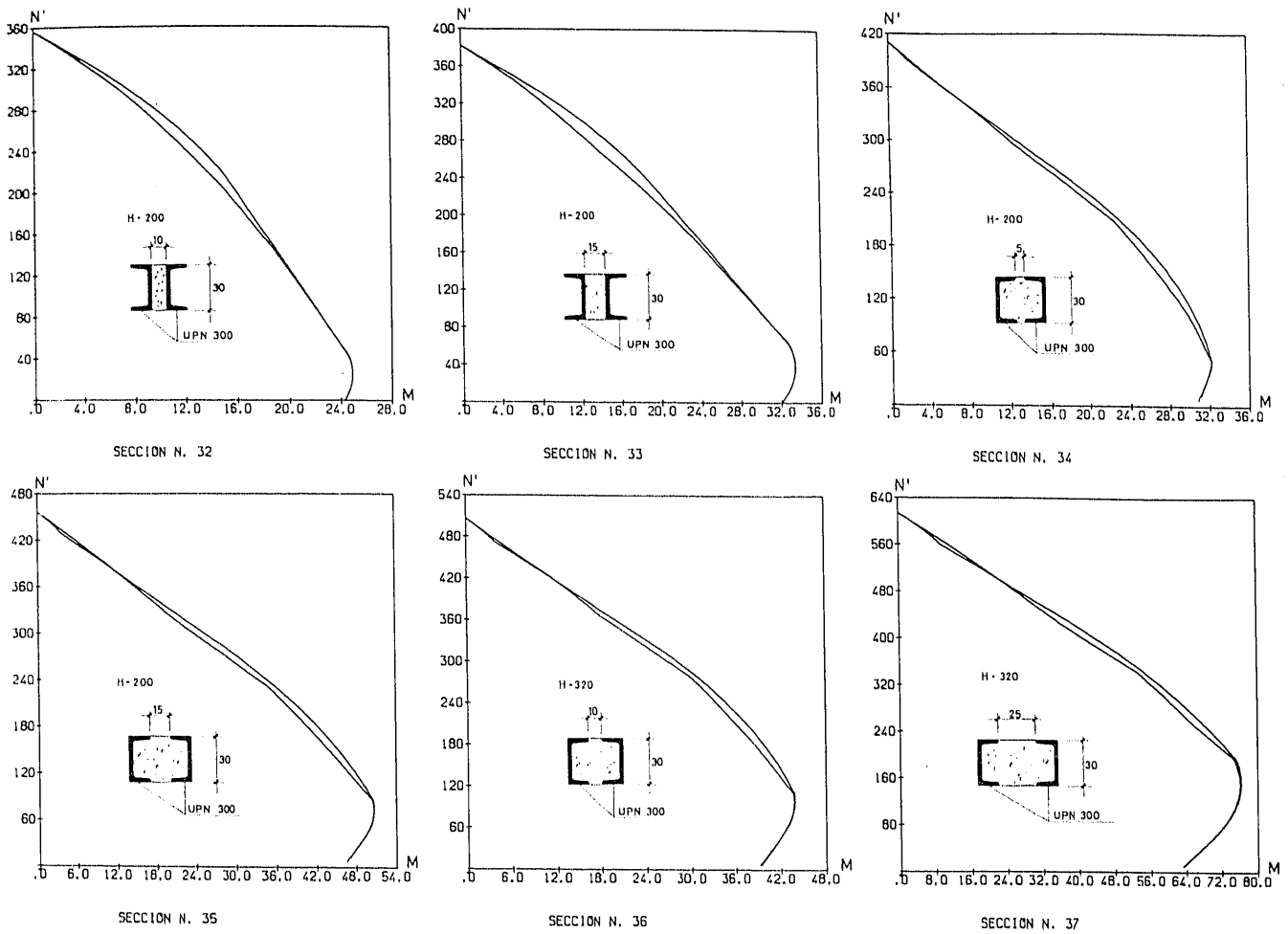


Fig. 3.3.—Diagramas de interacción M—N' de secciones abiertas.

Cotas: cm; dimensiones de chapas: mm; acero A-42.

Esfuerzos (referidos al centro de simetría): M, en mt; N', en t.

vicio se limita en general a controlar adecuadamente que no se produzcan plastificaciones de los materiales en tal situación, si bien incluso este control llega en ocasiones a omitirse (aceptación de plastificaciones parciales), en piezas de pequeña luz con cargas moderadas y predominantemente estáticas.

- Estimación de movimientos de las piezas en situaciones constructivas y de servicio (limitación de flechas, determinación de recorridos de dispositivos de apoyo, contraflechas de ejecución, etc.).

Como puede apreciarse, estas comprobaciones no son generalmente las de mayor importancia o responsabilidad (*), por lo cual es práctica muy

(*) Naturalmente, puede haber excepciones a esta afirmación. Por ejemplo, el caso de secciones esbeltas en las cuales la distribución tensional "elástica" sirve de base para el control de inestabilidad de chapas; secciones en las que deba comprobarse el estado límite de fatiga, etc.

extendida proceder a su verificación según el conocido método de la "sección ideal de acero", tras una simple corrección del coeficiente de equivalencia n_p , en orden a reproducir de modo aproximado el aumento de la deformabilidad efectiva del hormigón debido a la fluencia de este material.

En realidad, la consideración rigurosa de la fluencia del hormigón dentro de una sección mixta exige tener en cuenta la variación a lo largo del tiempo de la tensión en las fibras de dicho material, debida a la transferencia de esfuerzos internos hacia el acero estructural, cuya rigidez efectiva no se ve afectada por efectos de deformabilidad diferida, produciéndose a causa de ello una redistribución tensional entre ambos materiales. Estas variaciones tensionales en el hormigón a lo largo del tiempo no son en absoluto despreciables en la mayoría de las piezas mixtas, lo cual implica que su análisis riguroso debería efectuarse conforme a la teoría de la fluencia del hormigón bajo sollicitación variable. Ello resulta especialmente penoso si se aplican los más recientes modelos

viscoelásticos para dicho material, que incluyen conjuntamente un comportamiento "plástico diferido" (dependiente de la edad del hormigón) y una respuesta "elástica diferida" (invariante frente a cambios del origen de tiempos), lo cual determina formulaciones más complejas que las ecuaciones diferenciales que regían el comportamiento de las secciones mixtas en el modelo de Sattler-Dischinger, basado en el carácter exclusivamente "plástico diferido" de la fluencia del hormigón, y ya de por sí notablemente complicado y de trabajosa aplicación práctica.

Desde el punto de vista práctico, esta dificultad puede obviarse mediante el procedimiento aproximado desarrollado en la obra "Construcción mixta", cuyo propósito es el de mantener la simplicidad y claridad operativas del método de la sección ideal, pero en base a una elección "adecuada" del coeficiente de equivalencia del hormigón en cada caso. Incluso en las piezas o estructuras que requieran una determinación especialmente afinada de tensiones y movimientos en fases constructivas y de servicio, la utilización de este método puede estar perfectamente indicada (*), sobre todo en el caso más usual de existir amplios márgenes de incertidumbre acerca de los parámetros deformativos diferidos del hormigón, que pueden convertir en ilusoria cualquier pretensión de mayor exactitud mediante el empleo de métodos de cálculo más complejos que el propuesto.

El concepto fundamental de este método simplificado es el de coeficiente de fluencia "aparente", cuya utilización permite reducir el problema de la fluencia del hormigón bajo tensión variable al de fluencia bajo tensión constante. La deducción de estos coeficientes de fluencia aparentes, basados en el modelo de fluencia que combina términos elásticos diferidos y plásticos diferidos, resulta un tanto complicada y extensa, pero su utilización práctica es directa e inmediata, en base a los resultados expuestos en el apartado III.3 de la obra "Construcción mixta", cuya deducción puede seguirse en los apartados II.4.5 y III.3.1 de la misma.

La expresión genérica del coeficiente de fluencia aparente es del tipo $\varphi_{l, ap} = \psi_l \varphi_l$, o bien, con distinta notación, $\varphi_{ap}(t, t_0) = \psi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)$, siendo t_0 la edad del hormigón en el instante de puesta en carga, t la edad en el instante de medida de la deformación de dicho material, φ_l o $\varphi(t, t_0)$ el coeficiente "ordinario" de fluencia, definido para tensión σ'_{rc} constante en el intervalo (t_0, t) , y ψ_l o $\psi(t, t_0)$ un factor de ajuste dependiente de las variables t_0 y t y de la "forma" de la ley $\sigma'_{rc}(\tau)$ en el intervalo $t_0 < \tau < t$, es decir, del tipo de variación temporal de la tensión aplicada al hormigón. Suponiendo conocido el coeficiente $\varphi_{l, ap}$, la defor-

mación de fluencia ε'_{rc} en el instante t se expresa a partir de $\sigma'_{rc}(t)$ como si la tensión hubiera sido constante en todo el intervalo (t_0, t) e igual a $\sigma'_{rc}(t)$: $\varepsilon'_{rc}(t) = \sigma'_{rc}(t) \varphi_{l, ap} / E_{rc, 28}$. La función $\varphi_{l, ap}(t, t_0)$ no es, evidentemente, una característica intrínseca del material, puesto que depende del tipo de proceso de carga, pero en determinados problemas prácticos es factible efectuar a priori hipótesis razonables acerca de la forma de la ley de variación temporal de σ'_{rc} , quedando fijadas de este modo ψ_l y $\varphi_{l, ap}$, con lo cual el tratamiento operativo de la fluencia del hormigón se hace considerablemente más sencillo que lo que exigiría la consideración, sin más, de su ecuación constitutiva.

En la citada obra "Construcción mixta" (C.M.) el coeficiente ψ_l se formula explícitamente para el caso de variación de σ'_{rc} proporcional a la j -ésima potencia de φ_l , siendo j un número entero positivo: $\sigma'_{rc}(t) = k \varphi_l^j$; en base a los respectivos ψ_l , denominados ψ_{jl} , resulta posible abordar problemas en los cuales $\sigma'_{rc}(t)$ se supone afín a una combinación lineal de un número finito de potencias de φ_l (expresión polinómica en φ_l).

La determinación explícita de ψ_{jl} se efectúa en dicha obra a través de ciertas simplificaciones de validez probada en determinados casos particulares, pero de carácter sólo aproximado en general. Concretamente, esto es así para la fórmula de interpolación II.4.5.37:

$$(a) \quad \psi_{jl} = \frac{\varphi_{d\infty}}{\varphi_{\infty}} \psi_{jdl} + \frac{\varphi_{f\infty}^*}{\varphi_{\infty}} \psi_{jfl}$$

siendo ψ_{jdl} y ψ_{jfl} las expresiones de ψ_{jl} deducidas respectivamente en la hipótesis de fluencia elástica diferida, $\varphi_l = \varphi_d(t, t_0)$, y de fluencia plástica, $\varphi_l = \varphi_f(t, t_0)$; y siendo $\varphi_{d\infty}$, $\varphi_{f\infty}^*$ y $\varphi_{\infty} = \varphi_{d\infty} + \varphi_{f\infty}^*$ los valores finales asintóticos (para $t \rightarrow \infty$) de $\varphi_d(t, t_0)$, $\varphi_f(t, t_0)$ y de $\varphi_l = \varphi_d(t, t_0) + \varphi_f(t, t_0)$.

En este trabajo se ha abordado la resolución numérica, en miniordenador, de varios problemas sencillos de fluencia, y se han comparado los resultados obtenidos con los deducidos aplicando los respectivos coeficientes de fluencia aparentes teóricos; más concretamente, a partir de las deformaciones de fluencia $\varepsilon'_{rc}(t)$ calculadas numéricamente, se ha despejado ψ_l de la expresión $\varepsilon'_{rc}(t) = \sigma'_{rc}(t) \psi_l \varphi_l / E_{rc, 28}$ y se han comparado los valores de ψ_l así obtenidos con los valores teóricos del mismo coeficiente. Ello ha permitido comprobar la aceptable bondad de estos valores teóricos, cuyos errores máximos observados han sido poco significativos frente a los restantes aspectos de incertidumbre, teóricos y prácticos, que presenta el fenómeno de la fluencia del hormigón; no obstante, en este mismo trabajo se han contrastado otras fórmulas de interpolación diferentes de

(*) Con alguna variante o mejora, tal como la subdivisión de la sección parcial de hormigón en sucesivas franjas con distinto coeficiente de equivalencia.

ANÁLISIS AVANZADO DE ESTRUCTURAS MIXTAS

(a) que, manteniendo sustancialmente su sencillez, permiten aproximarse aún más a los valores "exactos" de los coeficientes ψ_{jt} .

Se ha efectuado la obtención numérica de $\epsilon'_{c,c}(t)$ para leyes de tensiones del tipo $\sigma'_{c,c}(\tau) = \varphi^j(\tau, t_0)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, empleando la ecuación discretizada II.4.5.12 (C.M., pág. 92), la cual, teniendo en cuenta que $\sigma'_{c,c}(t_0) = 0$ para las leyes citadas,

proporciona $\epsilon'_{c,c} = \sum_{i=1}^m \varphi(t, t_i) \Delta \sigma'_{c,c} / E_{c,28i}$; igualando $\epsilon'_{c,c}$ a $\sigma'_{c,c}(t) \cdot \psi_{jt} \cdot \varphi_t / E_{c,28}$ y despejando ψ_{jt} ,

resulta $\psi_{jt} = \frac{1}{\varphi^{j+1}(t, t_0)} \sum_{i=1}^m \varphi(t, t_i) \Delta \sigma'_{c,c}$. Introduciendo explícitamente los incrementos tensionales $\Delta \sigma'_{c,c}$, esta última fórmula se escribe:

$$(b) \quad \psi_j(t, t_0) = \frac{1}{\varphi^{j+1}(t, t_0)} \sum_{i=1}^m \varphi(t, t_i) \cdot [\varphi^j(t_i, t_0) - \varphi^j(t_{i-1}, t_0)],$$

siendo $t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_m = t$; en el programa de cálculo se han adoptado incrementos de tiempo día a día, es decir, $t_i = t_0 + i$, $1 \leq i \leq m$.

Evidentemente la expresión discretizada (b) proporciona el coeficiente ψ_{jt} para cualquier expresión o definición numérica del coeficiente de fluencia. Puede verse que dicha expresión es consistente con la fórmula II.4.5.29 (C.M., pág. 94) sin más que integrar por partes la integral que figura en esa fórmula, lo cual conduce a:

$$(c) \quad \psi_j(t, t_0) = \frac{1}{\varphi^{j+1}(t, t_0)} \cdot \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi^j(\tau, t_0)] d\tau$$

Los valores de ψ_{jt} obtenidos numéricamente por el programa en la forma indicada, se han comparado con los valores teóricos proporcionados por las expresiones II.4.5.30-33-34-37 (C.M., páginas 95 y 96) en los casos $j = 1, 2, 3$.

Para $\varphi(t, t_0)$ se ha adoptado la siguiente expresión teórica:

$$\varphi(t, t_0) = 0,4 \cdot [1 - e^{-0,02(t-t_0)}] + \varphi_{f,\infty} \cdot \left(\frac{t - t_0}{t + \delta_{c,2} - t_0 + \delta_{c,2}} \right)$$

(C.M., II.4.4.3-5-6 con $\varphi_{d,\infty} = 0,4$ y $\delta_{c,1} = 0,02$ días⁻¹), efectuando varias hipótesis acerca de los valores de los parámetros de fluencia plástica,

a fin de considerar diversas relaciones entre fluencia plástica y elasticidad diferida:

- I) $\varphi_{f,\infty} = 1,43$, $\delta_{c,2} = 266$ días
- II) $\varphi_{f,\infty} = 2,70$, $\delta_{c,2} = 120$ días
- III) $\varphi_{f,\infty} = 4,35$, $\delta_{c,2} = 43$ días

Asimismo, se han adoptado tres intervalos temporales distintos (días):

$$(t_0, t) = (20,100), (20,400) \text{ y } (20,900)$$

En la tabla 4.1 se indican las diferencias porcentuales obtenidas entre los valores ψ_{jt} calculados numéricamente y los ψ_{jt} teóricos, con signo negativo cuando los primeros resultan mayores que los segundos. A la vista de dicha tabla, los errores obtenidos pueden calificarse de moderados (máximo 19,5 por 100 y medio 10 por 100). No obstante, se ha encontrado que estos errores pueden disminuirse adoptando las fórmulas de interpolación siguientes, sustitutivas de (a):

$$(d) \quad \psi_{jt} = \frac{\varphi_d(t, t_0)}{\varphi(t, t_0)} \psi_{jdt} + \frac{\varphi_f(t, t_0)}{\varphi(t, t_0)} \psi_{jft}$$

$$(e) \quad \psi_{jt} = \frac{\varphi_d(\bar{t}, t_0)}{\varphi(\bar{t}, t_0)} \psi_{jdt} + \frac{\varphi_f(\bar{t}, t_0)}{\varphi(\bar{t}, t_0)} \psi_{jft}$$

$$\text{siendo } \bar{t} = \frac{1}{2} (t_0 + t).$$

TABLA 4.1.—Errores en ψ_{jt} con la fórmula de interpolación (a).

| Caso | $\varphi_{d,\infty}$ | $\varphi_{f,\infty}$ | t_0 (días) | t (días) | Error en ψ_1 (%) | Error en ψ_2 (%) | Error en ψ_3 (%) |
|------|----------------------|----------------------|-----------------|-------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| I | 0,4 | 1,43 | 20 | 100 | -11,7 | -16,5 | -19,0 |
| | | | 20 | 400 | -14,3 | -18,5 | -19,5 |
| | | | 20 | 900 | -12,7 | -16,3 | -17,3 |
| II | 0,4 | 2,70 | 20 | 100 | -5,7 | -8,4 | -9,8 |
| | | | 20 | 400 | -7,3 | -10,0 | -10,9 |
| | | | 20 | 900 | -6,8 | -9,4 | -10,4 |
| III | 0,4 | 4,35 | 20 | 100 | -3,5 | -5,4 | -6,5 |
| | | | 20 | 400 | -4,7 | -6,8 | -7,6 |
| | | | 20 | 900 | -4,5 | -6,5 | -7,5 |

ANÁLISIS AVANZADO DE ESTRUCTURAS MIXTAS

TABLA 4.2.—Errores en ψ_{j1} con la fórmula de interpolación (d).

| Caso | $\varphi_{d\infty}$ | $\varphi_{f\infty}$ | t_0 (días) | t (días) | Error en ψ_1 (%) | Error en ψ_2 (%) | Error en ψ_3 (%) |
|------|---------------------|---------------------|-----------------|-------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| I | 0,4 | 1,43 | 20 | 100 | -0,3 | 0,8 | 2,1 |
| | | | 20 | 400 | -6,4 | -5,9 | -3,4 |
| | | | 20 | 900 | -8,9 | -10,1 | -9,4 |
| II | 0,4 | 2,70 | 20 | 100 | -0,2 | 0,5 | 1,3 |
| | | | 20 | 400 | -3,8 | -4,0 | -2,8 |
| | | | 20 | 900 | -5,3 | -6,7 | -6,8 |
| III | 0,4 | 4,35 | 20 | 100 | -0,1 | 0,3 | 0,8 |
| | | | 20 | 400 | 2,5 | -2,8 | -2,1 |
| | | | 20 | 900 | -3,5 | -4,7 | -5,0 |

TABLA 4.3.—Errores en ψ_{j1} con la fórmula de interpolación (e).

| Caso | $\varphi_{d\infty}$ | $\varphi_{f\infty}$ | t_0 (días) | t (días) | Error en ψ_1 (%) | Error en ψ_2 (%) | Error en ψ_3 (%) |
|------|---------------------|---------------------|-----------------|-------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| I | 0,4 | 1,43 | 20 | 100 | 1,7 | 3,8 | 5,8 |
| | | | 20 | 400 | -0,9 | 2,9 | 7,8 |
| | | | 20 | 900 | -5,6 | -4,8 | -2,6 |
| II | 0,4 | 2,70 | 20 | 100 | 0,9 | 2,2 | 3,4 |
| | | | 20 | 400 | -0,9 | 0,9 | 3,7 |
| | | | 20 | 900 | -3,7 | -4,7 | -3,3 |
| III | 0,4 | 4,35 | 20 | 100 | 0,5 | 1,3 | 2,1 |
| | | | 20 | 400 | -0,6 | 0,6 | 2,5 |
| | | | 20 | 900 | -2,5 | -3,0 | -2,6 |

Los errores correspondientes a ambas fórmulas de interpolación se indican respectivamente en las tablas 4.2 y 4.3. La fórmula (d) aparece como más adecuada para intervalos de tiempos cortos, y la (e) para intervalos medios y largos; adoptando una u otra fórmula según dicho criterio, los errores máximos previsibles son del orden del 5 por 100.

Finalmente, se ha procedido con el mismo programa a la determinación numérica de la deformación de fluencia ϵ'_{cc} correspondiente a una variación de σ'_c lineal con el tiempo, $\sigma'_c(\tau) = c(\tau - t_0)$, con $c = \text{cte} = 1$, y se ha comparado dicho valor de ϵ'_{cc} con el valor teórico obtenido ajustando

$\sigma'_c(t)$ en forma polinómica, $\sigma'_c(\tau) \simeq \sum_{j=0}^n k_j \varphi_j^j \tau$,

y utilizando para cada término de este desarrollo el correspondiente coeficiente aparente de fluencia (C.M., pág. 94):

$$(f) \quad \epsilon'_{cc}(t) = \frac{1}{E_{c,28}} \sum_{j=0}^n k_j \psi_{j1} \varphi_j^{j+1}$$

Este estudio se ha realizado para el caso II ($\varphi_{d\infty} = 0,4$, $\varphi_{f\infty} = 2,70$) y para el intervalo temporal $t_0 = 20$ días, $t = 400$ días. Las constantes k_j se ha determinado por acople puntual de $\tau - t_0$ a la expresión polinómica de $\sigma'_c(\tau)$ para los instantes $\tau = t_0$, $\tau = t$ y $n - 1$ instantes adicionales intermedios.

Se ha efectuado este ajuste con $n = 3$, habiéndose obtenido $k_0 = 0$, $k_1 = 443,4$, $k_2 = -522,2$ y $k_3 = 189,9$; es decir, como aproximación polinómica en $\varphi\tau$ de $\sigma'_c(\tau)$ en el intervalo $t_0 < \tau < t$, se ha adoptado:

$$(g) \quad \sigma'_c(\tau) \simeq 443,4 \varphi\tau - 522,2 \varphi^2\tau + 189,9 \varphi^3\tau$$

Con lo cual, el valor aproximado de $\epsilon'_{cc}(t)$ es:

$$(h) \quad \epsilon'_{cc}(t) \simeq \frac{1}{E_{c,28}} (443,4 \psi_{11} \varphi^2 t - 522,2 \psi_{21} \varphi^3 t + 189,9 \psi_{31} \varphi^4 t)$$

La diferencia entre el resultado de aplicar esta fórmula para $t = 400$ días y el valor de $\epsilon'_{cc}(400)$ determinado numéricamente es de un 17 por 100, resultado satisfactorio si se tiene en cuenta la poca adecuación de una ley lineal $\sigma'_c(\tau) = \tau - t_0$ para ser aproximada mediante combinaciones de términos en φ^j , y el relativamente escaso número de potencias de φ consideradas (*).

Ello confirma de nuevo la bondad de los coeficientes de fluencia aparentes teóricos, y permite suponer una buena adecuación de los mismos para el estudio de muchos problemas prácticos en que la fluencia del hormigón se desarrolla bajo tensiones $\sigma'_c(t)$ mucho más adecuadas para ser representadas de forma polinómica en φ , que la ley lineal con t antes considerada, por existir generalmente un término de tensión constante (k_0) claramente dominante, y por evolucionar la componente variable de σ'_c de forma afín a φ (rápido crecimiento inicial, tendencia asintótica a un límite finito para $t \rightarrow \infty$), lo cual permite generalmente representar $\sigma'_c(t) \simeq k_0 + k_1 \varphi + k_2 \varphi^2 + \dots$ con un número muy limitado de términos.

(*) Como comprobación del carácter decreciente del error con "n", se ha efectuado un cálculo análogo de ϵ'_{cc} con $n = 1$ y $n = 2$, habiéndose obtenido, respectivamente, errores del 53 y 27 por 100 ($> 17\%$), con lo cual se aprecia claramente que la exactitud aumenta con el número de términos del polinomio en φ .