REVISTA DE OBRAS PUBLICAS. Septiembre 1979. Págs. 795 a 801.

Utilización de teorías probabilistas para calibrar cuadros de valores de frecuencias admisibles de inundaciones o de otro fenómeno natural

Por J. M. ANTON CORRALES

Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P.
Catedrático de la E.T.S. Ingenieros Agrónomos.
Direc. Gral. de Carreteras, MOPU.

En el estilo de las teorías probabilistas de seguridad, se propone un método que permite calcular el período de retorno óptimo de diseño de una obra que hará frente a acciones cuyos parámetros sigan una ley de valores extremos de tipo I y II, bajo hipótesis simplificadas (especialmente no teniendo en cuenta errores de hipótesis) que permiten llevar los cálculos a un año cualquiera. El período óptimo es proporcional al coste de los daños, e inversamente proporcional al coste de la obra.

INTRODUCCION

a) El período de retorno.

Ciertas obras naturales se diseñan para aguantar las inclemencias esperadas en un cierto período; ello se obtiene a veces calculándolas para cargas, crecidas, olas de "período de retorno especificado". Esto es muy frecuente en todos los diseños hidráulicos, por ejemplo de drenaje de carreteras, caso para el cual fue pensado este estudio, pero es extensible a muchos fenómenos naturales.

Se ve intuitivamente que si el período de retorno es muy grande, los caudales calculados (en el caso de caudales) son muy grandes y el sistema de drenaje va a ser sumergido con demasiada frecuencia. Entre esos casos extremos visiblemente poco satisfactorios debe de haber un óptimo para el período de retorno en cada caso. Ese óptimo debe de aumentar si las consecuencias de sobrepasar los caudales de cálculo son más severos y debe de disminuir si las inversiones se hacen más gravosas, al aumentar los valores de cálculo de las acciones.

Se prescinde aquí del caso de varios óptimos locales, que puede presentarse sobre todo si se puede elegir entre varias soluciones técnicas.

b) Similitudes con la determinación del coeficiente de seguridad.

Existen, pues, similitudes sobre el problema de determinar "períodos de retorno" y el de determinar los "coeficientes de seguridad" a tomar para una estructura. El autor de estas líneas ha participado en los trabajos del Joint Committee on Structural Safety (Ref. 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.).

El problema para una estructura es más complejo debido a la intervención de errores en las hipótesis de cálculo, incertidumbre en los materiales y a fenómenos de superposición de cargas y debido también a los riesgos para vidas humanas.

Para el drenaje se puede despreciar en primera aproximación la influencia de errores de hipótesis de cálculo; con ello son independientes las probabilidades de ruina anuales, y todo se refiere a una base de tiempo anual. Sin embargo, el considerar errores de hipótesis, por ejemplo incertidumbres en la estimación de avenidas o en el cálculo de sus consecuencias exige considerar como base de tiempo la duración de la obra, lo que cambia formalmente todas las fórmulas y razonamientos.

Es debido a que estos errores son los mismos año tras año; en consecuencia, las probabilidades de accidente son mayores los primeros años, y sobre todo el primero que juega el papel de una prueba de carga (véase Ref. 1 del autor). Este fenómeno es especialmente importante en estructuras, sobre todo para cargas permanentes; es imposible comparar la seguridad frente a cargas permanentes y frente a otras acciones sin tenerlo en cuenta, lo que debería hacerse con teorías de inversiones y se hace en la práctica tomando períodos de referencia largos, de cincuenta años, como "vida de la estructura". El autor de estas líneas tuvo largas discusiones en una Comisión de la C.E.C.M. defendiendo el período de cincuenta años frente al miembro italiano (C. Manuzio) que proponía un año por haber tratado previamente problemas de cargas meteorológicas (para líneas aéreas, normas C.I.G.R.E.). Aquí, prescindiendo de errores en hipótesis y permanentes, nos vemos conducidos a tomar período de referencia anual.

No se debe olvidar el liderazgo internacional que sostuvieron en los años 50 E. Torroja y A. Páez sobre teorías probabilistas de seguridad en estructuras (recuérdese su libro "La determinación del coeficiente de seguridad en las distintas obras", publicado por el Instituto de la Construcción, hoy Instituto Torroja).

CAPITULO I

DATOS BASICOS: LEYES DE VALORES EXTREMOS

Se define un modelo esquemático que utiliza los factores presentes; el confeccionar el modelo puede complicarlo considerablemente.

a) Cálculos técnicos.

La obra se calcula para una magnitud S de cálculo correspondiente a un "período de retorno" dado. En el caso de drenaje puede ser un caudal Q, que se estima por métodos hidrológicos, por ejemplo por una fórmula racional del tipo CIA/3,6 a partir de I estimado para un período de retorno dado y para un tiempo de concentración conocido (no se tendrá en cuenta de cómo varía I al variar el tiempo de concentración en función del sistema de drenaje).

b) Estadística de valores extremos.

Sea S una variable aleatoria, que varía con el tiempo. De hecho tenemos un proceso aleatorio, pero puede que nos baste con las leyes $F_N(S)$, probabilidad de no sobrepasar S en un intervalo de N años.

S representa los máximos de la variable de cálculo, Q por ejemplo.

$F_N(S)$ es la función de distribución de los valores extremos de S para N dado. En general $1 - F_N(S)$ es entonces la función de distribución del tiempo N que se tarda en alcanzar S dado.

A partir de la ley anual $F(S) = F_1(S)$ se deduce, tras suponer independientes los fenómenos de años diferentes, $F_N(S) = (F_1)^N$.

Para intervalos pequeños, menores de un año por ejemplo, los procesos aleatorios se complican en cuanto que los intervalos ya no son independientes y que hay tendencias, por ejemplo estacionales.

En cambio, el proceso se simplifica al crecer N en años, porque para N entre uno y cien años puede ser representado muchas veces por una de las leyes descritas a continuación.

c) Ley de valores extremos de tipo I y de tipo II.

Así, en la referencia 11 se demuestra que si $F(S)$ es "del tipo exponencial I", $F_N(S)$ tiende a una ley de valores extremos de tipo I al crecer N. El límite se aproxima rápidamente si $F_1(S)$ es exponencial $(1 - \exp.(-L(S-M)))$ (truncada o no a la izquierda, para prescindir de valores negativos de S).

Si la ley $F(S)$ es normal se alcanza más lentamente el límite.

La ley de valores extremos de tipo I es:

$$F_N = - \exp.(- N \exp.(L(S - M))) \qquad (1)$$

Con el cambio $x = (L S - L M - L \cdot L n(N))/L$, la media es la moda más 0,577/L, la desviación típica 1,28/L. La moda en un año es M.

A veces es ventajoso considerar que es el logaritmo del valor S el que toma una ley de tipo exponencial (como $1 - S^{-\lambda}/K$) (tiene sus ventajas, por ejemplo no es negativa, la ley de log. normal sigue "teoremas de suma y límite" para el producto, etc.).

Entonces ponemos s en minúscula, y $L n(s)$ sigue una ley asintótica de valores extremos de tipo I, y el cambio de variables $L n s = S$ en 1) da, con la notación $K = \exp.(-L M)$, λ para L, $F_N = \exp.(-N s^{-\lambda}/K)$.

La forma de la ley cambia con λ (que es > 0). Para λ dado los fractiles (moda, mediana...) aumentan proporcionalmente a $K^{-1/\lambda} N^{1/\lambda} = e^{\mu} N^{1/\lambda}$; ($\mu = M$).

d) Período de retorno.

No conociendo una definición consagrada, podemos tomar para el período T_S de retorno ("return period" en inglés; los franceses dicen: "intervalle de récurrence"...) del valor S de la variable aleatoria considerada:

— "La esperanza matemática del tiempo en que se alcanza S".
Para leyes de valores extremos, de tipo I o II, sale $T = -1/L n(F_1(S))$.

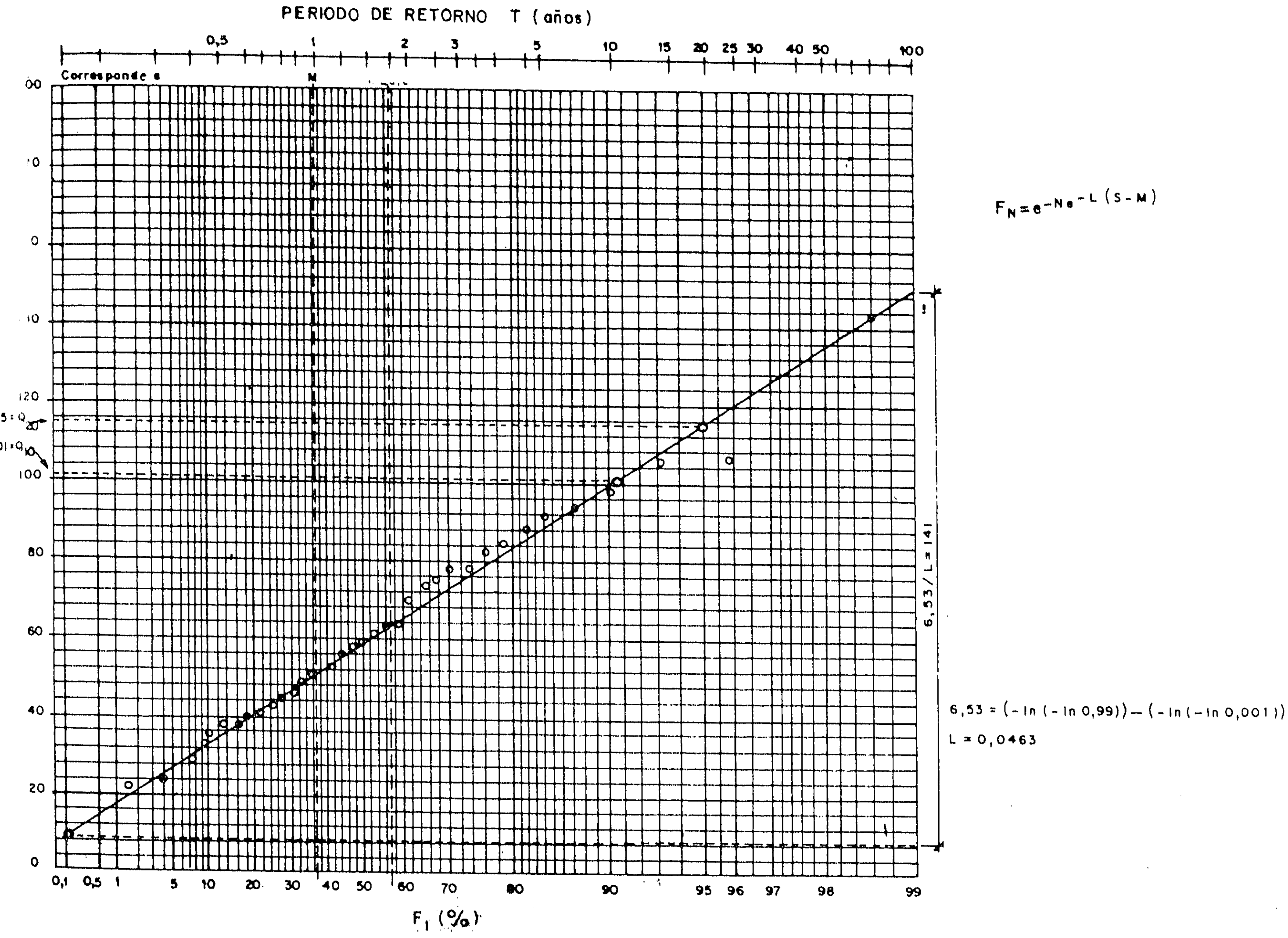

Fig. 1.—Ley de valores extremos Tipo. I. (Ejemplo adoptado de Ref. 10.)

— El intervalo de tiempo en el que la media del número de veces en que se sobrepasa S es igual a 1.

— La inversa de la frecuencia anual (que puede ser mayor que 1), es decir, número medio de ocurrencias por año.

Las tres definiciones llevan a resultados análogos, lo que no discutimos (aunque convendría tener una definición debidamente normalizada), y adoptamos la fórmula suficientemente representativa:

$$T = -\frac{1}{Ln\,(F_1\,(S))} = \frac{1}{1 - F_1\,(S)} + o\,(1 - F_1\,(S))$$

Obsérvese que $T \neq \dfrac{1}{1 - F_1\,(S)}$ si T es grande (mayor de 10); es decir, si T es 20 años la probabilidad en un año es 1/20. En todo caso la frecuencia en 20 años es 1, en 100 años es 5. Lo que no es el período de retorno es la inversa de la probabilidad anual, sobre todo si el período es pequeño (la probabilidad anual $1 - F_1\,(S)$ no puede sobrepasar 1, la frecuencia $1/T$ sí porque en un año se puede sobrepasar varias veces); se observa que muchos autores toman $T = 1/F_1\,(S)$, lo que es muy perturbador para períodos inferiores a 5 años.

Nos queda para una ley de valores extremos de tipo I:

$$T = \exp.\,(L \cdot (S - M)) \qquad (2)$$

de tipo II:

$$T = S^{\lambda} \cdot K \qquad (3)$$

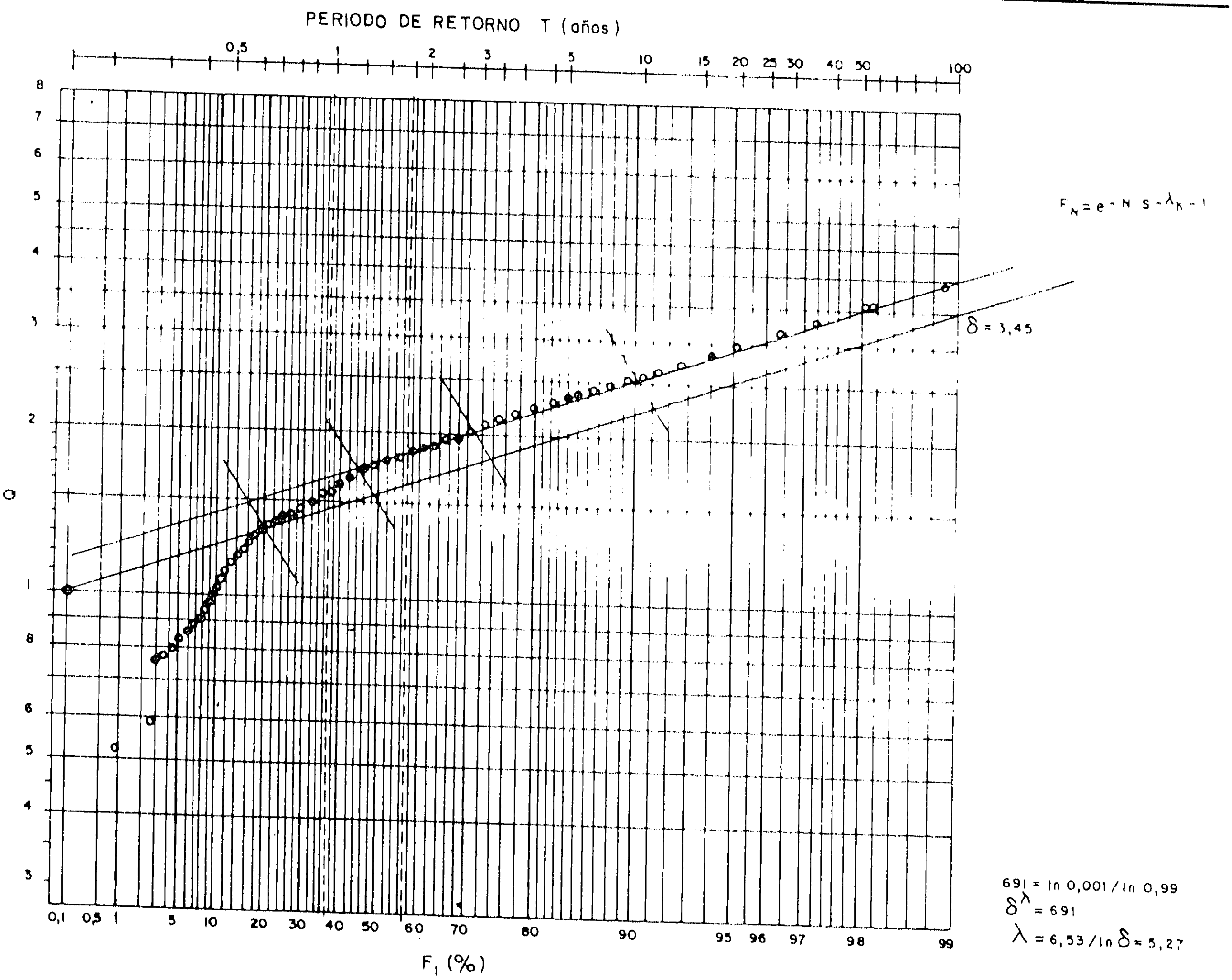

Fig. 2.—Ley de valores extremos Tipo II. (Ejemplo adoptado de Ref. 8.)

e) Ejemplos gráficos.

Se usan unas escalas gráficas tales que las funciones de distribución sean rectas; x e y se miden en centímetros (también existen métodos analíticos en Ref. 11).

En las figuras 1 y 2 las abscisas siguen la ley $P = \exp. (-\exp. (-x))$ y $T = \exp. (x)$ representa períodos de retorno.

Si la ley es de valores extremos de tipo I, basta tomar $y = \alpha S + \beta$; si es de tipo II $y = \alpha L n (s) + \beta$.

Una serie muestral ($S_1 < S_2 < \ldots < S_n$) se representa por los puntos ($S_i, P_i = (2 \cdot i - 1)/2 \cdot n$) que se aproximan por una recta que será la función de distribución; la función se adapta bien a la serie en sus valores extremos si los puntos a la derecha están alineados, tomándose esa recta preferentemente como ley de valores extremos. En la figura se indican varias determinaciones gráficas posibles.

La figura 1 se tomó de un ejemplo de pequeño río español de Ref. 10 con la ley de valores extremos de tipo I. Nótese que $L \cdot Q_{20} \neq 5{,}33$ y que $L\, Q_{10} \neq 4{,}65$ en ese ejemplo.

La figura 2 se adoptó de datos de Ref. 8 que usa leyes log. normales; está hecha para valores extremos de tipo 2.

Se refiere a una estación de aforos del Misisipi.

Nótese que $\lambda \neq 5{,}25$.

Los parámetros locales adimensionales $L \cdot Q$ y λ vienen a ser cualitativamente como una inversa de la dispersión.

Así "se ajusta una ley de Gumbell con dos parámetros" (en algún método clásico hidráulico "de Gumbell" no hay más que un parámetro; prácticamente es como si $(L \cdot Q)$ viniese prefijado).

CAPITULO II

DATOS BASICOS ECONOMICOS

a) Consecuencias de sobrepasar valores de cálculo.

Dependen del caso. Para avenidas las consecuencias catastróficas se refieren a avenidas de 500 años.

En el drenaje de carreteras se consideran avenidas menores de cálculo. El excederlas afecta al usuario, a la autoridad que administra la carretera y a las zonas que ésta sirve.

Las afecciones dependen del tráfico y del coste de las reparaciones.

El cortar las comunicaciones de una zona es especialmente grave si no hay itinerarios alternativos.

Pueden considerarse daños para los márgenes de la carretera: inundaciones aguas arriba, erosivas aguas abajo, etc.

Se representan esos daños por C_q, C_q estando medido en general unidades económicas, a veces en ciudades de valor más o menos cualitativos.

Se supone que el dimensionamiento se descompone en secciones independientes calculadas para caudales Q_i de cálculo correspondientes a períodos de retorno T_i, y que el sobrepasar esos caudales causa daños C_i, que se suman a los daños que corresponden a sobrepasar el caudal Q_j de otra sección independiente para dar el daño total C_q:

$$C_q = \Sigma C_i$$

Diremos que se trata de "verificaciones independientes".

El coste tiene entonces la forma de la figura 3. Los daños son más severos para avenidas de períodos de retorno mayores (si el sistema está concebido con lógica).

b) Coste de un sistema de drenaje.

Los casos de pequeña obra de paso, de un tubo o de una cuneta son distintos, pero en general el corte crece "menos que proporcionalmente con Q", y tomamos la ley $k \cdot Q^b$ para una "sección de comprobación independiente".

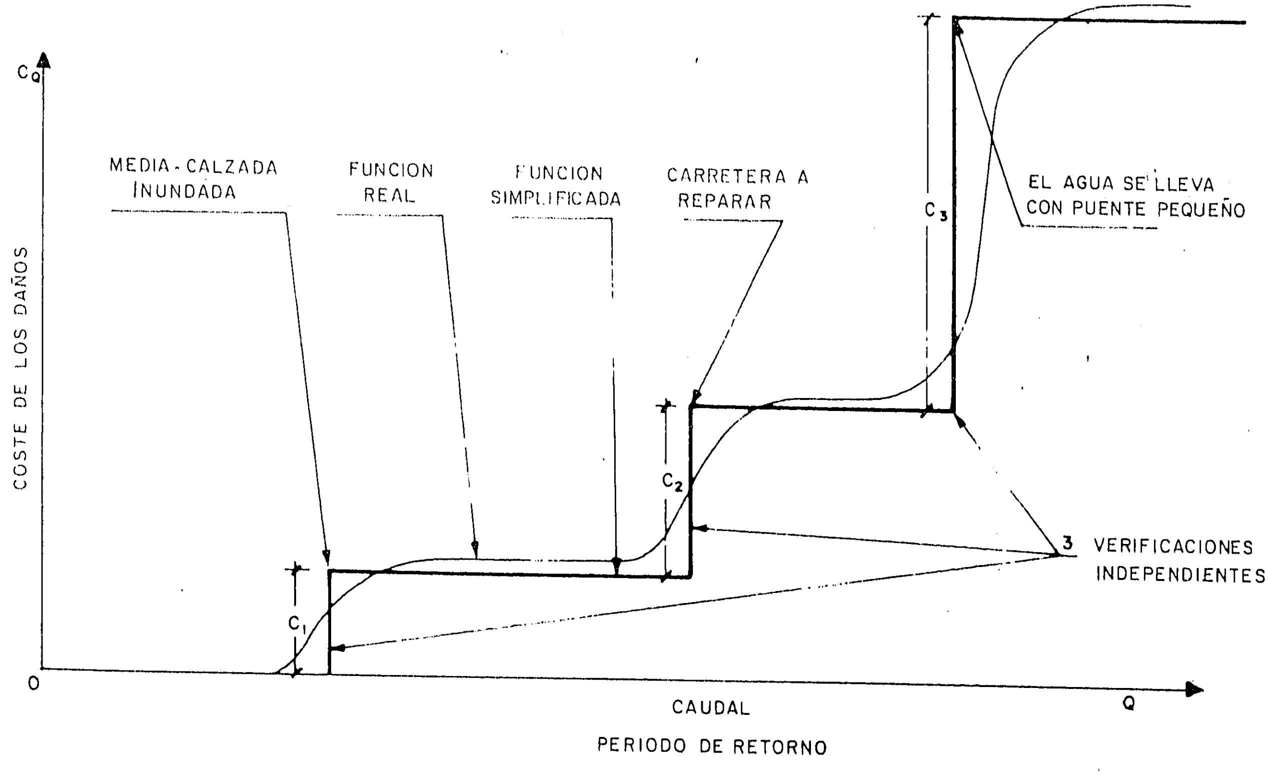

Fig. 3.—La función coste se simplifica para separar comprobaciones independientes.

En la referencia 7 (tiene conductos en carga calculados por la fórmula de Manning) se llega más o menos a $b = 0{,}562$.

$k\,Q^b$ es el coste de la porción correspondiente del sistema de drenaje; puede extraerse del presupuesto del proyecto.

c) Otros casos.

Lo que sigue es aplicable a costes $k\,Q^b$ en función del parámetro Q de cálculo.

En estructuras b es ligeramente superior a 1. En obras marítimas b puede ser superior a 1.

Para el viento b puede ser próximo a 1 siempre que Q sea presión, proporcional a V^2.

d) Observación.

Este estudio se debe a que su autor participó en teorías probabilistas de estructuras y es ponente de una Comisión de Redacción de una norma de drenaje superficial de carreteras cuyo presidente es don José García de Castro.

Puede considerarse como subproducto de esa Comisión realizado por el autor entre el M.O.P.U. y la E.T.S. de Ingenieros Agrónomos, en parte debido a una sugerencia de don Antonio Alcaide, miembro de esa Comisión.

A pesar de estar enfocado a drenaje de carreteras es de aplicación a muchas acciones naturales (viento, olas, etc.) en general siempre que se puedan expresar por leyes de valores extremos de tipo I ó II.

La parte hecha en el M.O.P.U. ha sido realizada dentro del Servicio de Tecnología de la Dirección General de Carreteras.

CAPITULO III

OPTIMIZACION

a) Funciones a optimizar.

Es el costo actualizado probable de los daños más el costo actualizado de la construcción.

Con las teorías de actualización de inversiones se puede, con la hipótesis de independencia de las probabilidades anuales de sobrepasar, pasar a costes anuales, es decir, referirse a una base anual.

Si además se supone que son independientes los daños y los costes de construcción de las "secciones independientes", cada período de retorno T resulta de la optimización del "coste anual independiente de la sección independiente que le corresponde".

$$\frac{C_q}{T} + i \cdot f(Q) \qquad (4)$$

C_q siendo el coste supuesto de los daños que ocurren al sobrepasar Q, f el coste $k\,Q^b$ de la construcción, i es un "interés".

Por ejemplo, en un sistema de elección de inversiones con tasa de actualización r, duración de servicio n años, ratio crítica beneficio/inversión γ, con $r = 0{,}10$, $\gamma = 2$, $n = 20$ resulta $i = 0{,}23$.

$1/T$ es la frecuencia anual del fenómeno correspondiente en sobrepasar Q, por lo que C_q/T representa bien a la esperanza del coste anual de los daños, habida cuenta de que Q puede sobrepasarse más de una vez por año.

b) Optimización.

Para optimizar anulamos la derivada de (4) con respecto a T:

$$-\frac{C_q}{T^2} + \frac{i \cdot k \cdot b \cdot Q^{b-1}}{T'_Q} = 0$$

T'_Q se obtiene de la fórmula (3) o (2) según la ley de valores entonces adoptada.

Formulando los resultados en función de magnitudes reales, se obtiene para la ley de valores extremos de tipo I

$$T = \frac{C_q \cdot [L\,Q]}{i \cdot (k \cdot Q^b) \cdot b}$$

y para la ley de valores extremos de tipo II

$$T = \frac{C_q \cdot \lambda}{i\,(k \cdot Q^b) \cdot b}$$

c) Estudio del resultado.

T es proporcional a:

$$\frac{C_q}{i \cdot (k \cdot Q^b)} = \frac{\text{Coste de sobrecarga } Q}{\text{Anualidad del coste de construcción de la obra}}$$

Para el drenaje, en las figuras 1 y 2 salen valores de $(L \cdot Q)$ y λ próximos a 5; parece, pues, que los resultados numéricos dependen poco del lugar y de la ley de valores extremos tomados.

Para presiones (V^2) de viento salen valores parecidos.

Entonces:

$$T \neq \frac{Q_q \cdot \lambda}{i\,(k \cdot Q^b) \cdot b} \neq \frac{40 \cdot C_q}{k \cdot Q^b} \qquad (5)$$

Parece qe si los daños consisten en disminuir única y completamente el sistema de drenaje, debería ser calculado para un período de retorno de 40 años.

El retorno puede ser menor para daños inferiores (caso de cuentas, tubos...) y mayor en caso de daños superiores.

El factor $40 \neq \lambda/(b\,i)$ es elevado porque el coste de la obra crece lentamente con el período de retorno; por ejemplo, en la ley de tipo II:

$$\text{Coste} = k \cdot (T\,K^{-1})^{b/\lambda} \quad \text{con} \quad b/\lambda \neq 0{,}11$$

El período de retorno es inversamente proporcional a i, interés crítico para inversiones de ese proyecto.

d) Dimensión.

El resultado (5) merece ser discutido.

Por ejemplo, los valores de $L \cdot Q$ y de λ pueden ser distintos.

Se pueden estudiar según indican las figuras 1 y 2.

En casos de drenaje con un C ($Q = CIA/(3,6)$) coeficiente de escorrentía creciente con T, el coste crece más deprisa de $k\,Q^b$, lo que hace crecer b y decrecer el período a tomar.

CONCLUSION

Se puede obtener por optimización económica resultados para determinar el período de retorno a incluir en una norma; estos resultados son bastante robustos en cuanto a variaciones de hipótesis. En particular, esos períodos de retorno son proporcionales a los costes de sobrepasar la acción de cálculo correspondiente.

REFERENCIAS

1.2. ANTON CORRALES, J. M.: "Teorías probabilistas de segridad". Tesis doctoral 1970, abreviada en la Monografía núm. 306 del Instituto Torroja. Madrid, 1972.

3.4.5.6. Bulletins d'information du C.E.B., núms. 112, 106, 107, 102, de 1975 a 1976, conteniendo resultados del Joint Committee on Structural Safety CEB-CECM-CIB-FIP-IABSE. Publicados por C.E.B., París.

7. GRIGG NEIL, S.: "Development of stom drainage cost functions". Proc. A.S.C.E., Hydr. Div. April 1976.

8. CHOW, V. T. and NEBUTADA TAKASE: "Design Criteria for Hydrologic Extremes". Proc. A.S.C.E., Hydr. Div. April 1977.

9. CHOW, V. T.: "A general formula for Hydrologic Frequency Analysis". Trans. Amer. Geophysical Union. Volume 32, pp. 231-237, 1951.

10. M.O.P.U. Dirección General de Carreteras: "Cálculo hidrometeorológico de caudales máximos en cuencas pequeñas". En prensa en Madrid en 1978, colaborando J. R. Témez.

11. GUMBELL: "Statistics of Extremes". Columbia, New York and London, 1958.

12. BENJAMIN, J. R. and CORNELL, C. A.: "Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers". Mac Graw-Hill (New York...), 1970.