REVISTA DE OBRAS PUBLICAS. Marzo 1979. Págs. 193 a 207.

Estima de función de distribución a partir de una muestra aleatoria (*)

Por ENRIQUE COPEIRO
Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P.
Laboratorio de Puertos "Ramón Iribarren", Madrid

1. Factores de indeterminación en la estima de función de distribución a partir de una muestra de valores independientes.

En la estima de función de distribución a partir de una muestra aleatoria existen varias etapas sucesivas: Selección de la muestra, asignación de probabilidad a los puntos muestrales, ajuste de una función a aquellos puntos. Para la realización de cada una de estas etapas han sido propuestos diversos criterios y fórmulas, que producen una variedad de resultados distintos. El estado de indeterminación a que se refiere este apartado es consecuencia de que *la metodología estadística en uso no ha proporcionado hasta el momento criterios inequívocos de elección entre las diversas propuestas existentes.* Los principales factores de indeterminación son:

1.1. *Frecuencia de representación.*

Si los valores de una muestra de una variable aleatoria pueden suponerse independientes (como ocurre típicamente con las muestras de valores extremos, por ejemplo) puede hacerse uso de la teoría estadística de valores ordenados. Ordenados los N valores muestrales en sentido creciente (o decreciente), se les asigna un número de orden $m = 1, 2, 3, \ldots, N$. A cada valor le corresponde una probabilidad de ser excedido (o no serlo), de acuerdo con su posición dentro del grupo ordenado. La propuesta aparentemente más adecuada sería utilizar la probabilidad observada en la propia muestra; sin embargo, esta posibilidad ha sido rechazada en función de las dos razones siguientes (E. Gumbel, 1958):

1. A cada valor m-ésimo se le puede asignar dos valores distintos de la frecuencia acumulada, según se le incluya a uno u otro lado del límite de integración. Es consecuencia natural de tratar un proceso discreto. Ambos valores son, respectivamente, $P(X_m) = \dfrac{m}{N}$ y $P(X_m) = \dfrac{m-1}{N}$. Ambas series de probabilidad convergen en la zona central de la muestra, pero divergen significativamente en sus extremos en términos de período de retorno.

2. La fórmula $\dfrac{m}{N}$ asigna al mayor valor una probabilidad $P(X_m) = 1$. La fórmula $\dfrac{m-1}{N}$ asigna al menor valor una probabilidad $P(X_m) = 0$. Los papeles probabilísticos que generalmente se usan en el análisis extremal no incluyen, normalmente, alguno (o ninguno) de ambos valores límite de la probabilidad y, sin embargo, se desea utilizar todos los N valores muestrales para el ajuste de la función.

Entre las propuestas efectuadas para solucionar este problema figuran varias fórmulas empíricas que constituyen compromisos de carácter práctico entre las dos series de probabilidad señaladas arriba. Por el lado teórico se han presentado también una serie de fórmulas basadas en distintas propiedades de la distribución del valor m-ésimo de una muestra aleatoria de tamaño N.

La función de densidad del valor m-ésimo de una muestra aleatoria de tamaño N perteneciente a una población cuya función de densidad es $f(x)$, puede escribirse:

$$\varphi_N(X_m) = \frac{N!}{(N-m)!\,(m-1)!}\,[F(X_m)]^{m-1}\,[1-F(X_m)]^{(N-m)}\,f(X_m) \ldots (1.1)$$

A partir de esta ecuación pueden obtenerse diversos valores estadísticos característicos del valor m-ésimo.

En concreto, se han empleado las probabilidades correspondientes a la media, moda o mediana muestrales, o bien la media, moda o mediana de la probabilidad. Estas posibilidades producen resultados que varían notablemente en los extremos de la muestra. Los extremos muestrales son precisamente regiones a las que se ha venido atribuyendo una importancia especial en los criterios de

---

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de mayo de 1979.

ajuste: Tanto, que en el proceso de deducción de algunas fórmulas de frecuencia de representación, que precisaban el uso de formulaciones aproximadas debido a la complejidad analítica de la formulación exacta, se ha exigido de la aproximación propuesta la más estrecha convergencia en el extremo (Gringorten, 1963). Los criterios habituales de ajuste a una muestra extremal producen resultados que son altamente sensibles a las distintas fórmulas de frecuencia de representación. Aunque en los valores muestrales centrales las probabilidades calculadas por los diversos métodos son muy similares, en los valores extremos (altos y bajos) esas probabilidades divergen ampliamente, siendo máximas las diferencias en el último valor. Esto hace que las rectas ajustadas en el papel probabilístico tengan pendientes distintas, lo cual produce, en las extrapolaciones, predicciones tanto más dispares cuanto más nos alejemos en la escala de períodos de retorno. Por ello, la comparación entre las distintas probabilidades asignadas al último valor por las distintas fórmulas, da una buena impresión de las discrepancias entre métodos. A continuación, se comparan las probabilidades correspondientes al mayor valor muestral (las del menor valor darían un panorama análogo) cuando se utilizan algunas de las fórmulas más conocidas. Se consideran dos tamaños muestrales, $N = 50$ y $N = 100$, y se incluyen junto a las probabilidades sus períodos de retorno correspondientes, que quizá proporcionan un contraste más intuitivo.

Las diferencias observadas son grandes, aun cuando las dos últimas fórmulas corresponden a hipótesis distintas sobre la F.D.D. y, por tanto, la comparación entre ellas no es estrictamente permisible.

En un reciente artículo de L. Borgman y D. Resio (1977), donde se obtuvieron predicciones ex-

TABLA 1

AUTOR	EXPRESION	CRITERIO	N = 50: P Probabilidad	N = 50: T Período de retorno	N = 100: P Probabilidad	N = 100: T Período de retorno
Hazen	$\dfrac{m - \frac{1}{2}}{N}$	Arbitrario.	0,9900	100	0,9950	200
Weibull-Gumbel	$\dfrac{m}{N + 1}$	Media de la probabilidad del valor m-ésimo (independiente de la F. D.D.).	0,9804	51,0	0,9901	101,0
Johnson-Benard	$\dfrac{m - 0{,}3}{N - 0{,}4}$	Mediana de la probabilidad del valor m-ésimo (independiente de la F.D.D.).	0,9861	72,0	0,9930	143,4
Blom	$\dfrac{m - \frac{3}{8}}{N + \frac{1}{4}}$	Probabilidad del valor medio m-ésimo de una F.D.D. normal.	0,9756	41,0	0,9878	81,8
Cringorten	$\dfrac{m - 0{,}44}{N + 0{,}12}$	Probabilidad del valor medio m-ésimo de una F.D.D. doble exponencial.	0,9888	89,5	0,9994	178,8

tremales significativamente dispares con la sola variación de utilizar alternativamente las fórmulas de Weibull-Gumbel y de Gringorten, el comentario de aquellos conocidos autores sobre ello fue: "No es realmente cuestión de qué fórmula es la buena o cuál es la mala. Cada procedimiento tiene algunas justificaciones estadísticas o lógicas". Esta opinión es el reconocimiento explícito de un estado de ambigüedad en la metodología estadística existente.

1.2. *Los extremos de la muestra (caso de muestras de valores extremos).*

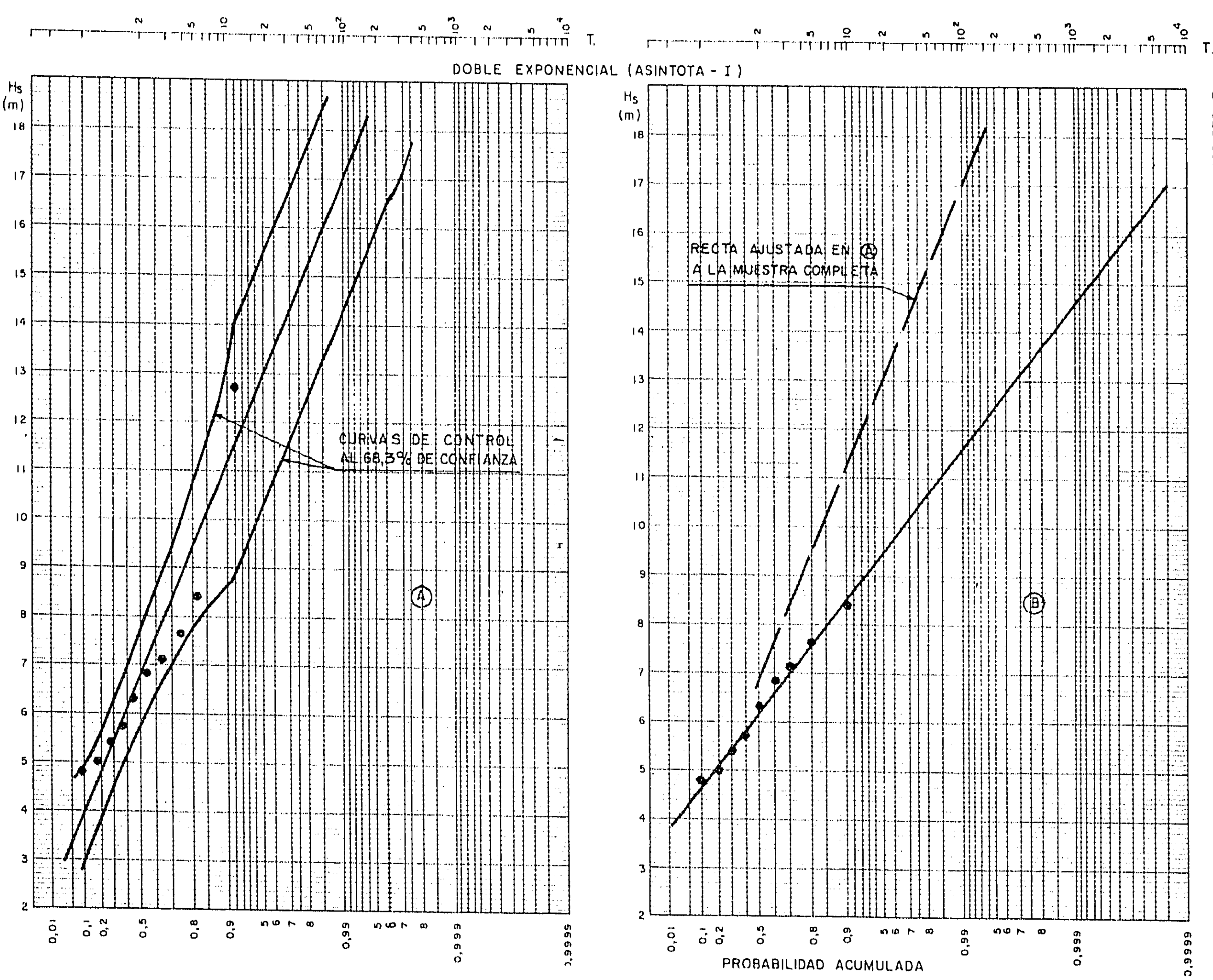
En ocasiones los valores límites de la muestra (los mayores y menores) se apartan apreciablemente de la tendencia seguida por el resto de la muestra. Aquellos valores condicionan, a veces de forma muy marcada, la pendiente de la recta ajustada en el papel probabilístico a través de la serie de puntos muestrales.

En la metodología en uso para los ajustes se parte de la decisión de utilizar la totalidad de los puntos muestrales. Puede citarse, como ejemplo, que, entre las seis condiciones que según E. Gumbel (1958) debe cumplir una fórmula aceptable de probabilidad de representación, la primera es que debe permitir la representación de todos los valores de la muestra. De esta forma, los *N* puntos muestrales son utilizables para el ajuste. Algunos autores, sin embargo, han admitido la posibilidad de prescindir de algunos de estos valores extremos, en las estimas de distribuciones extremales, cuando su posición se aleja de forma "excesiva" de la tendencia marcada por el resto. En este caso se presume que aquellos valores no siguen el mismo tipo de función de distribución que los demás, sino otra ley estadística propia de valores que puedan darse en intervalos de recurrencia muy largos. Por tanto, se supone que estos valores no son estadísticamente homogéneos con el resto y se les excluye del análisis (V. Chow, 1964).

Este punto de vista plantea dos problemas, cualquiera de los cuales basta para invalidarlo. El primero es que la propia posibilidad de extrapolar la curva ajustada queda básicamente cuestionada por la suposición de que los acontecimientos con período de retorno largos siguen una distribución estadística distinta a los otros. El segundo es la vaguedad de la propuesta a nivel de su uso práctico, ya que no se suministra un criterio que permita decidir cuándo la desviación de un determinado punto es "suficientemente" acusada como para decidir su exclusión. Chow llama a esos puntos "datos fuera de control", en el sentido de que caen bien fuera de las bandas de control o límites de confianza que pueden trazarse a ambos lados de la curva ajustada. Podría decidirse el excluir los puntos que no caen dentro de esta banda, pero ¿qué banda de control se adapta para ello? Se obtiene una banda de control diferente para cada nivel de confianza, y éste es una cantidad a fijar arbitrariamente. Por lo demás, la amplitud de las bandas de control habituales es tan grande, en los extremos de la muestra, que aun puntos que se desvían muy pronunciadamente de la tendencia del resto pueden estar incluidos en aquéllas. Esto es cierto aun en bandas de control muy estrictas, como, por ejemplo, del 68,3 por 100 de confianza (una desviación estándar).

En la figura 1 se muestra un ejemplo que permite apreciar el efecto indicado. La muestra extremal utilizada consiste en 10 máximos anuales de la altura de ola significante estimados para un punto del Cantábrico Oriental mediante previsiones realizadas utilizando cartas meteorológicas. En el caso A aparece la muestra completa en papel Asíntota-I. La representación de puntos muestrales, el ajuste de la recta a ellos y el trazado de la banda de control al 68,3 por 100 de confianza, han sido realizados según la metodología propuesta por E. Gumbel (1958). En el caso B se ha empleado la misma metodología para ajustar la misma muestra de donde ha sido excluido el valor mayor. Este valor cae aún dentro de la banda de control en la figura A, pero su posición marca una rotura tan acusada de la tendencia marcada por el resto de la muestra (nítidamente alineada) que cabe una duda razonable sobre su exclusión, en el espíritu de la recomendación indicada más arriba. Como puede verse, las rectas ajustadas en ambas hipótesis divergen ampliamente (figura B), produciendo grandes diferencias relativas para los períodos de retorno usuales en la práctica.

Este ejemplo muestra la ambigüedad de la metodología respecto al tratamiento de los extremos de la muestra. Se ve cómo dos decisiones, entre las que existe una duda que podemos calificar de razonable a la luz de los procedimientos en vigor, producen resultados desproporcionadamente diferentes, con un impacto enorme en el proceso de diseño de obras o planificación. Debe admitirse que una muestra de diez años es en cualquier caso muy corta. Sin embargo, aunque la influencia de los últimos valores disminuye naturalmente al crecer el tamaño de la muestra, no llega a ser despreciable hasta llegar a muestras muy grandes, poco frecuentes en la práctica. En ingeniería marítima, por ejemplo, se han realizado con frecuencia estimas de distribuciones extremales utilizando muestras de entre veinte y treinta años (C. Petrauskas y P. Aagaard, 1970; P. Suárez Bores, 1974; E. Copeiro, 1976) y aún inferiores (H. Thom, 1970), debido a la inexistencia de datos de larga duración. En estos tamaños la influencia de los valores extremos es aún considerable.



CANTABRICO ORIENTAL, MUESTRA EXTREMAL DE 10 AÑOS (1960-61 a 1969-70) OBTENIDA POR PREVISION A PARTIR DE CARTAS BAROMETRICAS. Ⓐ - MUESTRA COMPLETA. Ⓑ - MUESTRA CON EL MAYOR VALOR EXCLUIDO. AJUSTES SEGUN METODOLOGIA DE E.GUMBEL (1958).

Figura 1.

1.3. *Variabilidad muestral.*

Distintas muestras de una misma población conducen a distintas estimas de la función de distribución. Esta afirmación es obvia.

La variabilidad de resultados obtenidos con distintas muestras depende del tamaño muestral: para mayores tamaños la dispersión es menor. De acuerdo con esto, determinados tamaños de muestra producen estimas "poco" fiables, mientras que otros son "más" fiables. La deficiencia de la metodología estadística en uso respecto a este hecho es que no toma en cuenta la diferente fiabilidad de las estimas. Una muestra de tamaño $N = 10$ es representada y aceptada análogamente a una de $N = 50$, en el sentido de que ningún término estadístico de valoración evalúa en modo alguno el hecho evidente de que la estima efectuada con $N = 50$ está situada próxima a los valores de la población con una probabilidad muy superior a la otra; o, a la inversa, que tomando la estima proporcionada por $N = 10$ corremos un riesgo mayor de estar considerablemente alejados de la población.

Como ejemplo indicativo, que da una idea de las dimensiones que puede tener el efecto de la variabilidad muestral, se han tomado 73 observaciones de precipitación total diaria máxima anual en Madrid (Retiro), correspondientes al período 1901 a 1973-74. Se han considerado años meteorológicos, con comienzo el 1 de octubre. A falta de una muestra mayor, supondremos que $N = 73$ caracteriza a la población total para ver cómo varían en torno suyo las estimas conseguidas con tamaños muestrales menores. En la figura 2 se ha representado la muestra total en un papel probabilístico Asíntota-I. Como fórmula de frecuencia de representación se ha escogido la de Weibull-Gumbel, y la recta ha sido ajustada según el procedimiento de E. Gumbel (1958). Los mismos

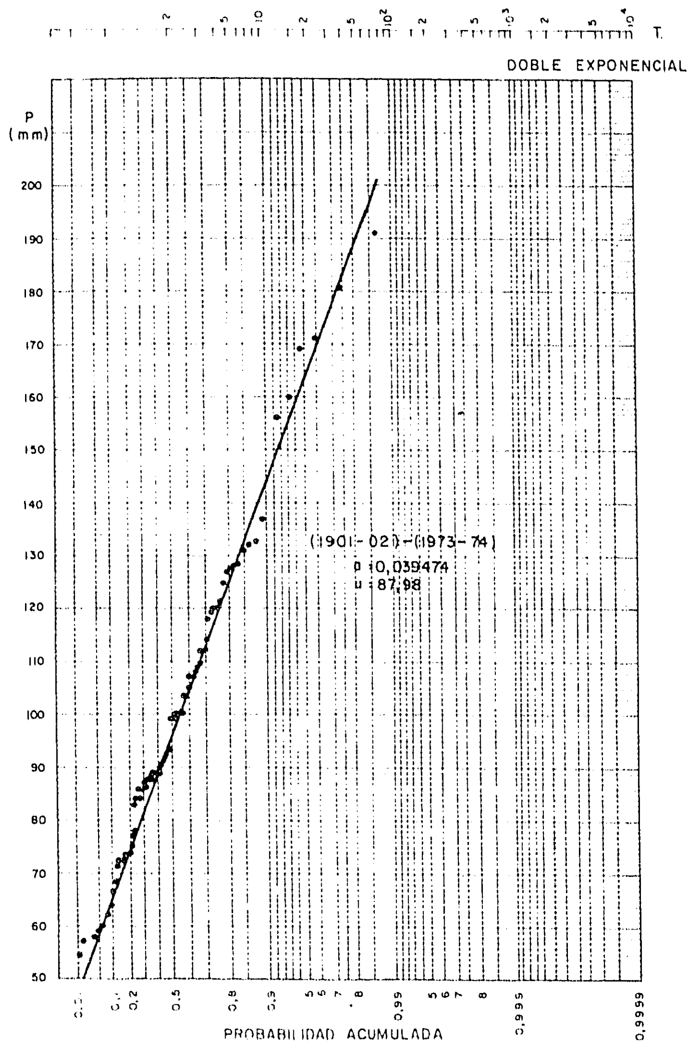


Figura 2.

sistemas han sido empleados con todas las muestras analizadas, de modo que se mantiene una homogeneidad operativa necesaria para establecer las comparaciones. Puede añadirse que estos métodos son, quizá, los más populares en los medios especializados. A continuación se han escogido varios tamaños muestrales, N = 10, 20, 30, 40, 50, para ver la dispersión de resultados dentro de cada tamaño y comparar entre distintos tamaños. Para tomar un número relativamente alto de muestras dentro de cada tamaño, se ha admitido un solape de aproximadamente 3/4 de la muestra entre cada dos de ellas consecutivas, aun a costa de perder independencia estadística entre muestras. En el caso de N = 10 el solape ha sido de 1/2 de la muestra, por contarse así con un número suficiente de muestras.

Los ajustes de las muestras individuales pueden verse en las figuras A2-1 a A2-11 de la referencia 5. En las figuras 3 a 5 se muestran los grupos de rectas obtenidas para los seis tamaños muestrales considerados. Como podía esperarse, la dispersión disminuye al aumentar el tamaño muestral. En el cuadro siguiente se expresan los límites de las dispersiones obtenidas en cada grupo, respecto a los valores que señala la recta de la muestra total (N = 73), por encima y por debajo de ella. La comparación se establece en los períodos de retorno N = 100, N = 500, que son altamente significativos en la práctica (riesgo del 10 por 100 de superación en períodos de diez y cincuenta años, respectivamente).

Las dispersiones observadas en los grupos de tamaños menores son tan grandes que esas estimas resultan altamente peligrosas si se piensa en su utilización práctica. Puede hablarse de otro estado de indeterminación importante.

N (tamaño muestral)	10		20		30		40		50	
T (período de retorno) ...	100	500	100	500	100	500	100	500	100	500
Lim. dispersión por encima	53 %	58 %	37 %	39 %	17 %	19 %	7 %	8 %	7 %	8 %
Lim. dispersión por debajo	20 %	22 %	23 %	23 %	24 %	26 %	17 %	19 %	17 %	18 %

1.4. *Ajuste de la distribución.*

El método más simple es trazar visualmente una línea recta a través de los puntos muestrales, representados en papel probabilístico. Aunque probablemente es este el sistema más utilizado en la práctica, los textos normalmente los desaconsejan por estar sujeto a factores subjetivos de apreciación difíciles de evaluar. En su lugar han sido propuestos diversos métodos matemáticos de ajuste. V. Chow (1964) los clasifica en tres grupos:

1. *Momentos.*—Se calculan los momentos estadísticos a partir de los valores muestrales, y se sustituyen directamente en la función de distribución a ajustar.
2. *Minimos cuadrados.*—Se ajusta una línea de regresión.

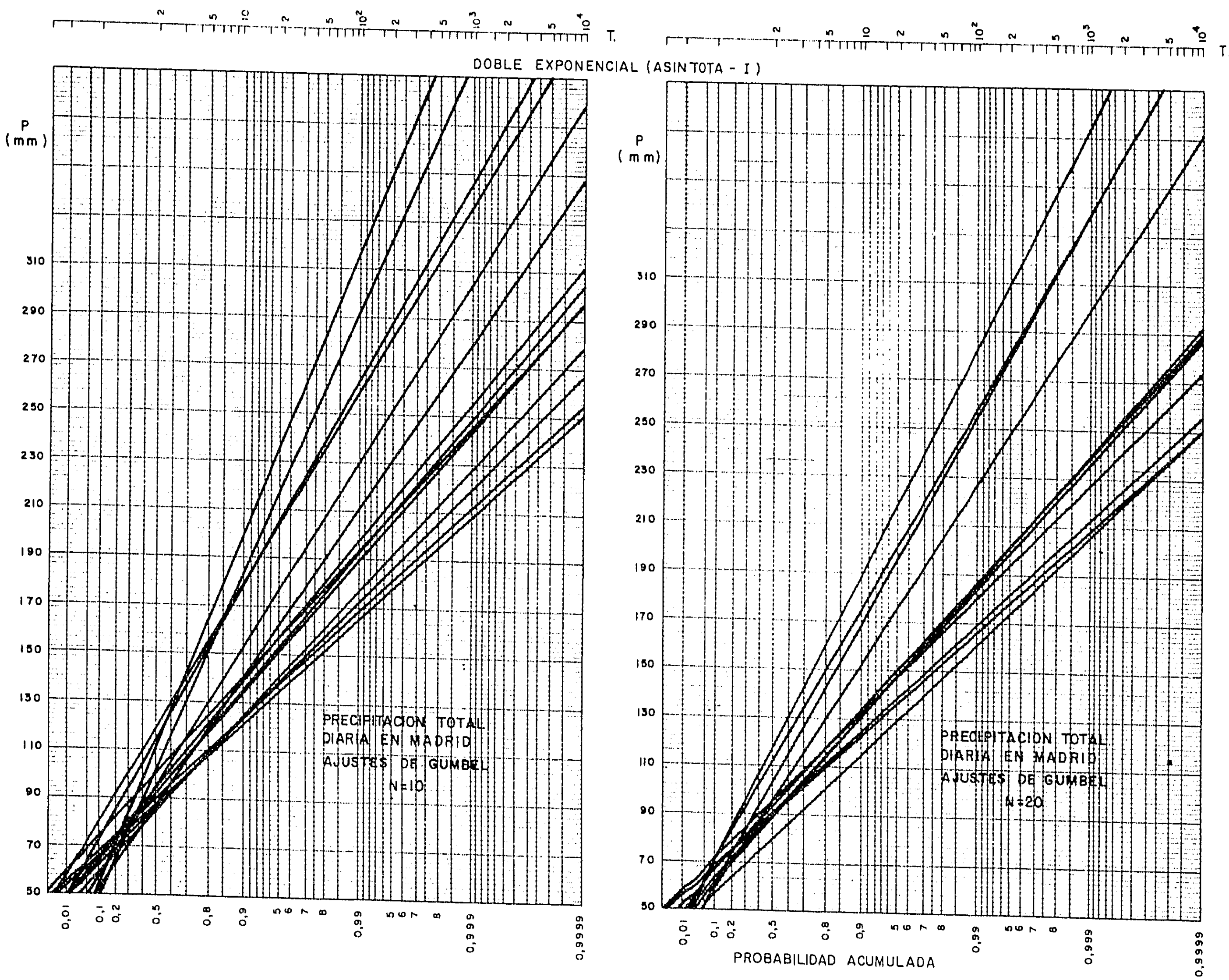


Figura 3.

3. *Máxima semejanza.*—Se determina el valor de un parámetro de forma que se obtenga una probabilidad tan alta como sea posible del resultado muestral observado.

También en esta etapa del proceso de estima pueden resultar diferencias significativas en el uso de una u otra fórmula de ajuste. Como ejemplo puede citarse el comunicado final del Grupo de Trabajo Federal sobre Métodos de Frecuencias de Avenidas, Comité de Hidrología (Water Resources Council, U.S.A.). En este comunicado (M. Benson, 1968) se analizaron 10 muestras extremales largas de avenidas fluviales, ajustándoselas seis tipos diferentes de funciones de distribución de acuerdo con varios métodos matemáticos de ajuste de uso rutinario en algunas Agencias Federales. Uno de los resultados del estudio fue la aparición de considerables diferencias entre las extrapolaciones obtenidas con la misma función de distribución (y la misma muestra), pero distintos métodos matemáticos de ajuste. Al nivel cien años de período de retorno, los rangos de dispersión (sobre el menor de los valores obtenidos en las extrapolaciones) fueron tan grandes como el 34 por 100 (distribución Log Normal, muestra de cuarenta y nueve años en Little Missouri River, Alzada); el 47 por 100 (distribución Asíntota-II, muestra de cuarenta años en Mora River, Golondrinas); el 60 por 100 (distribución Log Normal, muestra de cuarenta y cuatro años en Elkhorn River, Waterloo); el 85 por 100 (distribución Asíntota-II, muestra de cincuenta y un años en Llano River, Junction); el 109 por 100 (distribución Log Normal, muestra de cuarenta años en Mora River, Golondrinas); o el 119 por 100 (distribución Log Normal, muestra de cincuenta y un años en Llano River, Junction).

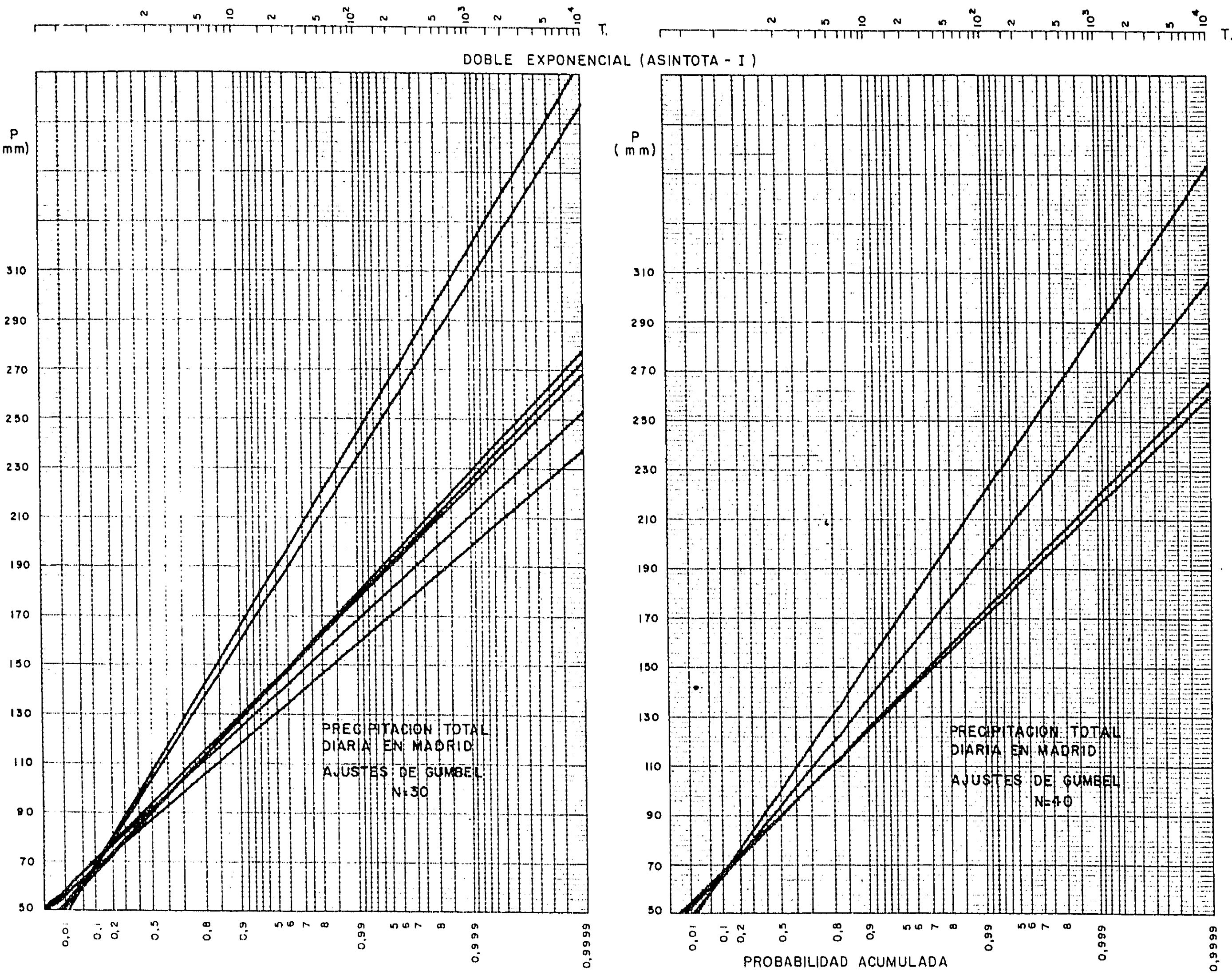


Figura 4.

Estas diferencias son tan considerables que suponen una influencia de orden muy elevado en proyectos hidráulicos. El comentario del Grupo de Trabajo, que estaba asistido en su labor por un grupo de estadísticos profesionales como consultores (J. Rosenblatt, National Bureau of Standars; G. Watson, Johns Hopkins University), fue que el estado actual de estas técnicas no permite seleccionar uno de los métodos usados como correcto o como superior al resto. Una vez más, el panorama que presenta esta metodología al ingeniero práctico es de una ambigüedad desalentadora.

2. Análisis crítico de la metodología en uso y propuesta de alternativas.

Según se ha expuesto en el apartado anterior, *la metodología existente adolece de al menos cuatro factores de indeterminación, todos ellos potencialmente conducentes a errores de orden elevado en las extrapolaciones.* El panorama global que ofrecen estos métodos es de una amplia gama de propuestas diferentes, que pueden producir resultados tan dispares como para que la elección adecuada entre aquellos sea de una importancia a veces decisiva en las aplicaciones prácticas. Sin embargo, la teoría estadística con que se han desarrollado los métodos a que se alude no ha sido utilizada también para proporcionar al mismo tiempo criterios adecuados de discriminación que permitan adoptar alguno de ellos con confianza.

La situación es indudablemente incómoda para la ingeniería, que en multitud de campos (obras fluviales, construcciones marítimas, etc.) viene desde hace tiempo utilizando muestras extremales de las variables meteorológicas que van a afectar a sus obras para realizar con ellas estimas de sus

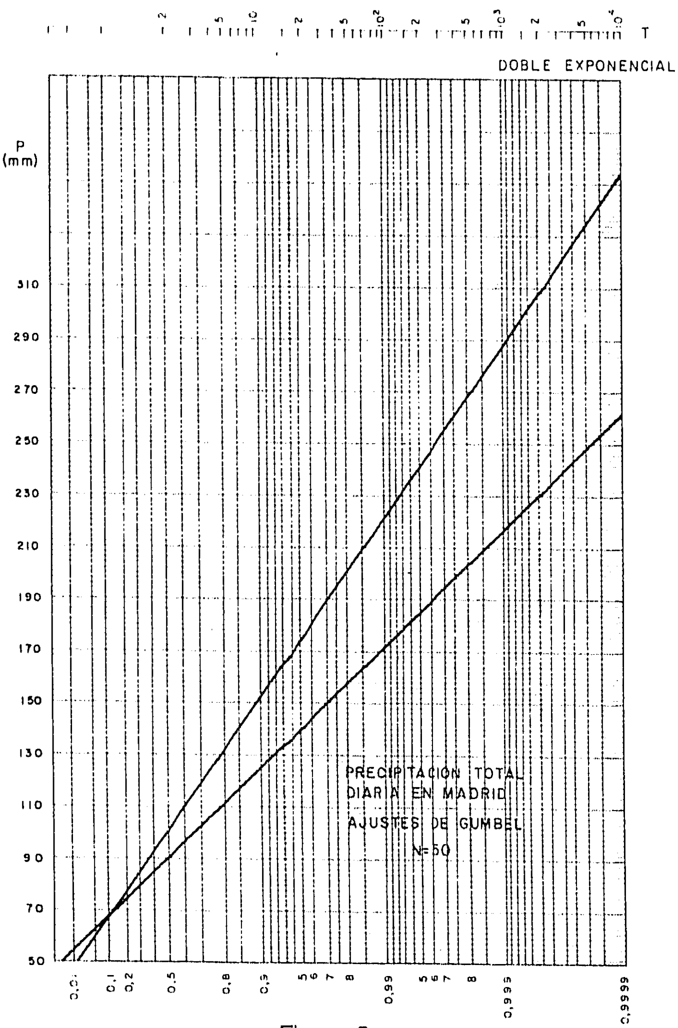


Figura 5.

distribuciones extremales correspondientes. El ingeniero práctico, sobre quien pesa la responsabilidad de adoptar decisiones de alcance real, no puede menos que sentir como poco una profunda desconfianza ante este conjunto de propuestas estadísticas cuyas condiciones de utilización son tan, al parecer, irremediablemente vagas. Sin embargo, es frecuente que los autores que tratan de estadística aplicada, al llegar a este punto, parezcan "pasar" el problema al ingeniero para su solución en un marco no estadístico. Se supone de hecho que el ingeniero es capaz de encontrar salida, haciendo uso de un ingenio peculiar, a las condiciones de indeterminación en que le dejan estos métodos. Entre los artículos que en los últimos años han aparecido sobre la aplicación de la metodología que hemos visto, se puede encontrar varias veces la observación explícita de que tales métodos sólo deben ser utilizados con el auxilio decisivo de un "juicio ingenieril" sólido. Ahora bien, ninguna de las referencias entra a analizar en qué puede consistir ese "juicio ingenieril" en estos casos.

Es posible que se considere al ingeniero capaz de obtener un número suficiente de evidencias directas de campo que permitan la selección razonable de una de las curvas extremales posibles, o quizá de establecer límites a los valores de la variable analizada. Sin embargo, en la gran mayoría de los casos reales esto es sencillamente imposible. Un ingeniero que proyecta una obra marítima en puntos alejados de la plataforma continental, por ejemplo, no dispone generalmente de la menor oportunidad para obtener datos de campo complementarios que le permitan discriminar entre las distribuciones que ha ajustado a su muestra extremal; como tampoco la tiene quien analice pluviometría o velocidad del viento, y aun sólo muy raramente quien trata con fenómenos que pueden dejar huella clara en el terreno como las avenidas fluviales.

Puesto que, una vez que las distribuciones extremales obtenidas por los diversos métodos están sobre el papel, la información extraestadística obtenible no permite en general salir de la ambigüedad, el único campo restante donde cabe aplicar el aludido "juicio ingenieril", es la propia metodología estadística utilizada. Lo que resta de este artículo es un ejercicio en que se reconsidera la metodología expuesta en los apartados anteriores, desde el punto de vista de obtener resultados de fiabilidad controlada para las aplicaciones prácticas. La argumentación se va a articular en diez escalones, que se desarrollan a continuación:

1. Las formulaciones propuestas para la frecuencia de representación se agrupan en dos clases distintas:

A) Una asigna el valor *m*-ésimo observado un cierto valor "típico" (media, moda, mediana) de la probabilidad que le corresponde según la estadística de valores ordenados.

B) La otra asigna al mismo la probabilidad correspondiente a un cierto nivel "típico" (media, moda, mediana) de los valores que adopta según la función de distribución de la variable. Ambos tipos de criterio se esquematizan en la figura 6.

Un criterio del tipo A es adecuado cuando el interés de la aplicación del resultado está sobre todo en la determinación correcta del período de retorno (probabilidad) correspondiente a cada valor de la variable. Cuando el interés está en la determinación correcta del nivel de la variable que corresponde a cada período de retorno, es más apto un criterio del tipo B. Este último es el caso habitual en ingeniería. De entre las opciones disponibles en estos tipos de criterios, el elegir la moda (valor más probable) sería la "apuesta" más

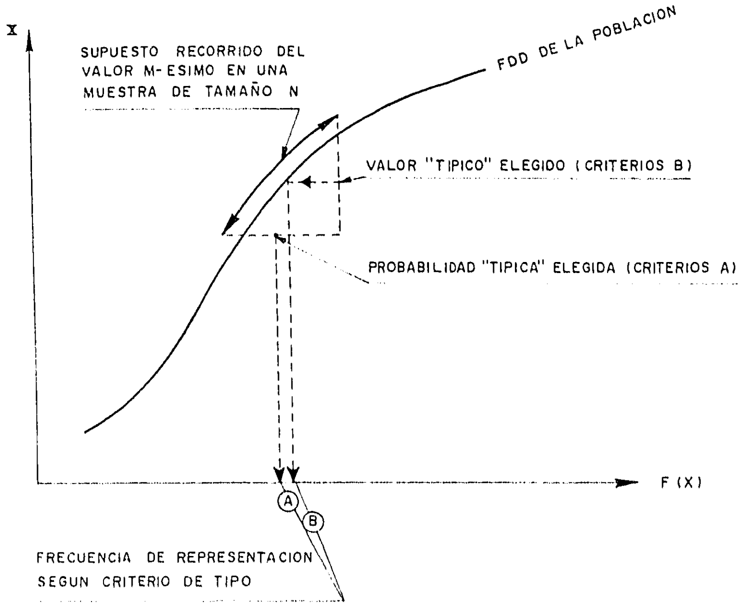


Figura 6.

lógica en el caso de un ingeniero que tuviera que proyectar una sola obra en un determinado lugar. Sin embargo, el hacer uso sistemático de esta opción produce resultados que en general no están centrados en torno al valor medio y, por tanto, si se piensa en un número grande de obras proyectadas, el conjunto tenderá a estar sobredimensionado o infradimensionado. Sólo la opción por el valor medio da resultados centrados en la media de la variable y, por tanto, el conjunto de obras proyectadas con este criterio tendrá globalmente un diseño correcto. Esto ha sido argumentado por algunos autores como G. Blom (1950) y C. Petrauskas et al. (1970), para justificar la adopción de esta última opción.

Sin embargo, *aunque las condiciones vistas hasta aquí son necesarias o al menos convenientes, no son en absoluto suficientes para la toma de decisiones en ingeniería.* Cualquier ingeniero rechazaría un criterio de elección que tan solo le asegura que sus obras estarán "por término medio" bien diseñadas (unas indeterminadamente sobredimensionadas, otras también intederminadamente infradimensionadas). Pretendemos que, dentro de las posibilidades ofrecidas por nuestro conocimiento de los factores en juego, "cada una" de nuestras obras tenga un cálculo correcto aun en términos probabilísticos que incluyan un cierto riesgo conocido. *La ambigüedad de los métodos expuestos está sobre todo en que ignoran por completo en qué medida las estimas que producen están más o menos cerca del valor característico que adoptan, y, por tanto, nos dejan desconociendo el riesgo que supone su utilización.* Como se ha visto en los ejemplos de apartados anteriores, el riesgo de grandes dispersiones es, en general, elevado. Entre las seis condiciones postuladas por E. Gumbel en su clásico tratado (1958) para la frecuencia de representación, ninguna hace referencia a este problema básico de que los valores obtenidos sean suficientemente correctos en términos de aproximación de las estimas muestrales con los valores de la población. Sólo su condición número 2 establece la inclusión de la probabilidad entre sus dos límites extremos $\frac{m}{N}$, $\frac{m-1}{N}$, pero en las regiones cruciales de las colas de la distribución esos límites son tan amplios que carecen de utilidad alguna en cuanto al problema real planteado.

2. *Para salir de la indeterminación, es necesario determinar analíticamente la dispersión del valor "típico" elegido para los criterios de tipo B, y (o) la dispersión de la probabilidad "típica" elegida para los criterios de tipo A* (ver figura anterior). Esto puede ser realizado para cualquier clase de función de distribución, por medio de la ecuación (1.1). La determinación de las dispersiones permite evaluar, en términos de probabilidad, el grado de aproximación conseguido en la estima del valor m-ésimo para cada tamaño muestral N.

3. Una vez conocida la dispersión esperada de los valores muestrales, un criterio sencillo y adecuado para incorporarse este elemento adicional en el proceso de ajuste consiste en eliminar aquellos valores cuya dispersión sea superior a un cierto nivel considerado tolerable. Para ello *debe establecerse un intervalo en torno a la probabilidad típica (criterios tipo A) o valor típico (criterios tipo B) elegidos, y calcular cuál es la probabilidad de que la probabilidad o valor típico observado caiga dentro de aquel intervalo. Si la probabilidad de inclusión en el intervalo es inferior a un valor dado, el punto muestral se excluye del ajuste.*

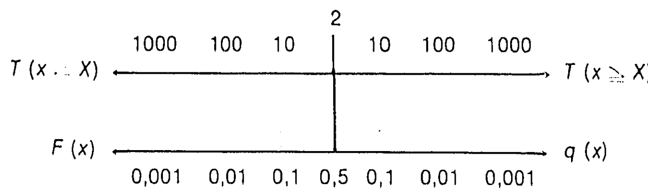
Esta forma de establecer intervalos para el control de los ajustes parte del criterio recíproco al que da origen a los intervalos de confianza que se utilizan corrientemente en el contraste de la función de distribución a partir de la muestra. En estos últimos se parte de un cierto valor de la frecuencia de presentación o nivel de confianza, a partir del cual se calcula cuál es la amplitud correspondiente de la dispersión del valor a contrastar. En cambio, para los ajustes nos interesa calcular la frecuencia de presentación de los valores observados dentro de un intervalo fijado previamente. *Denominaremos a estos últimos "intervalos de precisión", para diferenciarlos de los "intervalos de confianza"*. Aquí cobra sentido el "juicio ingenieril", que debe decidir en primer lugar la amplitud del intervalo. Obviamente, esta decisión es función entre otras cosas del grado de precisión que requiere el proceso de diseño en que van a ser empleados los resultados. A este respecto puede indicarse que, en general, las aplicaciones en ingeniería de estos cálculos exigen que los intervalos de precisión sean definidos no en términos absolutos sino relativos al valor o probabilidad escogida. En el caso de que se escoja el valor de la variable, la diferencia entre un intervalo rígido y el establecido relativamente al valor llega a ser considerable si el recorrido muestral es largo. En determinados fenómenos climatológicos, el recorrido puede ser tan largo como para abarcar más de un orden de magnitud (ver, por ejemplo, los casos de máximas precipitaciones diaria en Madrid y mensual en Los Llanos, que se tratan en la referencia (5). Si, en cambio, el parámetro a evaluar es la probabilidad, es evidente que un intervalo rígido de por ejemplo ± 0,05, que en un caso determinado puede resultar apto para el punto central de probabilidad 0,50, resulta totalmente inadecuado para un punto en la cola superior de la muestra con probabilidad 0,01. Por tanto, *los intervalos de precisión convenientes para su utilización en ingeniería son de forma* (Z ± k Z), *siendo* Z *el parámetro a estimar y* k *la fracción del mismo que mide la dispersión considerada tolerable.*

Una vez definida la amplitud del intervalo, el "juicio ingenieril" vuelve a intervenir en la adopción del nivel mínimo de probabilidad de inclusión, que delimita la aceptación o rechazo de los puntos muestrales. En esta decisión debe jugar un papel primordial la importancia atribuida al fallo de la predicción extremal realizada.

4. *En cuanto al método a usar para ajustar los puntos muestrales aceptados, es lógico pensar que el adecuado sea aquel que minimice las diferencias, en términos relativos, del parámetro escogido para establecer los intervalos de precisión.*

5. Las funciones de distribución, y entre ellas las extremales, constan de una cola superior y otra inferior cuyos extremos evalúan las frecuencias de presentación de valores raros, por ser muy grandes o muy reducidos. El valor de la probabilidad que caracteriza a la presentación de aquellos valores raros lo da, en el caso de valores grandes, la probabilidad de que ocurra uno igual o mayor ($q(x) = 1 - F(x)$), y para los valores pequeños la probabilidad de que ocurra uno igual o menor aún ($F(x)$). En el caso concreto de la función de distribución extremal, la escala de períodos de retorno sólo es significativa cuando se entiende de la misma forma: Para los valores grandes, el intervalo medio entre ocurrencias de un valor igual o mayor $\left[T(x \geq X) = \dfrac{1}{q(x)} \right]$, y para los valores pequeños el intervalo medio entre ocurrencias de un valor igual o menor $\left[T(x \leq X) = \dfrac{1}{F(x)} \right]$.

Existe, por tanto, una simetría en cuanto a la utilización de ambas ramas de las distribuciones, que puede esquematizarse como sigue:



Ambas ramas tienen su interés particular en ingeniería, si bien la superior es la que se utiliza con mayor frecuencia en el caso de funciones de distribución extremales de valores máximos.

La correcta evaluación de la función de distribución (extremal o cualquier otra) requiere que, en el caso de que se decida establecer intervalos de probabilidad para los ajustes, el valor de la probabilidad que debe utilizarse sea q (x) *en la rama superior, y* F (x) *en la inferior.* Esto es groseramente equivalente a establecer intervalos para los períodos de retorno correspondientes a ambas ramas. En la rama superior:

Intervalo de $q(x)$:

$$(1 - k)\, q(x) \leq q(x) \leq (1 + k)\, q(x)$$

En términos de $T(x)$, este intervalo es:

$$\frac{1}{1 - k}\, T(x) \geq T(x) \geq \frac{1}{1 + k}\, T(x)$$

Para intervalos estrechos existen las siguientes equivalencias aproximadas:

$$\frac{1}{1 + k} \xrightarrow[(k << 1)]{} 1 - k$$

$$\frac{1}{1 - k} \xrightarrow[(k << 1)]{} 1 + k$$

Con lo cual el intervalo de períodos de retorno queda:

$$(1 - k)\, T(x) \leq T(x) \leq (1 + k)\, T(x)$$

Es decir, el mismo que el de la probabilidad (en términos relativos), con aproximación fijada por la magnitud de k. Lo mismo puede establecerse para la rama inferior, utilizando $F(x)$.

Puede verse que, si para establecer los intervalos se utilizara en toda la distribución la probabilidad $F(x)$ (ó $q(x)$), el extremo superior (o inferior) resultaría inadecuadamente tratado. Supongamos que se utiliza $F(x)$ estableciéndose un intervalo $F(x) \pm 0{,}1\, F(x)$. En el centro de la distribución $F(x) = 0{,}5$ el intervalo sería $0{,}45 \leq F(x) \leq 0{,}55$, que en términos de períodos de retorno (de la rama superior), es $1{,}81 \leq T(x) \leq 2{,}22$. Es un intervalo apretado. En un punto de la rama inferior con $T = 50$ ($F(x) = 0{,}02$), el intervalo correspondiente es $0{,}018 \leq F(x) \leq 0{,}022$, que en períodos de retorno es $45{,}45 \leq T(x) \leq 55{,}55$. En cambio, en la rama superior, para un punto de $T = 50$ ($F(x) = 0{,}98$), el intervalo es $0{,}882 \leq F(x) \leq 1$ y en períodos de retorno $8{,}47 \leq T(x) \leq \infty$, un resultado de amplitud tan grande que carece de significado.

6. Una de las primeras observaciones que se desprende del establecimiento de los intervalos de precisión para los ajustes, es que *la muestra no proporciona una estima de fiabilidad uniforme para la función de distribución a lo largo de todo su recorrido.* Cualitativamente, esto puede comprenderse de forma sencilla y directa estableciendo una analogía con los ejemplos familiares de una moneda y un dado. Supongamos que deseamos obtener estimas muestrales de la probabilidad de "cara" en la moneda y "uno" en el dado. Es evidente que, si se desea obtener estimas de fiabilidad equivalente en ambos casos, es necesario tirar el dado un número superior de veces a la moneda. Si el número de tiradas es el mismo para dado y moneda, la fiabilidad de la estima producida por esta última es superior a la del otro. La comparación puede establecerse en términos cuantitativos cuando se establece un determinado intervalo de precisión en términos relativos ($p \pm k\,p$). La obtención de "cara" en la moneda es asimilable al punto central ($F(x) = q(x) = 0{,}5$) de la distribución. La obtención de "uno" en el dado es asimilable a un punto de la rama superior (o inferior) de la función de distribución cuya probabilidad de ser superado (o de no ser superado) sea $q(x) = \frac{1}{6}$.

En el caso de un muestreo discreto y aleatorio (por ejemplo, una muestra extremal), el número de "tiradas" es constante para todos los valores muestrales, e igual al tamaño N de la muestra obtenida. Admitiendo que en general los N valores muestrales pueden ser considerados estadísticamente independientes, podemos emplear la distribución binomial para cuantificar la fiabilidad de las estimas en términos de nivel de confianza. Según la distribución binomial, la probabilidad de obtener m presentaciones de un fenómeno en N pruebas, cuando la probabilidad de aparición en cada una de las pruebas es $p(x)$, viene dada por:

$$f(m)_N = \binom{N}{m} p(x)^m \,[1 - p(x)]^{N-m}$$

Esta es, obviamente, la probabilidad de que la probabilidad observada en el muestreo sea $\frac{m}{N}$.

Con esta fórmula puede calcularse cuál es la probabilidad de que esa probabilidad observada se mantenga dentro de un intervalo suficientemente estrecho (a determinar arbitrariamente) en torno a la probabilidad real $p(x)$. Este es el "intervalo de precisión" que, según se indicó anteriormente, es conveniente definir en términos relativos. Para trabajar con la distribución completa vamos a prescindir por el momento de la estadística de valores ordenados y considerar simplemente la frecuencia con que es superado (o no) cualquier valor de la variable. $p(x)$ es, para la rama superior de la distribución, igual a $q(x)$ y para la rama inferior igual a $F(x)$. Establezcamos un intervalo de precisión de $p(x) \pm 0{,}2\,p(x)$. Supongamos un tamaño de muestra $N = 40$. Tomemos como términos de comparación el punto central de la distribución ($q(x) = F(x) = 0{,}5$) y uno de la rama superior $q(x) = 0{,}25$. Los intervalos de precisión correspondientes son $0{,}4 \leq \frac{m}{N} \leq 0{,}6$ y $0{,}2 \leq \frac{m}{N} \leq 0{,}3$. En términos del número m de presentaciones, los intervalos son $16 \leq m \leq 24$ y $8 \leq m \leq 12$. Las probabilidades de que la probabilidad observada caiga dentro del intervalo, según obtenidas a partir de la binomial, son respectivamente 0,846 y 0,639. Por tanto, la fiabilidad de la estima es considerablemente superior en el centro de la distribución. Los extremos de ambas colas de la distribución tienen fiabilidades muy reducidas. Por ejemplo, a un valor con $q(x) = 0{,}05$ (período de retorno = 20, o dos excedencias por término medio en las muestras de $N = 40$) corresponde un intervalo de precisión de $1{,}6 \leq m \leq 2{,}4$ que, como m sólo adopta valores enteros, se reduce a $m = 2$. La probabilidad de inclusión es sólo 0,278.

7. El uso de intervalos de precisión para los ajustes sólo asegura estrictamente el control de dispersión y probabilidad asociada dentro de la zona ajustada o recorrido muestral útil. En extrapolaciones cortas puede suponerse que estas condiciones se mantienen casi iguales, pero si se pretende alargar las extrapolaciones la dispersión de resultados depende también en forma importante de la longitud del recorrido muestral útil. Para iguales amplitudes del intervalo de precisión, las dispersiones resultantes en las extrapolaciones son mayores para longitudes menores del recorrido muestral útil. La magnitud de este efecto podría estimarse, como una primera aproximación, gráficamente en un papel probabilístico a partir del rectángulo que forman los intervalos de precisión a lo largo del recorrido muestral útil. Pero una cuantificación ajustada de las dispersiones debe

partir de la realización de análisis sistemáticos de grandes cantidades de muestras de diversos tamaños, para cada variable de interés (produciendo gráficos de tipo similar a las figuras 3 a 5, con criterios adecuados de ajuste) manteniendo independencia entre muestras). Esto no plantea dificultades especiales.

8. La utilización de los criterios expuestos en este apartado proporciona una solución racional a las indeterminaciones propias de la metodología convencional, que fueron descritas en los apartados anteriores. En particular:

A) *La reducida fiabilidad de las estimas producidas por los valores situados hacia ambos extremos de cada muestra extremal hace que, incluso si se acepta un valor relativamente bajo para el nivel de confianza que delimita la aceptación de las estimas, aquellos extremos resultarán rechazados.* Por tanto, desaparece el problema planteado respecto a la inclusión en la muestra de sus últimos valores cuando se apartan marcadamente de la tendencia definida por el resto.

B) En el epígrafe 1 de este apartado se trata de la conveniencia de adoptar una u otra formulación para la frecuencia de representación, según matizaciones del propósito de la predicción extremal. Sin embargo, *a la vista de que los valores muestrales correspondientes a los extremos superior e inferior de la muestra quedan eliminados del ajuste, nos encontramos con que los diferentes criterios descritos anteriormente producen fórmulas de frecuencia de representación cuyas diferencias son muy reducidas, despreciables en muchas aplicaciones prácticas.* En la tabla 2 se comparan las mismas fórmulas que se compararon en el apartado anterior, ahora en la hipótesis $N = 50$ y para dos puntos representativos: el valor central de la muestra ($m = 25$) y el quinto mayor valor muestral ($m = 5$).

Como puede apreciarse, las diferencias son pequeñas aun para $m = 5$.

C) *El efecto de dispersión producido por los diversos grupos de valores obtenidos con diversas muestras queda controlado mediante el uso de los*

TABLA 2

AUTOR	EXPRESION	P (probabilidad)	T (periodo de retorno)	P (probabilidad)	T (periodo de retorno)
Hazen	$\dfrac{m - \frac{1}{2}}{N}$	0,490	2,04	0,0900	11,11
Weibull-Gumbel	$\dfrac{m}{N + 1}$	0,490	2,04	0,0980	10,20
Johnson-Benard	$\dfrac{m - 0{,}3}{N + 0{,}4}$	0,490	2,04	0,0933	10,72
Blom (D. normal	$\dfrac{m - \frac{3}{8}}{N + \frac{1}{4}}$	0,490	2,04	0,0920	10,86
Gringorten (D. doble exp.)	$\dfrac{m - 0{,}44}{N + 0{,}12}$	0,490	2,04	0,0910	10,99

intervalos de precisión y sus probabilidades correspondientes. Los niveles de confianza que se asignen como límites a estas últimas determinan que, para ciertos tamaños muestrales, la totalidad o casi totalidad de las muestras es rechazable. Por tanto, *determinados intervalos de precisión y niveles de confianza exigen ciertos tamaños muestrales mínimos.*

Podemos denominar a la parte utilizable de la muestra en cada caso, *recorrido muestral útil o efectivo.* La aceptación de tamaños muestrales cuyo recorrido útil sea corto, depende de la fiabilidad requerida por el ingeniero y de la seguridad que se tenga sobre el tipo de función de distribución extremal correspondiente a la variable (y lugar) de que se trata. En efecto, recorridos útiles cortos pueden ser ajustados con gran facilidad por una variedad de funciones de distribución de tipos distintos sin diferencias significativas en la bondad de los ajustes.

9. *El uso de papeles probabilísticos para evaluar la bondad de los ajustes introduce factores adicionales en el análisis extremal.* Los procedimientos que establecen el ajuste a los puntos muestrales minimizando distancias absolutas sobre el papel probabilístico (uno de los cuales es el trazado de la recta según apreciación visual, quizá el procedimiento más extendido) no optimizan los ajustes en función de los parámetros que constituyen el objetivo del análisis extremal. Estos últimos son el valor de la variable o la probabilidad, mientras que las distancias medidas sobre el papel probabilístico vienen determinadas según las dos coordenadas cartesianas entre las que se establece la relación lineal que permite trazar la función de distribución según una línea recta. Estas son, según los casos (ver en Ref. 5, Apéndice sobre papeles probabilísticos), la variable reducida (en lugar de la probabilidad), y el valor de la variable, o su logaritmo, o el logaritmo de la variable trasladada (en lugar del valor de la variable).

En un papel exponencial, por ejemplo, la distancia entre $F(x) = 0$ y $F(x) = 0{,}1$ es casi la misma de la que existe entre $F(x) = 0{,}1$ y $F(x) = 0{,}2$. El uso estricto de los intervalos de precisión para la probabilidad en la cola inferior, tal como se indicaba en el epígrafe 3 de este apartado, pierde valor real en este caso, puesto que la amplitud de tales intervalos es, en términos de distancia sobre el papel, tan pequeña en la cola inferior, respecto a su amplitud en la cola superior, que en la práctica resulta poco sensible a importantes variaciones en la constante k que determina los intervalos.

Es verdad que otros papeles probabilísticos, como el Normal y Log-Normal, extienden las escalas de probabilidad hacia ambas colas (que son además simétricas) mejorando la aplicabilidad de los intervalos de probabilidad. Son más corrientes, sin embargo, las escalas de probabilidad marcadamente asimétricas, como en el Doble Exponencial y el Weibull, donde las colas están desequilibradas en cuanto a sus pesos en el ajuste si se utilizan los intervalos indicados anteriormente.

Por tanto, cuando se desee utilizar papeles probabilísticos y ajustar a ojo (o minimizando distancias sobre el papel matemáticamente) la recta, es permisible, al establecer los intervalos de precisión, ampliar estos en alguna zona a la vista del espaciamiento que toman los dos ejes coordenados entre los que existe la relación lineal. La forma correcta de realizar esto está en establecer los intervalos de precisión en términos de la variable reducida, que es la que marca las distancias sobre el papel a lo largo de la escala de probabilidad.

Estas indicaciones flexibilizan la obtención de estimas de la distribución extremal cuando se desea usar un criterio de ajuste que minimice distancias sobre el papel probabilístico, pero no consiguen consistencia matemática en términos de la totalidad del procedimiento de predicción extremal. Esto último sólo se obtiene utilizando el criterio indicado en el epígrafe 3 y cuando el ajuste empleado minimiza distancias, en términos relativos, al parámetro (o a los dos parámetros) relevante en cuanto a la predicción extremal, y que normalmente habrá servido de base para la construcción de los intervalos de precisión.

En definitiva, los ajustes en papel probabilístico minimizando distancias absolutas pueden ser en cierto grado racionalizados, pero los resultados de las estimas llevan una cierta indeterminación matemática debido a la heterogeneidad con que los valores de los parámetros relevantes están distanciados sobre el papel. Esta es una deficiencia inherente al uso del papel probabilístico, y representa quizá el precio que se paga por la comodidad indiscutible que supone su empleo.

10. A la vista de lo indicado en el epígrafe anterior sobre la consistencia matemática propia del uso de papeles probabilísticos, puede pensarse en utilizar otros métodos aproximados más cómodos (por ejemplo, que sean independientes de la función de distribución) para realizar ajustes de muestras extremales sobre aquellos papeles. Un procedimiento que se va a exponer a continuación abandona la utilización de la teoría estadística de valores ordenados para emplear en su lugar la distribución binomial, emparejada con cierta hipótesis aproximada sobre la probabilidad correspondiente a la población que es considerada aceptable en teoría de muestreo. La decisión sobre la conveniencia de este método, como también del uso del papel probabilístico en general, depende del grado de precisión que el proyectista requiera en cada caso, bien por el tipo de obra a construir, bien por la precisión que posee la muestra extremal dispo-

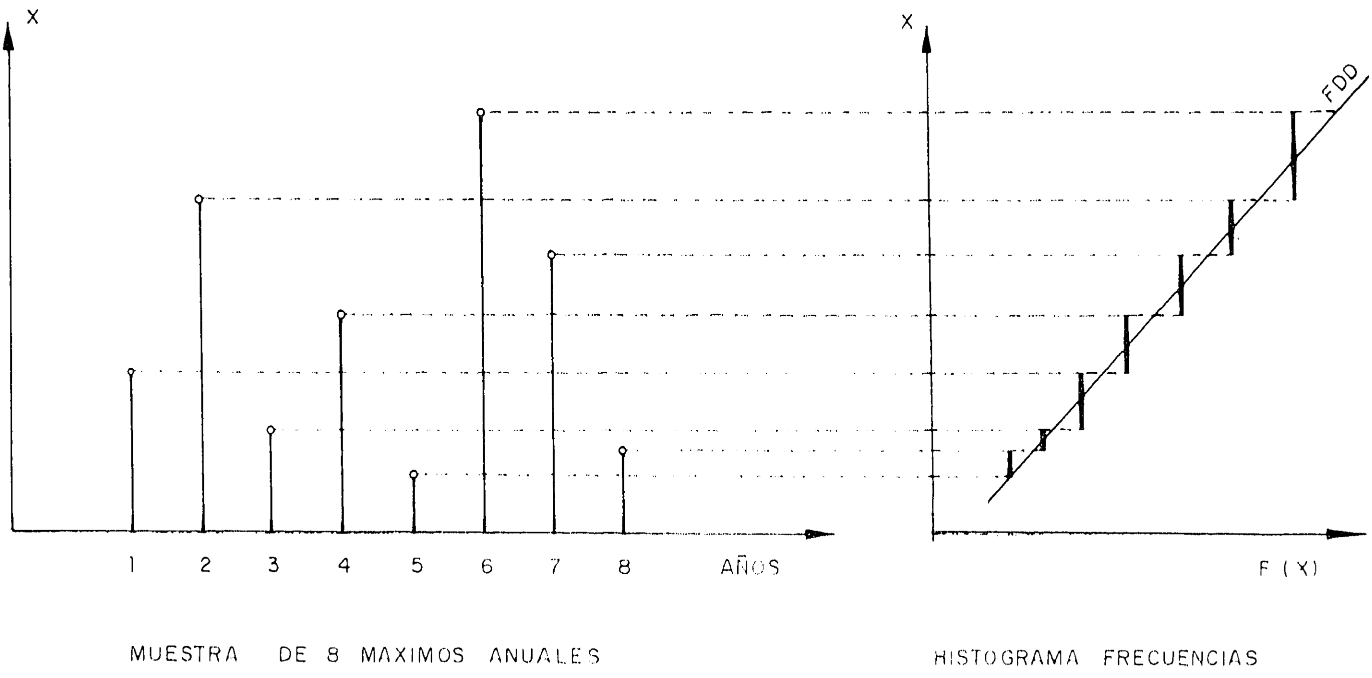


Figura 7.

nible o (y) otros elementos que intervienen posteriormente en el proceso de cálculo.

Una muestra cualquiera de N valores independientes de los cuales x_1 es el menor y x_N el mayor, prooprciona una estima de probabilidad de excedencia para cualquier valor de la variable comprendido entre x_1 y x_N. Esa distribución muestral puede ser representada mediante un histograma de frecuencias acumuladas. En la figura 7 se representa el histograma sobre un papel probabilístico que supuestamente corresponde a la distribución de la población.

En el supuesto de que las frecuencias acumuladas observadas estuviesen adecuadamente centradas en torno a las probabilidades de la población, la línea recta trazada a través del histograma sería una buena estima de la función de distribución buscada.

Los tramos horizontales del histograma son puntos de discontinuidad en la escala de probabilidad, donde ésta salta de un valor a otro cuando la variable pasa por cada uno de los ocho máximos anuales. La teoría estadística de valores ordenados se ocupa de esos tramos horizontales, cuyos valores extremos de la probabilidad son los dos límites $\frac{m}{N}$, $\frac{m-1}{N}$ que establecía la condición número 2 de Gumbel. Las distintas formulaciones para la "frecuencia de representación" son distintos valores característicos de la probabilidad en esos puntos de discontinuidad, que son precisamente los utilizados para el ajuste de la distribución en esa metodología. En vez de ello podemos tomar el conjunto de segmentos verticales, que constituyen la totalidad de información de probabilidad observada en la muestra. Para facilitar el ajuste puede utilizarse, en lugar de los segmentos completos, la serie de puntos que se obtienen cuando se corta por una sucesión de valores de la variable con espaciamiento uniforme. En canto al criterio de aceptación o rechazo de los valores observados de la probabilidad, pueden establecerse, si se toma la probabilidad como variable relevante, *intervalos de precisión* para la probabilidad con ayuda de la distribución binomial, de la misma forma que se realizó en el ejemplo mostrado al final del epígrafe 6. Para ello se precisaba conocer de antemano cuál era la probabilidad real (de la población) para cada nivel de la variable. Esta no es conocida, pero en su lugar puede utilizarse la propia probabilidad observada en la muestra. Aproximaciones de este tipo son utilizadas en teoría estadística de muestreo con el fin de evaluar la fiabilidad de un tamaño de muestra determinado, para lo cual se necesita conocer previamente, al menos de forma aproximada, cuál es la magnitud de la probabilidad cuyo valor real va a estimarse más precisamente mediante muestreo.

Suponiendo que va a utilizarse papel probabilístico para el ajuste, y éste va a realizarse visualmente o minimizando matemáticamente distancias sobre el papel, los intervalos de precisión pueden ser establecidos en términos de la variable reducida, tal como se inició anteriormente.

Dentro del orden de exactitud en que nos estamos moviendo con este procedimiento aproximado, cuando (como es más frecuente) interese definir la precisión en términos del valor de la variable más que en términos de probabilidad o período de retorno, puede mantenerse el empleo de los *intervalos de precisión en términos de probabilidad* (para lo cual no se necesita en este procedimiento conocer la forma analítica de la función de distribución, al contrario que ocurre con los intervalos para la variable), pero determinando su amplitud en función de la incidencia que tienen estos en los valores que toma la variable. Esto puede ser estimado, aproximadamente, observando en el papel probabilístico la pendiente que toma una línea recta trazada a ojo a través del histograma muestral completo. Es decir, tomando otra vez la estima muestral completa por la distribución real de la población. Esta actitud de tomar muestreos de peso aún indeterminado como punto de partida para estimar fiabilidades es, como se indicó anteriormente, propia de teoría estadística de muestreo.

BIBLIOGRAFIA

1. M. BENSON: "Uniform Flood-Frequency Estimating Methods for Federal Agencies". Jour. Water Resources Research, vol. 4, No. 5, 1968.
2. L. BORGMAN and D. RESIO: "Extremal prediction in wave climatology". Proc. Ports'77, Long Beach, 1977.
3. V. CHOW: "Frequency Analysis" in "Handbook of Applied Hydrology". McGraw Hill (Ed. V. Chow), 1964.
4. E. COPEIRO: "Un método práctico de estimar oleaje extremal para el cálculo de estructuras marítimas". Revista de Obras Públicas, junio 1976.
5. E. COPEIRO: "Análisis extremal de variables geofísicas". Publicación del Laboratorio de Puertos "Ramón Iribarren", 1978.
6. E. GUMBEL: "Statistics of Extremes". New York, Columbia University Press, 1958.
7. I. GRINGORTEN: "A plotting rule for extreme probability paper". Jour. Geophys. Res., vol. 68. No. 3, 1963.
8. C. PETRAUSKAS and P. AAGAARD: "Extrapolation of Historical Storm Data for Estimating Design Wave Heights". Offshore Techn. Conf., Houston, April 1970.
9. P. SUAREZ BORES: "Sea observation in coastal areas: The Spanish offshore network". Int. Symp. Wave Measurement and Analysis, New Orleans, 1974.
10. H. THOM: "Asymptotic Extreme-Value Distributions of Wave Heights in the Open Ocean". Proc. A.S.C.E., volume 99, No. WW3, Aug. 1973.