

# Periodicidad de las precipitaciones atmosféricas caídas sobre España Peninsular<sup>(\*)</sup>

Por ANTONIO LECHUGA ALVARO

Ingeniero de Caminos, C. y P.

*El presente trabajo establece un método de cálculo de las tendencias cíclicas de las precipitaciones atmosféricas, usando los útiles del llamado Análisis Espectral o Análisis de Fourier.*

## 1. INTRODUCCION

El objeto de este trabajo es establecer la posible periodicidad de las precipitaciones atmosféricas caídas sobre el conjunto de las cuencas vertientes en las que podemos dividir la España Peninsular.

Naturalmente, la periodicidad se manifestaría por una cierta tendencia cíclica, dentro de la variabilidad aleatoria de la serie en el período de tiempo considerado.

Desde hace bastantes años, se ha señalado una influencia indudable de la actividad solar sobre los fenómenos atmosféricos, lo cual ha llevado a considerar en las publicaciones meteorológicas el número relativo Wolf-Wolfer de manchas solares, como indicativo de esta actividad. Ya que existe una cierta periodicidad en este número, es de esperar que exista este mismo carácter cíclico en el caso de las precipitaciones atmosféricas. Esta periodicidad se pondrá más de manifiesto, considerando cantidades totales de precipitación anual, caídas en áreas extensas, con lo cual se elimina la dispersión espacial.

El conocimiento de las frecuencias o períodos de las precipitaciones caídas en el área peninsular es importante para un mejor conocimiento de nuestros recursos hídricos, y, en consecuencia, un uso más adecuado de los mismos. Téngase presente que, en estos momentos, uno de los más acuciantes problemas a nivel mundial es precisamente el agua, como quedó establecido en la Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Agua (Mar del Plata (Argentina), marzo de 1977).

El estudio de las tendencias cíclicas servirá igualmente para establecer modelos globales de simulación de aportaciones para los diferentes usos del agua: Abastecimiento de poblaciones, energía hidroeléctrica, riegos, etc.

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de octubre de 1979.

## 2. ANALISIS ESPECTRAL

El método matemático que usaremos para determinar la existencia y valores de los diferentes períodos o frecuencias de una serie temporal, es el llamado Análisis Espectral o Análisis de Fourier, que exponemos a continuación:

Dada una función real del tiempo, que escribiremos,  $f(t)$ , su transformada de Fourier la podemos expresar como:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

Análogamente, la transformada inversa de Fourier,  $\mathcal{F}^{-1}$ , como:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \cdot e^{j\omega t} dw \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) se llaman par de transformadas de Fourier.

La condición suficiente para la existencia de  $F(w)$  es que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3)$$

Para las funciones que no cumplan la condición anterior, tales como la función impulso:  $\delta(t)$  y sus derivadas, así como las periódicas,  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ , etc., se define la transformada de Fourier de la función generalizada  $f(t)$ ,  $F(w) = \mathcal{F}[f(t)]$ , que cumpla la relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \varnothing(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \mathcal{O}(x) dx \quad (4)$$

siendo  $\mathcal{O}(w) = \mathcal{F}[\varnothing(t)]$ , la transformada de Fourier de una función de prueba  $\varnothing(t)$ .

De este modo es posible calcular la transformada de Fourier de la función impulso  $\delta(t)$ , del escalón unitario  $u(t)$ , de las funciones periódicas, etcétera, véase la referencia [1].

En la ecuación (2), vemos que  $\frac{1}{2\pi} |F(w)|^2 dw$

representa la magnitud infinitesimal de un armónico de frecuencia angular  $w$ ; es por ello, que la gráfica de  $|F(w)|$ , se denomina espectro continuo y a  $|F(w)|$ , espectro de magnitud de  $f(t)$ .

Si definimos la función de autocorrelación,  $R_{11}(\tau)$  como:

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t - \tau) dt \quad (5)$$

se demuestra que la transformada de Fourier de  $R_{11}$

$$\mathfrak{F}[R_{11}(\tau)] = |F(w)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) \cdot e^{jw\tau} d\tau \quad (6)$$

que se conoce con el teorema de Wiener-Khintchine, véase referencia [1].

Si en (6) hacemos  $\tau = 0$ , y teniendo en cuenta (5) obtenemos:

$$R_{11}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \quad (7)$$

igualdad que constituye el teorema de Parseval, y que nos dice que el valor cuadrático medio de una función temporal  $f(t)$ , "la energía", es proporcional a la integral de  $|F(w)|^2$  por lo que  $S_{11}(w) = |F(w)|^2$  se conoce como DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGIA.

Para funciones periódicas la función de autocorrelación se define como:

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot f(t - \tau) dt \quad (8)$$

e igualmente:

$$|F(w)|^2 = \frac{1}{T} \mathfrak{F}[\bar{R}_{11}(\tau)] \quad (9)$$

con estas definiciones se sigue cumpliendo el teorema de Wiener-Khintchine.

La densidad espectral  $|F(w)|^2$  nos indicará la importancia relativa de cada período, y es, por tanto, fundamental en nuestro análisis, ya que nos permitirá conocer, no sólo los valores de los dife-

rentes períodos, sino también el "contenido de energía" de cada uno de ellos, es decir, el área bajo cada uno de los máximos relativos de  $|F(w)|^2$ , lo que nos señalará el peso relativo entre cada dos frecuencias o períodos.

El estudio de la función  $|F(w)|^2$  nos permitirá ver si la energía está concentrada o no alrededor de cada máximo, lo cual indica que la tendencia cíclica está más o menos marcada.

### 3. METODOLOGIA

Si tenemos una sucesión de  $N$  datos  $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$  podemos obtener de ella una función generalizada del tiempo en la forma siguiente:

$$f_r(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \delta(t - k) \quad (10)$$

siendo  $\delta(t - k)$  la función impulso o delta de Dirac.

Para que la transformada de Fourier no tenga partes imaginarias, consideraremos que la serie de valores  $a_k$  se extiende para valores negativos de  $k$ , tal que  $a_{-k} = a_k$ ; con esto hemos definido una función par en la forma:

$$f_0(t) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_k \cdot \delta(t - k) = f_0(-t) \quad (11)$$

La transformada de Fourier de  $f_0(t)$  tiene como valor:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f_0(t)] = F_0(w) &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_k \cdot e^{-jw \cdot k} = \\ &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \cos kw \end{aligned} \quad (12)$$

La función  $f_0(t)$  se anula para valores de  $a_k$  tales que,  $k > N$ , y su transformada es, como hemos visto,  $F_0(w)$ .

La dificultad conceptual que representa la limitación de valores de  $a_k$  puede obviarse haciendo una extensión periódica de dicha función  $f_0(t)$ , cuyo período sería  $T = 2N - 2$ . La transformada de Fourier de esta función  $f(t)$  se escribe:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f(t)] = F(w) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot F_0(n \cdot w_0) \cdot \\ &\cdot \delta(w - n \cdot w_0), \quad w_0 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (13)$$

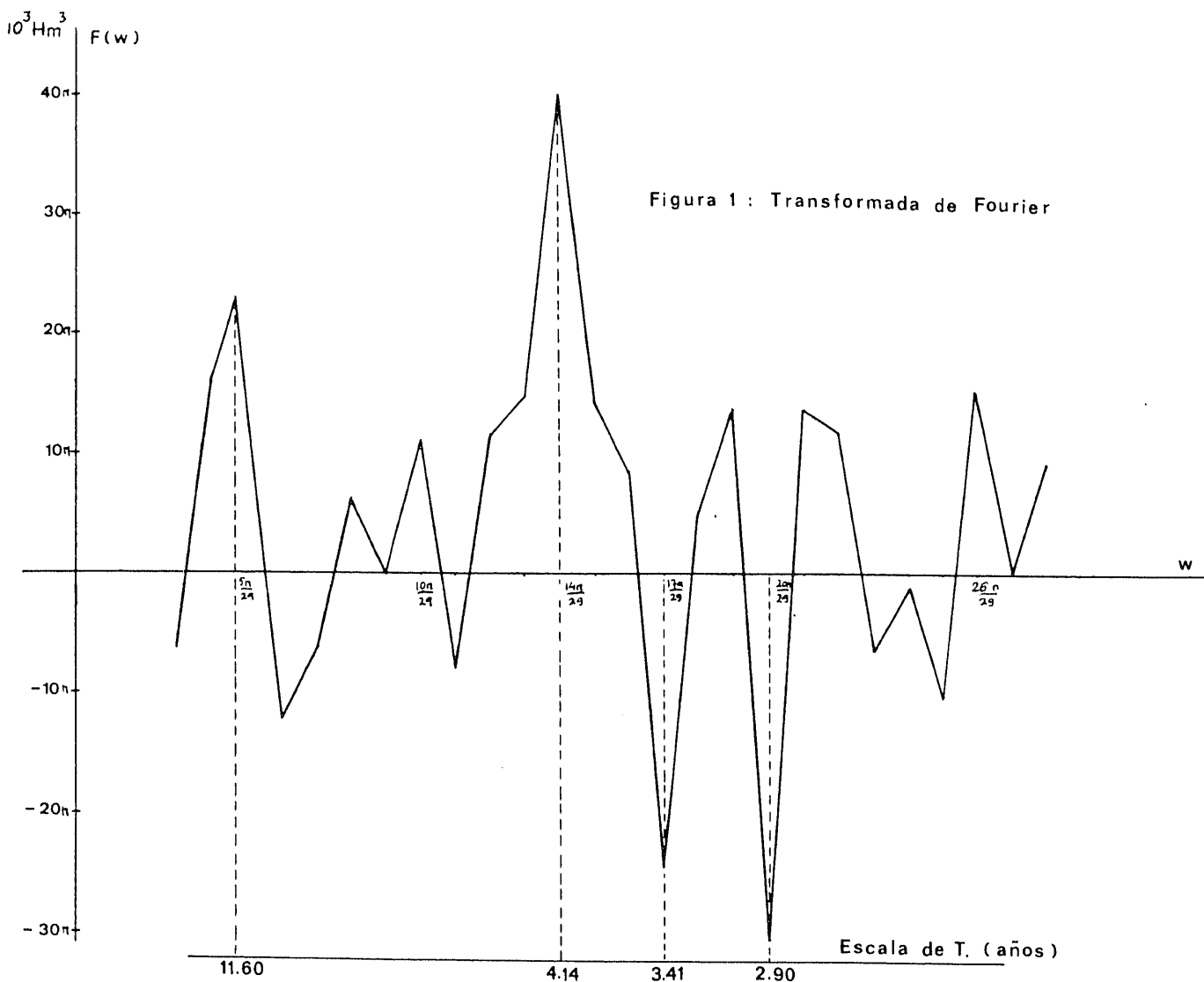


Figura 1 : Transformada de Fourier

y sustituyendo  $F_n(n \cdot w_n)$  por su valor dado por (11) obtenemos:

$$F(w) = \frac{4\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos \left( kn \cdot \frac{2\pi}{T} \right) \cdot \delta \left( w - n \cdot \frac{2\pi}{T} \right) \quad (14)$$

Vemos que la transformada de Fourier  $F(w)$  dada por (14) es, salvo la constante  $\frac{2\pi}{T}$ , la misma función  $F_n(w)$ , sólo que "discretizada" para los valores  $n \cdot \frac{2\pi}{T}$ ; usaremos, por tanto, esta expresión para obtenerla gráficamente.

#### 4. DATOS DE PARTIDA Y RESULTADOS NUMERICOS

Como datos de partida, obtenidos del Calendario Meteoro-Fenológico 1978 del S.M.N., hemos tomado los volúmenes en hectómetros cúbicos de precipitación atmosférica caídos sobre la España Peninsular en los años 1947 a 1976, es decir, treinta años.

En la publicación del S.M.N.: Las series más largas de observaciones en la península ibérica, Serie D-1 figuran muchos más años que los empleados en este estudio, pero no viene el volumen total de precipitación, por lo que no hemos podido utilizar una serie más larga, lo cual hubiera sido deseable en cuanto a precisión de los resultados. Ordenados los datos:

# PERIODICIDAD DE PRECIPITACIONES ATMOSFERICAS CAIDAS SOBRE ESPAÑA

Años	Precip.	Años	Precip.	Años	Precip.
1947	378723	1957	308149	1967	283879
1948	304287	1958	359918	1968	306479
1949	267624	1959	430868	1969	422394
1950	251890	1960	479179	1970	279404
1951	387268	1961	359899	1971	366421
1952	324981	1962	361806	1972	386835
1953	264129	1963	444475	1973	258517
1954	251943	1964	287126	1974	284723
1955	394355	1965	339943	1975	304356
1956	343096	1966	363754	1976	353054

Media 30 años: 338328.

Para facilitar los cálculos, en vez de los ante-

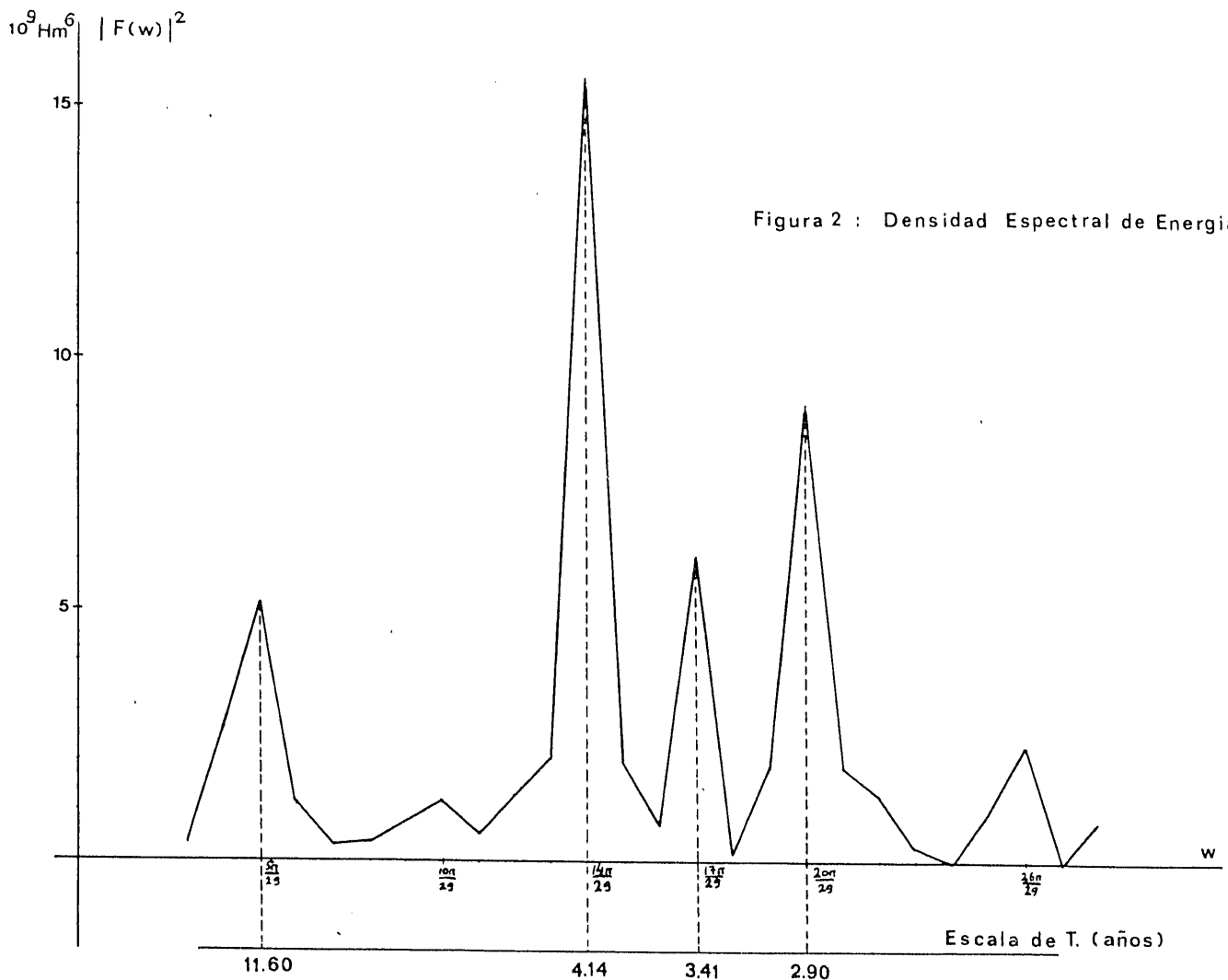
riores valores  $x_k$  usaremos  $a_k = x_k - \bar{x}$ , es decir, las desviaciones respecto a la media. Esto último deja invariable el valor de  $F(w)$  dado por (14) salvo en  $w = 0$ :

$$F(0) = 0 \text{ si empleamos } a_k.$$

$$F(0) = 2\pi \cdot \bar{x} \text{ si empleamos } x_k.$$

Al partir de una serie limitada de valores, los períodos significativos en nuestro estudio no podrán exceder de un valor próximo al número total de términos.

Ordenados los cálculos por columnas, obtenemos los sucesivos valores de  $F(w)$  y de  $|F(w)|^2$  tal y como aparecen tabulados a continuación:



# PERIODICIDAD DE PRECIPITACIONES ATMOSFERICAS CAIDAS SOBRE ESPAÑA

w	F(w)	w	F(w)	w	F(w)
0	0	$\frac{29}{10\pi}$	11199,4 $\pi$	$\frac{29}{20\pi}$	30377,0 $\pi$
$\frac{1\pi}{29}$	3625,4 $\pi$	$\frac{11\pi}{29}$	7688,4 $\pi$	$\frac{21\pi}{29}$	13891,2 $\pi$
$\frac{2\pi}{29}$	36952,0 $\pi$	$\frac{12\pi}{29}$	11643,2 $\pi$	$\frac{22\pi}{29}$	11838,2 $\pi$
$\frac{3\pi}{29}$	6156,6 $\pi$	$\frac{13\pi}{29}$	14739,2 $\pi$	$\frac{23\pi}{29}$	6236,6 $\pi$
$\frac{4\pi}{29}$	16452,4 $\pi$	$\frac{14\pi}{29}$	39854,6 $\pi$	$\frac{24\pi}{29}$	1231,2 $\pi$
$\frac{5\pi}{29}$	22869,0 $\pi$	$\frac{15\pi}{29}$	14392,6 $\pi$	$\frac{25\pi}{29}$	10062,4 $\pi$
$\frac{6\pi}{29}$	12000,8 $\pi$	$\frac{16\pi}{29}$	8686,0 $\pi$	$\frac{26\pi}{29}$	15387,4 $\pi$
$\frac{7\pi}{29}$	5933,0 $\pi$	$\frac{17\pi}{29}$	24325,4 $\pi$	$\frac{27\pi}{29}$	342,2 $\pi$
$\frac{8\pi}{29}$	6358,2 $\pi$	$\frac{18\pi}{29}$	4950,4 $\pi$	$\frac{28\pi}{29}$	9396,4 $\pi$
$\frac{9\pi}{29}$	231,2 $\pi$	$\frac{19\pi}{29}$	13896,4 $\pi$	$\frac{29\pi}{29}$	18767,0 $\pi$

w	F(w)  <sup>2</sup>	w	F(w)  <sup>2</sup>	w	F(w)  <sup>2</sup>
0	0	$\frac{10\pi}{29}$	1237,9	$\frac{20\pi}{29}$	9107,3
$\frac{1\pi}{29}$	129,7	$\frac{11\pi}{29}$	583,4	$\frac{21\pi}{29}$	1904,5
$\frac{2\pi}{29}$	1347,6	$\frac{12\pi}{29}$	1338,0	$\frac{22\pi}{29}$	1383,2
$\frac{3\pi}{29}$	374,1	$\frac{13\pi}{29}$	2144,1	$\frac{23\pi}{29}$	383,9
$\frac{4\pi}{29}$	2671,5	$\frac{14\pi}{29}$	15676,8	$\frac{24\pi}{29}$	15,0
$\frac{5\pi}{29}$	5161,7	$\frac{15\pi}{29}$	2044,5	$\frac{25\pi}{29}$	999,3
$\frac{6\pi}{29}$	1424,4	$\frac{16\pi}{29}$	744,6	$\frac{26\pi}{29}$	2336,8
$\frac{7\pi}{29}$	347,4	$\frac{17\pi}{29}$	5840,1	$\frac{27\pi}{29}$	1,2
$\frac{8\pi}{29}$	399,0	$\frac{18\pi}{29}$	241,9	$\frac{28\pi}{29}$	871,4
$\frac{9\pi}{29}$	0,5	$\frac{19\pi}{29}$	1905,9	$\frac{29\pi}{29}$	3476,1

Eliminando los valores de las frecuencias, correspondientes a:  $w = 0$ ,  $w = \pi/29$ ,  $w = 2\pi/29$ ,  $w = 28\pi/29$  y  $w = \pi$ , que están influenciados evidentemente por el tamaño de la muestra, encontramos cuatro frecuencias significativas que son las siguientes:

$$w = 5\pi/29; \quad w = 14\pi/29; \quad w = 17\pi/29; \quad w = 20\pi/29$$

y sus períodos:

$$T = 11,60 \quad T = 4,14 \quad T = 3,41 \quad T = 2,90$$

años           años           años           años

Las frecuencias que hacen máxima  $|F(w)|^2$ , son, lógicamente, las mismas que se obtienen en  $F(w)$  y que escribimos:

$$w = 5\pi/29 \quad w = 14\pi/29 \quad w = 17\pi/29 \quad w = 20\pi/29$$

$$T = 11,60 \quad T = 4,14 \quad T = 3,41 \quad T = 2,90$$

Teniendo en cuenta las figuras 1 y 2 apreciamos la importancia relativa de los períodos considerados, cuya relación de orden es la siguiente:

# PERIODICIDAD DE PRECIPITACIONES ATMOSFERICAS CAIDAS SOBRE ESPAÑA

1.º  $T = 4,14$  años. 2.º  $2,90$  años. 3.º  $3,41$  años, y 4.º  $11,60$  años. La clasificación es de período más marcado a menos marcado.

Estudiando las áreas bajo  $|F(w)|^2$  obtenemos:

Entre $11 \frac{\pi}{29}$ y $16 \frac{\pi}{29}$ o $T = 5,27$ a $T = 3,63$	37 %
---	------

Entre $3 \frac{\pi}{29}$ y $7 \frac{\pi}{29}$ o $T = 19,33$ a $T = 8,29$	17 %
--	------

Entre $16 \frac{\pi}{29}$ y $18 \frac{\pi}{29}$ o $T = 3,63$ a $T = 3,22$	11 %
---	------

Entre $18 \frac{\pi}{29}$ y $23 \frac{\pi}{29}$ o $T = 3,22$ a $T = 2,52$	24 %
---	------

Otros períodos	11 %
----------------	------

## 5. CONCLUSIONES

De todo lo anterior podemos sacar las siguientes conclusiones:

1. El período más marcado en las precipitaciones atmosféricas es el de  $4,14$  años. Entre los períodos de  $3,63$  años y  $5,27$  años se encuentra el 37 por 100 de las componentes periódicas.

2. Los períodos de  $3,41$  años y  $2,90$  años están claramente diferenciados. Entre  $3,63$  años y  $2,52$  años se encuentran el 35 por 100 de las componentes periódicas.

3. El período de  $11,60$  años merece especial mención, ya que parece estar correlacionado con el del número Wolf-Wolfer de manchas solares. Su "contenido de energía" es pequeño.

## 6. REFERENCIAS

- [1] HWWEI P. HSU: "Análisis de Fourier". Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- [2] G. REMENIERAS: "Tratado de hidrología aplicada". Editores Técnicos Asociados, 1971.
- [3] SERVICIO METEOROLOGICO NACIONAL: "Las series más largas de observaciones pluviométricas en la península ibérica.
- [4] SERVICIO METEOROLOGICO NACIONAL: "Calendario Meteoro-Fenológico 1978".