

Aplicaciones de la transformada de Fourier a la resolución de problemas elásticos, estacionarios y dinámicos^(*)

Por EMILIO DE LA ROSA OLIVER

Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P.

Prof. Agregado de Matemáticas III.

E. T. S. de Ingenieros de C., C. y P., de Barcelona.

Presentamos en este trabajo la resolución matemática de algunos problemas elásticos clásicos utilizando el método de la transformada de Fourier, lo que lleva necesariamente a la introducción de las distribuciones temporadas que dan una interpretación conceptual rigurosa de los resultados clásicos obtenidos hace bastantes años. Es este aspecto el que da interés a este artículo, ya que los resultados son muy conocidos en la mayoría de los problemas tratados, además de poner de manifiesto la extraordinaria potencia del método empleado.

1. PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS TRATADOS

Vamos a hacer el estudio matemático de problemas elasto-estáticos y elasto-dinámicos, mediante el uso de la transformada de Fourier. De los primeros trataremos dos casos: I. Medio elástico infinito con fuerzas de masas conocidas. II. Semiespacio de Boussinesq con una carga lineal en el contorno o con una carga uniformemente distribuida en el contorno. Y de los segundos trataremos el caso III. Semiespacio de Boussinesq con una carga lineal moviéndose en el contorno a velocidad constante.

Recordamos las ecuaciones generales de la Elasticidad para un medio elástico, homogéneo, e isótropo.

a) Ecuaciones de equilibrio:

$$\tau_{ij,j} + F_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

b) Ecuaciones constitutivas:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{h,h} + 2\mu e_{ij} \quad i, j, h = 1, 2, 3$$

c) Ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant:

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

d) Ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell:

$$\Delta \tau_{ij} + \frac{1}{1+\sigma} (\tau_{hh})_{ij} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \delta_{ij} F_{h,h} - (F_{i,j} + F_{j,i})$$

siendo τ_{ij} las componentes del tensor de esfuerzos, u_i las componentes del vector desplazamiento, F_i las componentes del vector fuerza de masa por unidad de volumen de medio elástico, $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ las componentes del tensor de deformación, λ y μ los coeficientes de Lamé, σ el coeficiente de Poisson.

e) Si el medio ocupa $B \subset R^3$, $\partial B \equiv \Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_U$, siendo $\Gamma_T \cap \Gamma_U = \emptyset$ y las condiciones de contorno serían $\tau_{ij} n_j |_{\Gamma_T} = T_i$ $u_i |_{\Gamma_U} = U_i$ siendo (n_1, n_2, n_3) las componentes de la normal exterior a Γ_T .

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de julio de 1979.

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La coma significa derivación parcial, es decir $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

2. ECUACIONES GENERALES DE LA ELASTICIDAD PLANA

El caso de deformación plana se define, suponiendo el plano de dicha deformación sea $\{0, x_1, x_3\}$, como el estado elástico cuyo vector de desplazamiento tiene por componentes

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_3) \\ u_2 = 0 \\ u_3 = u_3(x_1, x_3) \end{cases}$$

con lo cual las ecuaciones de equilibrio interno se reducen a

$$\tau_{11,1} + \tau_{13,3} + F_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$\tau_{13,1} + \tau_{33,3} + F_3 = 0 \quad (2.2)$$

siendo

$$\tau_{11} = \tau_{11}(x_1, x_3), \quad \tau_{13} = \tau_{13}(x_1, x_3), \quad \tau_{33} = \tau_{33}(x_1, x_3), \quad F_1 = F_1(x_1, x_3), \quad F_3 = F_3(x_1, x_3),$$

siendo las demás componentes del tensor de tensiones nulas, *excepto* $\tau_{22} = \sigma(\tau_{11} + \tau_{33})$, y, por tanto, $\tau_{22} = \tau_{22}(x_1, x_3)$. Y las ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell se reducen a una única

$$\Delta(\tau_{11} + \tau_{33}) = \frac{1}{\sigma - 1} (F_{1,11} + F_{3,33})$$

que es equivalente a

$$[(1 - \sigma)\tau_{33} - \sigma\tau_{11}]_{,11} + [(1 - \sigma)\tau_{11} - \sigma\tau_{33}]_{,33} = 2\tau_{13,13} \quad (2.3)$$

En el caso de tensión plana las ecuaciones (2.1) y (2.2) son análogas, y la (2.3) es

$$[\tau_{33} - \sigma\tau_{11}]_{,11} + [\tau_{11} - \sigma\tau_{33}]_{,33} = 2(1 + \sigma)\tau_{13,13} \quad (2.4)$$

3. TRANSFORMADA DE FOURIER. APLICACIONES

3.1. Definición.

Dada una función definida en R^n con valores en \mathcal{C} $f: x \equiv (x_1 \dots x_n) \in R^n \rightarrow f(x) \in \mathcal{C}$, se denomina transformada de Fourier de f , y notamos $F(f) \equiv \hat{f}: y \equiv (y_1 \dots y_n) \rightarrow \hat{f}(y) \in \mathcal{C}$

$$(1) \quad \hat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} f(x) e^{-i x \cdot y} dx, \quad \text{siendo} \quad x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Generalmente suele considerarse $(2\pi)^{-n/2} dx = dm_n(x)$ o medida de Lebesgue normalizada, como la medida para considerar las normas de los llamados espacios $L^p(R^n)$ e incluso en el producto de convolución.

Es claro, según (1), que el primer espacio de funciones donde tiene sentido la definición es $L^1(R^n)$ y la aplicación F tiene buenas propiedades como, por ejemplo: (i) F es una aplicación lineal y acotada entre $L^1(R^n) \rightarrow L^\infty(R^n)$, siendo $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. (ii) \hat{f} es una función uniformemente continua. (iii) $|\hat{f}(y)| \rightarrow 0$ cuando $|y| \rightarrow \infty$. (iv) $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g}$ para $f, g \in L^1(R^n)$, etc., etc.

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Para el caso particular en que $\hat{f}(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene la llamada fórmula de inversión

$$(2) \quad f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i x \cdot y} dy$$

Pero en el caso en que $\hat{f}(y) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ no podríamos recuperar $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) \equiv \chi_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$, es decir, la función característica del intervalo $[-1,1]$, entonces $\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } y}{y} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Por ello, vamos a tratar de reducirnos a un subespacio de funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$ para el cual tengamos asegurado la validez de la fórmula de inversión

3.2. El espacio de funciones $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Se considera el conjunto de las funciones $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de decrecimiento rápido en el infinito, es decir, aquellas funciones indefinidamente diferenciables con continuidad de manera que la función y todas las derivadas tienden a cero más rápidamente que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$.

Este conjunto de funciones, que es un espacio vectorial naturalmente, puede dotarse de estructura topológica convexa mediante la familia de seminormas

$$(3) \quad \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D^\alpha \phi)(x)| \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Este espacio de funciones $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es matrizable, es completo, en el cual la derivación y la multiplicación por polinomios son operaciones cerradas, lineales y continuas. Además está densamente contenido en cualquier $L^p(\mathbb{R}^n)$; en particular $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Notación:

$$\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \quad D^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha_j \in \mathbb{N}$$

Dada $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se define la transformada de Fourier $F(\phi) = \hat{\phi}$

$$(4) \quad \hat{\phi}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-i x \cdot y} dm_n(x)$$

que está bien definida, ya que

$$|\hat{\phi}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)| (1 + |x|^2)^{n+1} \frac{dm_n(x)}{(1 + |x|^2)^{n+1}} \leq C(\phi) \int_0^\infty \int_{\Sigma} \frac{1}{(1 + \rho)^{n+1}} \rho^{n+1} d\Sigma d\rho < \infty$$

y además $\hat{\phi}(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

La aplicación F definida para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ tiene aún mejores propiedades, ya que puede probarse que: (i) es una aplicación lineal continua; (ii) es una aplicación sobre, es decir, vale la

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

fórmula de inversión, obteniéndose que

$$(5) \quad [F(\hat{\Phi}(y))](x) = \Phi(-x)$$

cumpléndose

$$(iii) \quad (D_j \Phi)^{\hat{}}(y) = y_j \hat{\Phi}(y) \qquad (iv) \quad (x_j \Phi)^{\hat{}} = -D_j \hat{\Phi} \quad \text{etc.}$$

3.3. El espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Una forma lineal y continua sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es lo que llamaremos una distribución (función generalizada) temperada. Es decir,

$u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, lineal y tal que $\forall \{\phi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_n \rightarrow 0$, entonces $u(\phi_n) \rightarrow 0$. Como $D(\mathbb{R}^n)$ está contenida en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ y por ello es una distribución. Se cumple que

- (i) Toda distribución de soporte compacto es temperada.
- (ii) La derivación y producto por polinomios son operaciones cerradas en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
- (iii) $u \in \mathcal{S}'$, $\phi \in \mathcal{S}$.

$$(D_j u)(\Phi) = -u(D_j \Phi)$$

$$(y_j u)(\Phi) = u(y_j \Phi)$$

Dado $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos la transformada de Fourier y notamos $F(u) = \hat{u}$, a aquella distribución temperada que actúa

$$(6) \quad \hat{u}(\Phi) = u(\hat{\Phi})$$

Como $\Phi \rightarrow \hat{\Phi}$ es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y como u es continua sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Esta definición generaliza las dadas hasta ahora, en el sentido que, por ejemplo, para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tendremos dos definiciones, la (1) y la dada desde el punto de vista de distribuciones temperadas, y ambas coinciden.

La aplicación F definida para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tiene las propiedades:

- (i) es una aplicación lineal y continua (débil).
- (ii) es una aplicación biunívoca de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
- (iii) y es válida la fórmula de inversión

$$(7) \quad \hat{\hat{u}} \equiv \check{u} \quad \text{siendo} \quad (\check{u}, \Phi) = (u, \check{\Phi}) \quad \forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \check{\Phi}(x) = \Phi(-x)$$

3.4. Aplicaciones.

En los problemas que trataremos vamos a necesitar algunas transformadas de Fourier para distribuciones temperadas. Y así:

3.4.1. Dada $u_1(x_1, x_2) = \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2}$ que es una distribución, o mejor dicho, asociada a ella existe una distribución temperada definida

$$(u_1, \Phi) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2} \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad \forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$$

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Para calcular \hat{u} , calculemoslos haciendo uso de la definición para funciones

$$\hat{u}_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2} e^{-i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dx_1 dx_2 = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(y_1 x_1)}{y_1^2 + y_2^2} e^{-|y_2| x_1} dx_1 = \frac{i y_1}{y_1^2 + y_2^2}$$

que también se le puede asociar una distribución temperada, \hat{u} .

Análogamente, dada $V_1(x_1, x_2) = \frac{-x_2}{y_1^2 + y_2^2}$ puede calcularse que $\hat{V}_1(y_1, y_2) = \frac{i y_2}{y_1^2 + y_2^2}$.

3.4.2. Dada $\hat{u}_2(y_1, y_2) = \frac{i y_1^2 y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}$, calcular $u(x_1, x_2)$.

De la fórmula de inversión

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i y_1^2 y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} e^{i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dy_1 dy_2 = \\ &= -\frac{x_2}{2} \int_0^{\infty} y_1 \cos(x_1 y_1) e^{-x_2 y_1} dy_1 = \frac{-x_2(x_2^2 - x_1^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

Análogamente, dada $\hat{V}_2(y_1, y_2) = \frac{i y_1 y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}$ cuya distribución asociada es de $\mathcal{S}'(R^2)$, se puede

determinar su inversa, $V_2(x_1, x_2) = \frac{-x_1(x_1^2 - x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2}$.

3.4.3. Y, por último, dada $\hat{u}_3(y_1, y_2) = \frac{i y_1^3}{(y_1^2 + y_2^2)^2}$ que como distribución es de $\mathcal{S}'(R^2)$, $u_3(x_1, x_2) =$

$$= \frac{-x_1(x_1^2 + 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2}, \text{ que como distribución también es temperada.}$$

Y dado $\hat{V}_3(y_1, y_2) = \frac{i y_2^3}{(y_1^2 + y_2^2)^2}$, entonces $V_3(x_1, x_2) = \frac{-x_2(x_2^2 + 3x_1^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2}$.

4. PROBLEMA I

Se trata de calcular $\{\tau_{11}(x_1, x_3), \tau_{13}(x_1, x_3), \tau_{33}(x_1, x_3), \tau_{22}(x_1, x_3)\}$ de manera que

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11,1} + \tau_{13,3} &= -F_1 \\ \tau_{13,1} + \tau_{33,3} &= -F_2 \\ [(1-\sigma)\tau_{33} - \sigma\tau_{11}]_{,11} + [(1-\sigma)\tau_{11} - \sigma\tau_{33}]_{,33} &= 2\tau_{13,13} \end{aligned} \right\} \Omega \equiv R^2$$

Siendo $F_1, F_3 \in \mathcal{S}'(R^2)$ que corresponde al caso de un medio elástico en situación elástica de deformación plana y con fuerza de masa dada (F_1, F_3) . Aplicando la transformación de Fourier a las ecuaciones

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

anteriores obtenemos

$$i y_1 \hat{\tau}_{11}(y) + i y_3 \hat{\tau}_{13}(y) = -\hat{F}_1(y)$$

$$i y_1 \hat{\tau}_{13}(y) + i y_3 \hat{\tau}_{33}(y) = -\hat{F}_3(y)$$

$$(i y_1)^2 [(1-\sigma) \hat{\tau}_{33}(y) - \sigma \hat{\tau}_{11}(y)] + (i y_3)^2 [(1-\sigma) \hat{\tau}_{11}(y) - \sigma \hat{\tau}_{33}(y)] = 2(i y_1)(i y_3) \hat{\tau}_{13}(y)$$

que es un sistema algebraico, de donde podemos obtener

$$\hat{\tau}_{11}(y) = \frac{[(1-\sigma)|y|^2 + y_3^2] i y_1 \hat{F}_1(y) - [y_1^2 - \sigma|y|^2] i y_3 \hat{F}_3(y)}{(1-\sigma)|y|^4}$$

$$\hat{\tau}_{33}(y) = \frac{[(1-\sigma)|y|^2 + y_1^2] i y_3 \hat{F}_3(y) - [y_3^2 - \sigma|y|^2] i y_1 \hat{F}_1(y)}{(1-\sigma)|y|^4}$$

$$\hat{\tau}_{13}(y) = \frac{[y_3^2 - \sigma|y|^2] i y_3 \hat{F}_1(y) + [y_1^2 - \sigma|y|^2] i y_1 \hat{F}_3(y)}{(1-\sigma)|y|^4}; |y|^2 = y_1^2 + y_3^2$$

y de ellas mediante la fórmula de inversión

$$\tau_{ij}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \hat{\tau}_{ij}(y_1, y_3) e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

$$\tau_{11}(x) = \frac{1}{2\pi(1-\sigma)} \iint_{R^2} \frac{i y_1 [y_3^2 + (1-\sigma)|y|^2] \hat{F}_1(y) - i y_3 [y_1^2 - \sigma|y|^2] \hat{F}_3(y)}{|y|^4} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

$$\tau_{33}(x) = \frac{1}{2\pi(1-\sigma)} \iint_{R^2} \frac{i y_3 [y_1^2 + (1-\sigma)|y|^2] \hat{F}_3(y) - i y_1 [y_3^2 - \sigma|y|^2] \hat{F}_1(y)}{|y|^4} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

$$\tau_{13}(x) = \frac{1}{2\pi(1-\sigma)} \iint_{R^2} \frac{i y_3 [y_3^2 - \sigma|y|^2] \hat{F}_1(y) + i y_1 [y_1^2 - \sigma|y|^2] \hat{F}_3(y)}{|y|^4} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

$$\tau_{22}(x) = \sigma(\tau_{11} + \tau_{33}) = \frac{\sigma}{2\pi(1-\sigma)} \iint_{R^2} \frac{i y_1 \hat{F}_1(y) + i y_3 \hat{F}_3(y)}{|y|^2} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

En el caso particular:

$$F_1(x_1, x_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{F}_1(y) = 0$$

$$F_3(x_1, x_3) = P \delta(x_1, x_3) \quad \hat{F}_3(y) = \frac{P}{2} \quad P = \text{cte}$$

$$\tau_{33}(x) = \frac{P}{2\pi(1-\sigma)} \iint_{R^2} \frac{i y_3 y_1^2 + i(1-\sigma) y_3 |y|^2}{|y|^4} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

$$\tau_{11} = \frac{P}{2\pi(1-\sigma)} \iint_{R^2} \frac{-iy_3 y_1^2 + i\sigma y_3 |y|^2}{|y|^4} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

$$\tau_{13} = \frac{P}{2\pi(1-\sigma)} \iint_{R^2} \frac{i y_1^3 - i\sigma y_1 |y|^2}{|y|^4} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

Hemos de calcular

$$(i) \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{i y_1^2 y_3}{|y|^4} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{i y_3}{|y|^2} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

$$(iii) \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{i y_1^3}{|y|^4} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

$$(iv) \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{i y_1}{|y|^2} e^{i(x_1 y_1 + x_3 y_3)} dy_1 dy_3$$

La (i) da $\frac{x_3(x_1^2 - x_3^2)}{2|x|^4}$, (ii) arroja $\frac{-x_3}{|x|^2}$ (iii) $\rightarrow \frac{-x_1(x_1^2 + 3x_3^2)}{2|x|^4}$ (iv) $\rightarrow \frac{-x_1}{|x|^2}$

Luego

$$\tau_{11}(x_1, x_3) = \frac{P}{2\pi(1-\sigma)} \left[+ \frac{x_3(x_1^2 - x_3^2)}{2|x|^4} - \frac{\sigma x_3}{|x|^2} \right] = + \frac{P x_3}{4\pi(1-\sigma)|x|^2} \left[\frac{x_1^2 - x_3^2}{|x|^2} - 2\sigma \right]$$

$$\tau_{33}(x_1, x_3) = \frac{P}{2\pi(1-\sigma)} \left[\frac{x_3(x_1^2 - x_3^2)}{2|x|^4} - \frac{(1-\sigma)x_3}{|x|^2} \right] = \frac{P x_3}{4\pi(1-\sigma)|x|^2} \left[\frac{x_1^2 - x_3^2}{|x|^2} - 1 + \sigma \right]$$

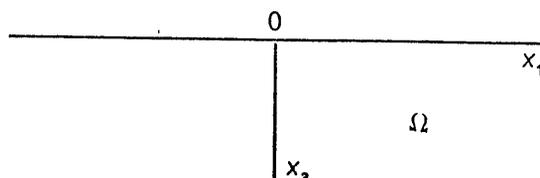
$$\tau_{13}(x_1, x_3) = \frac{P}{2\pi(1-\sigma)} \left[- \frac{x_1(x_1^2 + 3x_3^2)}{2|x|^4} + \frac{\sigma x_1}{|x|^2} \right] = \frac{P x_1}{4\pi(1-\sigma)|x|^2} \left[- \frac{x_1 + 3x_3^2}{|x|^2} + 2\sigma \right]$$

siendo $\tau_{22} = \sigma(\tau_{11} + \tau_{33})$.

5. PROBLEMA II

Se trata de calcular $\{\tau_{11}(x_1, x_3), \tau_{13}(x_1, x_3), \tau_{33}(x_1, x_3), u_1(x_1, x_3), u_3(x_1, x_3); \tau_{22}(x_1, x_3)\}$ de manera que

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11,1} + \tau_{13,3} &= 0 \\ \tau_{13,1} + \tau_{33,3} &= 0 \\ [(1-\sigma)\tau_{33} - \sigma\tau_{11}]_{,11} + [(1-\sigma)\tau_{11} - \sigma\tau_{33}]_{,33} &= 2\tau_{13,13} \end{aligned} \right\} \Omega \equiv R \times R^+$$



APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

que es el semiespacio de Boussinesq, sin fuerzas de masa ($F_1 = F_3 = 0$) y en el contorno $x_3 = 0$ tenemos que $\tau_{13}(x_1, 0) = 0$ y conocemos o las fuerzas en él o los desplazamientos.

Utilizaremos la transformada de Fourier respecto de $x_1 - \infty < x_1 < \infty$ dejando x_3 como parámetro. Entonces

$$\hat{f}(y_1, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_3) e^{-i x_1 y_1} dx_1$$

con lo cual, las ecuaciones de equilibrio interno

$$\begin{cases} i y_1 \hat{\tau}_{11} + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{\tau}_{13} = 0 \\ i y_1 \hat{\tau}_{13} + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{\tau}_{33} = 0 \end{cases}$$

que unidas a las ecuaciones constitutivas

$$\tau_{33} = \lambda (u_{1,1} + u_{3,3}) + 2\mu u_{3,3}$$

$$\tau_{11} = \lambda (u_{1,1} + u_{3,3}) + 2\mu u_{1,1}$$

$$\tau_{13} = \mu (u_{1,3} + u_{3,1})$$

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{11} - \lambda \left(i y_1 \hat{u}_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{u}_3 \right) - 2i\mu y_1 \hat{u}_1 = 0 \\ \hat{\tau}_{33} - \lambda \left(i y_1 \hat{u}_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{u}_3 \right) - 2\mu \hat{u}_3 = 0 \\ \hat{\tau}_{13} - \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3} + i y_1 \hat{u}_3 \right) = 0 \end{cases}$$

Forman un sistema lineal, homogéneo en $\hat{\tau}_{11}$, $\hat{\tau}_{13}$, $\hat{\tau}_{33}$, \hat{u}_1 , \hat{u}_3 que para que tenga solución, el determinante

$$\begin{pmatrix} i y_1 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i y_1 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(\lambda i y_1 + 2i\mu y_1) & -\lambda \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda i y_1 & -\lambda \frac{\partial}{\partial x_3} - 2\mu \\ 0 & 1 & 0 & -\mu \frac{\partial}{\partial x_3} & -i\mu y_1 \end{pmatrix} = \mu (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - y_1^2 \right]^2$$

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

actuando sobre cada $\hat{\tau}_{11}$, $\hat{\tau}_{13}$, $\hat{\tau}_{33}$, \hat{u}_1 , \hat{u}_3 ha de ser cero. Tomemos genéricamente $\hat{g}(y_1, y_3)$ que ha de cumplir $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - y_1^2\right)^2 \hat{g}(y_1, y_3) = 0$.

Luego

$$\hat{g}(y_1, x_3) = [A(y_1) + B(y_1)x_3] e^{-|y_1|x_3} + [C(y_1) + D(y_1)] e^{+|y_1|x_3}$$

Para asegurarnos que

$$|\hat{g}(y_1, x_3)| \rightarrow 0 \text{ para } x_3 \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} C(y_1) \equiv 0 \\ D(y_1) \equiv 0 \end{cases}$$

y obtenemos la representación de

$$\hat{g}(y_1, x_3) = |A(y_1) + B(y_1)x_3| e^{-|y_1|x_3}$$

Consideramos el caso particular de que $\begin{cases} \tau_{13}(x_1, 0) = 0 \\ \tau_{33}(x_1, 0) = \rho(x_1) \end{cases}$
con lo cual $\frac{\partial \hat{\tau}_{33}(x_1, 0)}{\partial x_3} = 0$.

Como

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{33}(y_1, x_3) &= [A(y_1) + B(y_1)x_3] e^{-|y_1|x_3} \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{33}}{\partial x_3}(y_1, x_3) &= [B(y_1) - (A(y_1) + B(y_1)x_3)|y_1|] e^{-|y_1|x_3} \end{aligned}$$

Para $x_3 = 0$, obtenemos $B(y_1) - A(y_1)|y_1| = 0$.

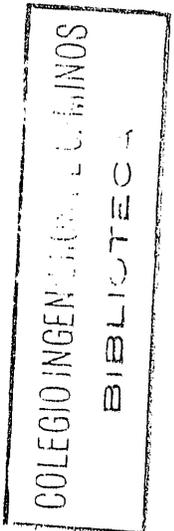
Tomamos $\begin{cases} A(y_1) = \hat{\rho}(y_1) \\ B(y_1) = |y_1| \hat{\rho}(y_1) \end{cases}$

Por consiguiente

$$\hat{\tau}_{33}(y_1, x_3) = \hat{\rho}(y_1) [1 + |y_1|x_3] e^{-|y_1|x_3}$$

y sustituyendo en las demás, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{13}(y_1, x_3) &= -ix_3 \hat{\rho}(y_1) y_1 e^{-|y_1|x_3} \\ \hat{\tau}_{11}(y_1, x_3) &= \hat{\rho}(y_1) [1 - x_3 |y_1|] e^{-|y_1|x_3} \\ \hat{u}_1(y_1, x_3) &= -\frac{i \hat{\rho}(y_1)}{2|y_1|} [1 - 2\sigma - |y_1|x_3] e^{-|y_1|x_3} \\ \hat{u}_2(y_1, x_3) &= -\frac{\hat{\rho}(y_1)}{2\mu|y_1|} [2 - 2\sigma + |y_1|x_3] e^{-|y_1|x_3} \end{aligned} \right\}$$



APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

de donde obtendríamos

$$\tau_{11}(x_1, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_{11}(y_1, x_3) e^{i x_1 y_1} dy_1$$

$$\tau_{13}(x_1, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_{13}(y_1, x_3) e^{i x_1 y_1} dy_1$$

$$\tau_{33}(x_1, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_{33}(y_1, x_3) e^{i x_1 y_1} dy_1$$

$$u_1(x_1, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_1(y_1, x_3) e^{i x_1 y_1} dy_1$$

$$u_3(x_1, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_3(y_1, x_3) e^{i x_1 y_1} dy_1$$

Carga lineal:

$$p(x_1) = \tau_{33}(x_1, 0) = P \delta(x_1) \qquad \hat{p}(y_1) = \frac{P}{\sqrt{2\pi}}$$

obtenemos

$$\tau_{11}(x_1, x_3) = -\frac{2 P x_3 x_1^2}{\pi |x|^4}$$

$$\tau_{33}(x_1, x_3) = -\frac{2 P x_3^3}{\pi |x|^4}$$

$$\tau_{13}(x_1, x_3) = -\frac{2 P x_3^2 x_1}{\pi |x|^4}$$

$$\tau_{22}(x_1, x_3) = -\frac{2 P x_3 \sigma}{\pi |x|^2}$$

Carga uniforme:

$$p(x_1) = \tau_{33}(x_1, 0) = p \chi[-a, a]$$

$$\hat{p}(y_1) = \frac{P}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-i x_1 y_1} dy_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \frac{\text{sen } y_1 a}{y_1}$$

obtenemos

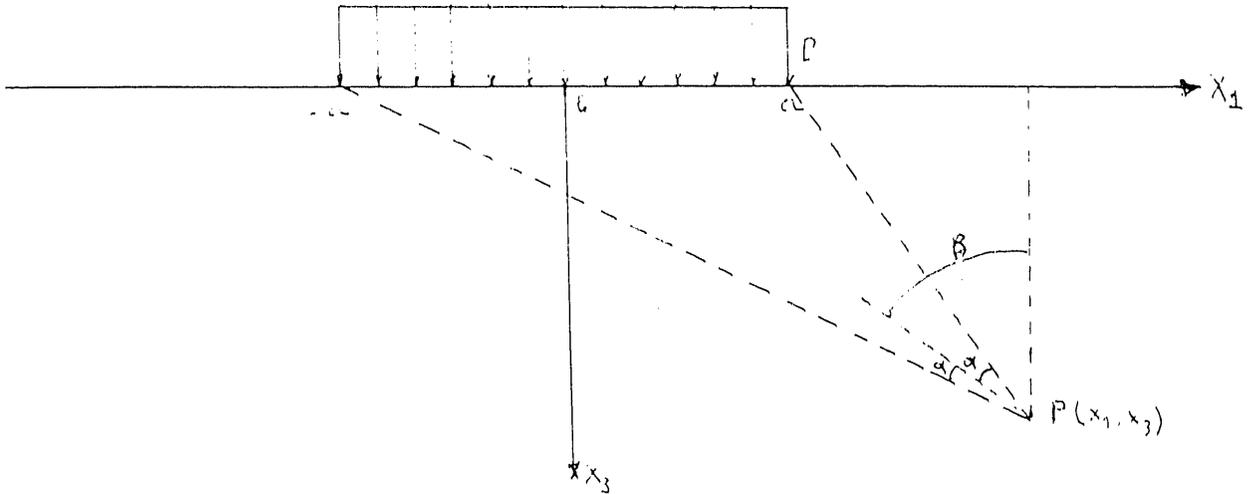
$$\tau_{11}(x_1, x_3) = -\frac{P}{\pi} [2\alpha - \text{sen } 2\alpha \cos 2\beta]$$

$$\tau_{33}(x_1, x_3) = -\frac{P}{\pi} [2\alpha + \text{sen } 2\alpha \cos 2\beta]$$

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

$$\tau_{13}(x_1, x_3) = \frac{-P}{\pi} \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 2\beta$$

$$\tau_{22} = \sigma(\tau_{11} + \tau_{33}) = -\frac{P\sigma}{\pi} 4\alpha$$



NOTA.—Ver apuntes de Geotecnia y Cimientos.

6. PROBLEMA III

Tratamos problemas elásticos-dinámicos planos (deformación plana), cuando no existan fuerzas de masa

$$\begin{cases} \tau_{11,1} + \tau_{12,2} = \rho \ddot{u}_1 \\ \tau_{12,1} + \tau_{22,2} = \rho \ddot{u}_2 \end{cases}$$

y la ecuación de compatibilidad de Beltrami-Michell

$$\Delta(\tau_{11} + \tau_{22}) - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \rho(\ddot{u}_{1,1} + \ddot{u}_{2,2}) = 0$$

Pero de las ecuaciones constitutivas $\tau_{11} + \tau_{22} = 2(\lambda + \mu)(u_{1,1} + u_{2,2})$.

Luego queda

$$\left[\Delta - \frac{1}{c_1^2} D_t^2 \right] (\tau_{11} + \tau_{22}) = 0$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$$D_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$c_1^2 = \frac{1 + 2\mu}{\rho}$$

c_1 = velocidad de las ondas de dilatación.

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Derivando las ecuaciones constitutivas obtenemos

$$\tau_{11,11} - \tau_{22,22} = \rho (\ddot{u}_{1,1} - \ddot{u}_{2,2}) = \frac{\rho}{2\mu} (\ddot{\tau}_{11} - \ddot{\tau}_{22})$$

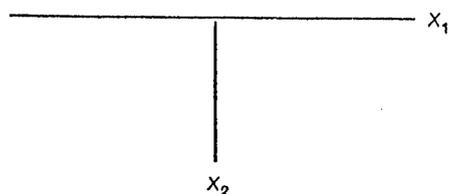
$$\tau_{11,11} - \tau_{22,22} = \frac{1}{2c_2^2} (\ddot{\tau}_{11} - \ddot{\tau}_{22}) \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

c_2 = velocidad de las ondas de distorsión.

Derivando las ecuaciones de equilibrio obtenemos

$$(\tau_{11} + \tau_{22})_{,12} + \left(\Delta - \frac{1}{c_2^2} D_t^2 \right) \tau_{12} = 0$$

Caso de un medio elástico semi-infinito con presión variable en el contorno.



Haciendo un cambio de escala temporal.

$$\text{c.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{22}(x_1, 0, t) = -p(x_1, t) \\ \tau_{12}(x_1, 0, t) = 0 \end{array} \right.$$

Aplicando la transformada de Fourier en (x_1, t) , en las ecuaciones de equilibrio

$$\hat{u}(y_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, t) e^{-i(x_1 y_1 + t \tau)} dx_1 d\tau$$

$$\left. \begin{array}{l} i y_2 \hat{\tau}_{12} + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\tau}_{22} = \rho (i \tau c_1)^2 \hat{u}_2 = -\tau^2 (\lambda + 2\mu) \hat{u}_2 \\ i y_1 \hat{\tau}_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\tau}_{12} = \rho (i \tau c_1)^2 \hat{u}_1 = -\tau^2 (\lambda + 2\mu) \hat{u}_1 \end{array} \right\}$$

y en las ecuaciones constitutivas

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\tau}_{11} = i y_1 (\lambda + 2\mu) \hat{u}_1 + \lambda \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} \\ \hat{\tau}_{22} = i y_1 \lambda \hat{u}_1 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} \\ \tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} + i y_1 \hat{u}_2 \right) \end{array} \right. \quad \text{entrando con éstas en las anteriores}$$

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

obtenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} [\beta^2 (\tau^2 - y_1^2) + D^2] \hat{u}_1 + (\beta^2 - 1) i y_1 D \hat{u}_2 &= 0 \\ (\beta^2 - 1) i y_1 D \hat{u}_1 + [\beta^2 (D^2 + \tau^2) - y_1^2] \hat{u}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \beta^2 = 1 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$$

Llamando $z_1^2 = y_1^2 - \tau^2$ $z_2^2 = y_1^2 - \rho^2 \tau^2$

Tanto \hat{u}_1 como \hat{u}_2 cumplen $(D^2 - z_1^2)(D^2 - z_2^2) \hat{u} = 0$.

Luego

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(y_1, x_2, \tau) &= A_1 e^{-z_1 x_2} + A_2 e^{-z_2 x_2} \\ \hat{u}_2(y_1, x_2, \tau) &= B_1 e^{-z_1 x_2} + B_2 e^{-z_2 x_2} \end{aligned}$$

para que $x_2 \rightarrow \infty$, $u_{\tau} \rightarrow 0$.

Entrando en el sistema, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} z_1 A_1 + i y_1 B_1 &= 0 \\ z_2 B_2 - i y_1 A_2 &= 0 \\ z_1 A_1 + i y_1 B_1 &= 0 \\ z_2 B_2 - i y_1 A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Condiciones de entorno:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{22}(y_1, x_2, \tau) &= \mu [i y_1 (\beta^2 - 2) \hat{u}_1 + \beta^2 D \hat{u}_2] \\ \hat{\tau}_{22}(y_1, 0, \tau) &= -\hat{\rho}(y_1, \tau) = \mu [i y_1 (\beta^2 - 2) \hat{u}_1 + \beta^2 D u_2]_{x_2=0} = 0 \\ \hat{\tau}_{12}(y_1, x_2, \tau) &= 0 = [D \hat{u}_1 + i y_1 \hat{u}_2]_{x_2=0} = 0 \\ \mu [\beta^2 (z_1 B_1 - i y_1 A_1) + 2 i y_1 (A_1 + A_2)] &= \hat{\rho}(y, \tau) \\ (z_1 A_1 - i y_1 B_1) + (z_2 A_2 - i y_1 B_2) &= 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} (2)$$

Luego

$$\left| \begin{array}{cccc} z_1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i y_1 & z_2 \\ z_1 & -i y_1 & z_2 & -i y_1 \\ i y_1 (2 - \beta^2) & z_1 \beta^2 & 2 i y_1 & 0 \end{array} \right|$$

Sistema (1) (2)

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\hat{\rho}}{\mu} \frac{i y_1 (y_1^2 + z_2^2)}{(y_1^2 + z_2^2)^2 - 4 z_1 z_2 y_1^2} & B_1 &= \frac{\hat{\rho}}{\mu} \frac{z_1 (y_1^2 + z_2^2)}{(y_1^2 + z_2^2)^2 - 4 z_1 z_2 y_1^2} \\ A_2 &= \frac{-\hat{\rho}}{\mu} \frac{2 i y_1 z_1 z_2}{(y_1^2 + z_2^2)^2 - 4 z_1 z_2 y_2^2} & B_2 &= \frac{-\hat{\rho}}{\mu} \frac{2 z_1 y_1^2}{(y_1^2 + z_2^2)^2 - 4 z_1 z_2 y_1^2} \end{aligned}$$

Con lo cual tenemos \hat{u}_1, \hat{u}_2 , y, por tanto, u_1, u_2 .