

Numerosas aplicaciones de un teorema olvidado de geometría^(*)

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENITEZ

Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P.

Sugerido por la lectura de un teorema de Holditch, referente a la curva descrita por un punto de un segmento de longitud fija que se mueve deslizándose sus extremos a lo largo de una línea cerrada, el autor utiliza las propiedades de dichas curvas (que denomina curvas holditchianas o de Holditch, o simplemente C. de H.) en diversas cuestiones relativas a la regularización de curvas planas (acuerdos o transiciones); división de superficies en partes iguales o proporcionales a cantidades dadas; revestimientos de secciones; trayectorias descritas por los puntos de un vehículo; guiado de su circulación curva, etc., indicando otras posibilidades de aplicación incluso a la interpretación de algunas formas de crecimiento celular.

1. ALGUNOS EJEMPLOS ELEMENTALES

El lugar de los puntos medios H de las cuerdas \overline{AB} de longitud dada $2l$ de una circunferencia de radio R es evidentemente otra circunferencia concéntrica con ella y de radio $r = \sqrt{R^2 - l^2}$ (fig. 1).

Si se trata de un punto cualquiera H de dicha cuerda, tal que $\overline{HA} = l_1$, $\overline{HB} = l_2$, según sea interior o exterior al segmento \overline{AB} , el lugar es también una circunferencia de radio $r = \sqrt{R^2 - l_1 l_2}$ o $r = \sqrt{R^2 + l_1 l_2}$ respectivamente (figs. 2-A y 2-B).

Es curioso comprobar que el área de la corona circular resultant es independiente del radio R de la circunferencia primitiva, valiendo πl^2 en el caso de estar H en el punto medio de la cuerda y $\pi l_1 l_2$ en el caso de no estarlo.

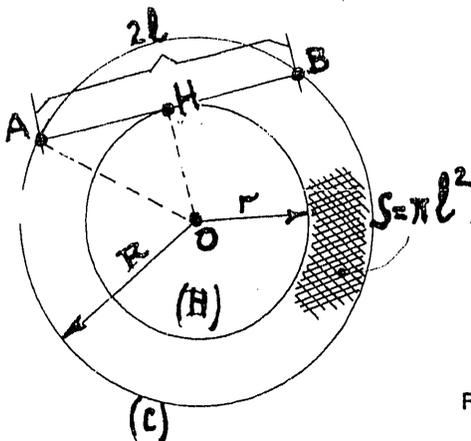


Figura 1.

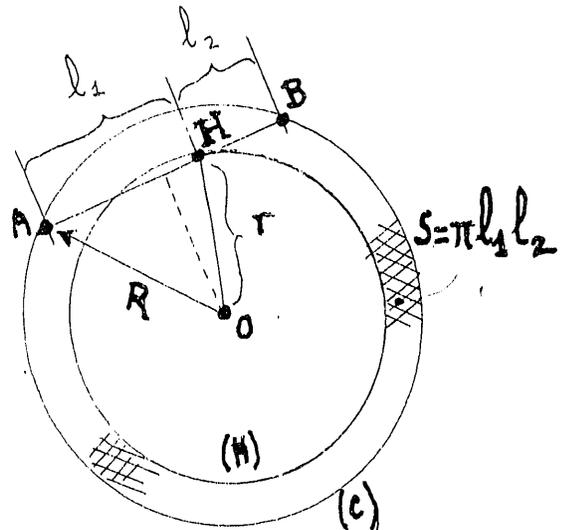


Figura 2-A.

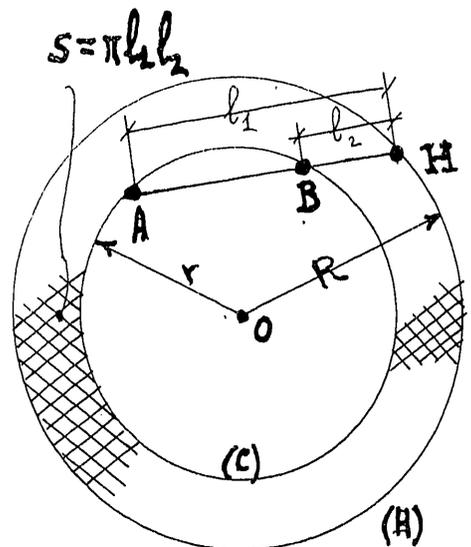


Figura 2-B.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de julio de 1980.

NUMEROSAS APLICACIONES DE UN TEOREMA DE GEOMETRIA

Otro caso. Desde hace más de quince siglos se sabía (fig. 3) que el lugar descrito por el punto medio de una cuerda AB de longitud $2l$ que se desliza apoyándose en dos rectas Ox, Oy perpendiculares es una circunferencia de radio l . Y también que el lugar es una elipse si H no es el punto medio de AB . Dicha elipse es de centro O y semiejes l_1 y l_2 .

En el primer caso el área de la circunferencia es πl^2 y en el segundo el de la elipse es $\pi l_1 l_2$ (figura 4).

Pero es muy interesante comprobar también que aunque los ejes Ox, Oy no sean perpendiculares (figs. 5 y 6), sino que formen un ángulo cualquiera 2α el lugar de H es también una elipse; y lo curioso es que su área es también $\pi l_1 l_2$ independiente del ángulo 2α (1) (teoremas de Schooten y de Steiner) (figs. 5 y 6).

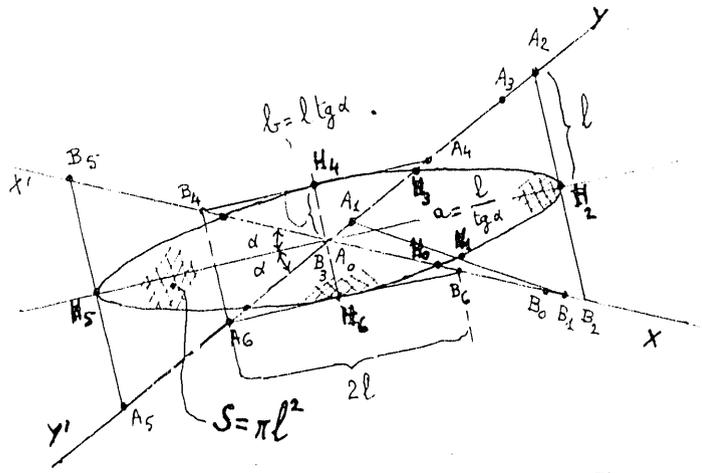


Figura 5.

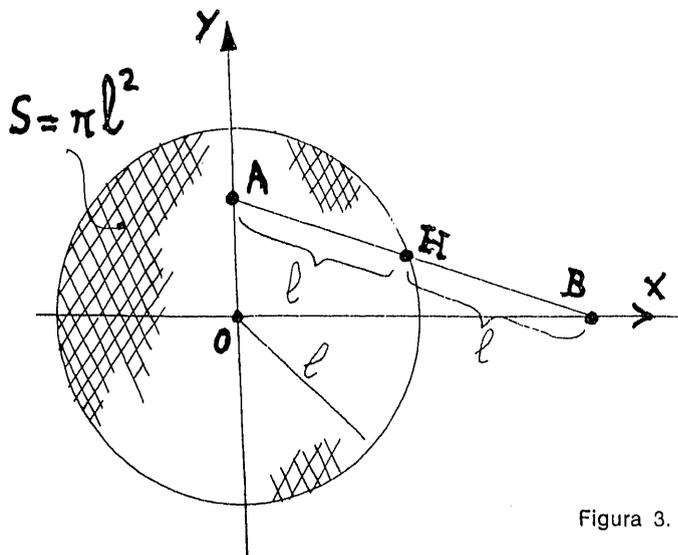


Figura 3.

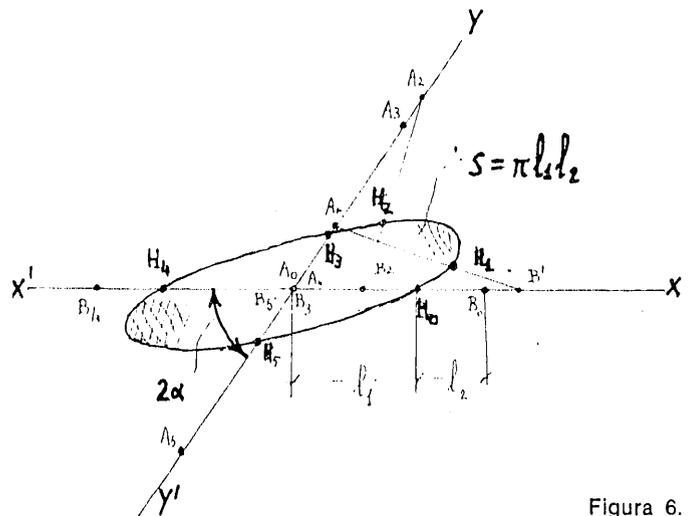


Figura 6.

2. TEOREMA DE HOLDITCH

Otros muchos ejemplos pudiéramos citar, pero preferimos enunciar el siguiente teorema, debido a Holditch, que los engloba a todos. Dice así (fig. 7):

«Si a lo largo de un contorno cerrado y convexo (C) se desliza apoyándose en sus extremos una cuerda AB de longitud constante un punto cualquiera H de la misma, tal que $AH = l_1$ y $HB = l_2$ describe una curva (H) tal que el área comprendida entre ellas, (C) y (H), vale $\pi l_1 l_2$ cualquiera que sea la curva dada (C)» (2).

A pesar de su extraordinaria utilidad no suele figurar en los tratados ordinarios de Geometría.

Incluimos su demostración al final de este escrito (3).

Encontré el enunciado de este teorema en el tomo 2 de la obra que citamos de H. Brocard y T. Lemoyne, pero no figura su demostración.

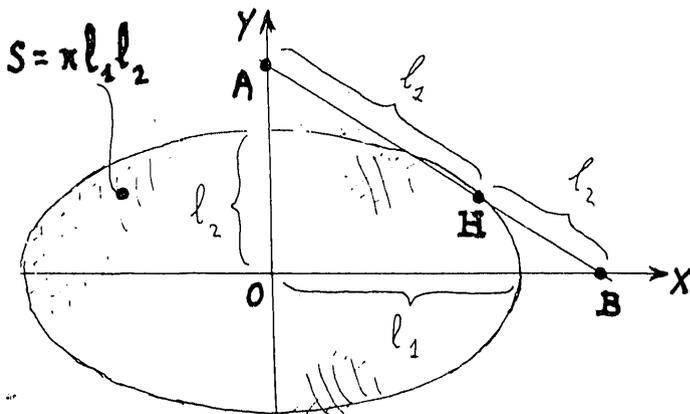


Figura 4.

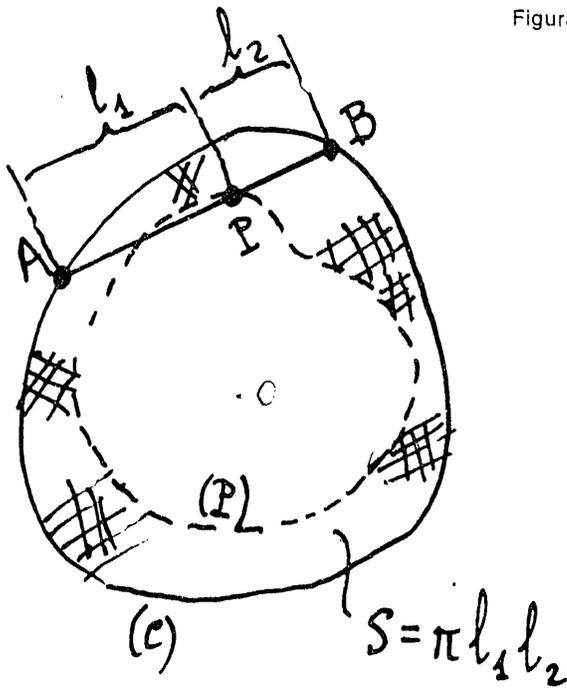


Figura 7.

Si $T_1 T_2$ es una curva dichas semirrectas pueden ser las tangentes en sus extremos. Pero no es preciso; basta por ahora que dichas semirrectas sean tales que la línea $T'_1 T_1 T_2 T'_2$ sea convexa.

Si sobre ella deslizamos la cuerda de longitud $l_1 + l_2$ desde su posición $A_1 B_1$ hasta la $A_2 B_2$ obtendremos la curva de Holditch $H_1 H_2$. El área comprendida entre dicha curva y la primitiva (C) (que va de T_1 a T_2 , y sus prolongaciones en los segmentos rectilíneos $T_1 H_1$ y $T_2 H_2$ vale $\frac{\beta}{2} l_1 l_2$ siendo β el ángulo (exterior, medido en radianes) de las indicadas rectas $T_1 T'_1$ y $T_2 T'_2$.

En el caso de ser paralelas y del mismo sentido las ramas de una curva (por ejemplo, parábolas de grado par) el espacio que quedaría entre la misma y su curva de Holditch tendrá de área $\frac{\pi}{2} l_1 l_2$.

En los ejemplos que siguen veremos la utilidad de esta especie de generalización que hemos hecho del teorema de Holditch, que no hemos encontrado en los tratados de Geometría que hemos consultado.

3. APLICACION A LINEAS ABIERTAS (fig. 8).

En el caso de tratarse de una línea como la $T_1 T_2$ (puede ser curva continua, poligonal, mixta, etc., que por ahora la supondremos convexa) podemos extender fácilmente el teorema de Holditch del modo siguiente: Sean $T_1 T'_1$ y $T_2 T'_2$ semirrectas, prolongación de la línea $T_1 T_2$ por sus extremos.

4. DIVERSOS TIPOS DE C. DE H. (fig. 9).

Según que el punto sea interior o exterior al segmento AB diremos que (H) es interior o exterior de (C). Si H es el punto medio del segmento AB , o sea, si $l_1 = l_2$ se dice que holditchiana es normal u ordinaria. Es de la que más vamos a ocuparnos.

Según la posición relativa de l_1 y l_2 la (H) es de orientación directa o inversa con respecto a (C). (H) viene a ser una variación de la misma, deformándola en uno u otro sentido (giro a izquierda o a derecha).

5. C. DE H. DE ORDENES SUCESIVOS (fig. 10).

Obtenida a partir de (C), y con una cuerda $l_1 + l_2$ una primera curva (H), que ahora llamaremos (H_1), podemos a su vez, de ésta (con una cuerda igual o diferente $l'_1 + l'_2$) obtener otra curva (H) que llamaremos (H_2); y de esta otra, (H_3), y así sucesivamente.

Así queda definida la holditchiana (H_n) de orden n de una línea (C), utilizando cuerdas sucesivas, $l_1 + l_2$ iguales, o diferentes:

$$l_1 + l_2 ; l'_1 + l'_2 ; l''_1 + l''_2 ; \dots l_1^{(n-1)} + l_2^{(n-2)}$$

Ya veremos la utilidad de estas curvas sucesivas (H_1) (H_2) ... para lograr, por ejemplo, la regu-

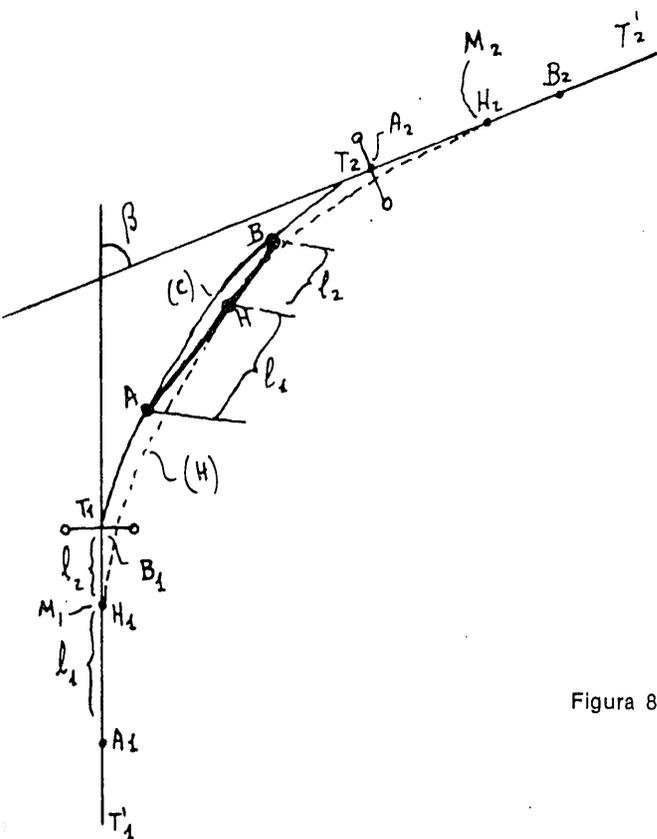


Figura 8.

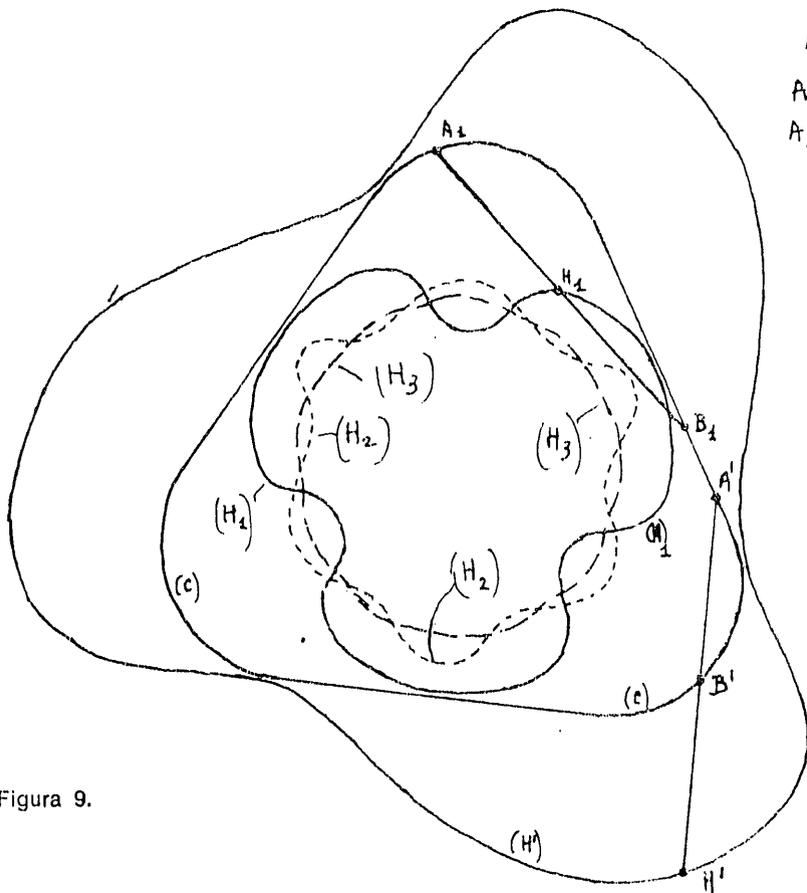
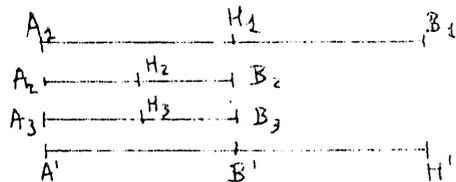


Figura 9.



- (c) Curva primitiva.
- (H₁) C. de H. ordinaria, interior, de 1^{er} orden.
- (H₂) " " " de 2^o "
- (H₃) " " " de 3^{er} "
- (H') C. de H. exterior, de 1^{er} orden.

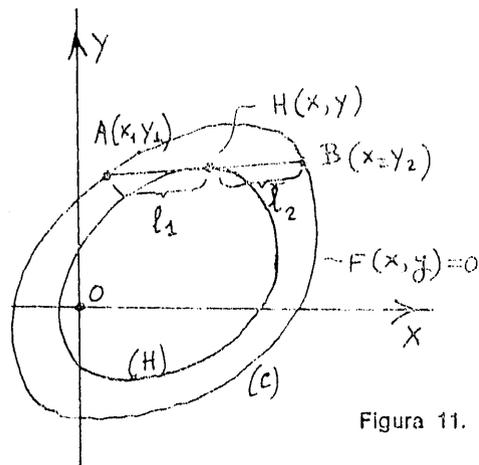


Figura 11.

6. OBTENCION DE LA C. DE H. DE UNA CURVA DADA (C)

Supongamos que (C) puede expresarse mediante una función y que ésta viene dada en coordenadas cartesianas rectangulares por $F(x, y) = 0$ o en coordenadas polares por $\rho = \rho(w)$.

En el primer caso (fig. 11) es evidente que basta eliminar: $x_1 y_1 x_2 y_2$ entre las cinco ecuaciones:

$$F(x_1 y_1) = 0; F(x_2 y_2) = 0; (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (l_1 + l_2)^2; x = \frac{l_2 x_1 + l_1 x_2}{l_1 + l_2}; y = \frac{l_2 y_1 + l_1 y_2}{l_1 + l_2}$$

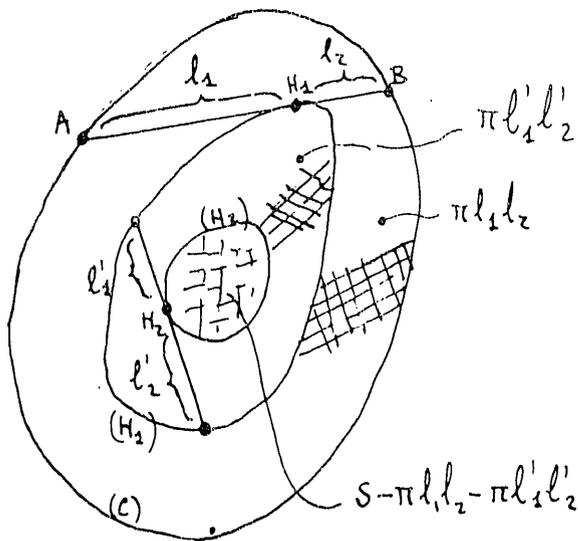


Figura 10.

larización progresiva de una línea dada (C). Y también para dividir un recinto en áreas iguales o proporcionales a cantidades dadas, etc.

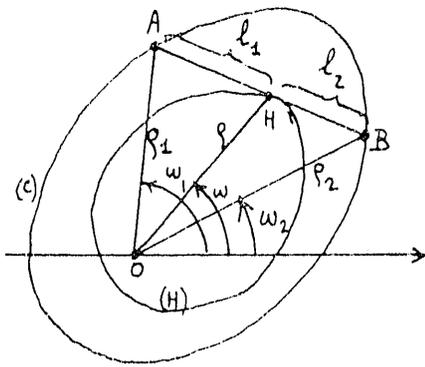


Figura 12.

En el segundo caso (fig. 12), o sea, si viene (C) dada en coordenadas polares, basta eliminar w_1 y w_2 entre:

$$(l_1 + l_2) \cos w = l_1 \rho(w_2) \cos w_2 + l_2 \rho(w_1) \cos w_1$$

$$(l_1 + l_2) \sin w = l_1 \rho(w_2) \sin w_2 + l_2 \rho(w_1) \sin w_1$$

$$\rho^2 = \frac{l_2 \rho_1^2 + l_1 \rho_2^2}{l_1 + l_2} = l_1 l_2$$

7. EJEMPLOS DE C. DE H.

7.1. Elipse de semiejes a y b (fig. 13).

Su ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \dots (C)$

y la de Holditch (para $l_1 = l_2 = l$) obtenemos que es:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) + \frac{l^2}{a^2 b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$$

Con el paso a coordenadas polares $x = \rho \cos w$; $y = \rho \sin w$ nos queda como ecuación de la elipse (C):

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 w)}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 w}$$

y como de su C. de H.:

$$\left(\frac{1}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 w} - \frac{l^2}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 w}\right)$$

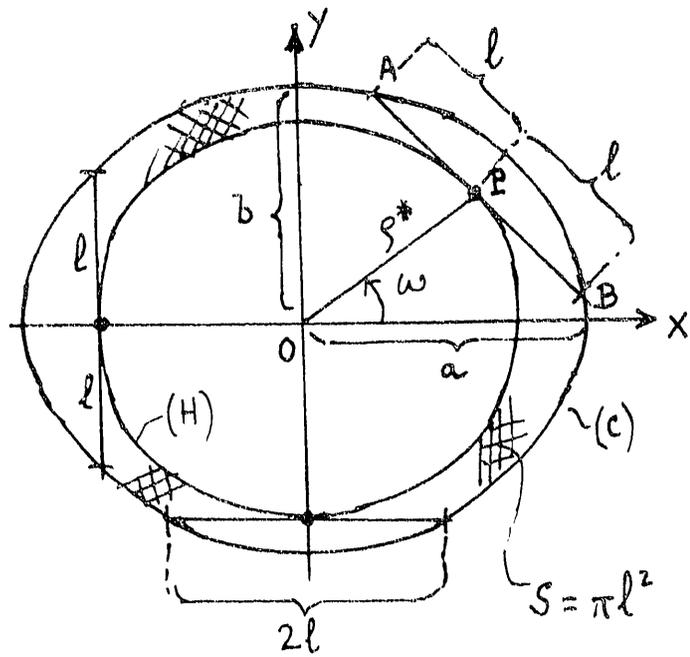


Figura 13.

El área entre ambas, o sea, entre (C) y (H), será cuádruplo de la diferencia de integrales:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \rho^2 dw - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \rho^{*2} dw =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 b^2 l^2 (1 + \operatorname{tg}^2 w)}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 w} dw =$$

$$= \frac{l^2}{2} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a^2 \operatorname{tg} w}{b^2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \infty = \frac{\pi l^2}{4}$$

lo que nos comprueba que dicha área es πl^2 como ya habíamos previsto.

7.2. Hipérbola (fig. 14).

Lo mismo que en la elipse, cambiando b^2 por $-b^2$.

El espacio comprendido entre (C) y (H) y entre $w = 0$ y $w = w$ es, por tanto, también:

$$\frac{l^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a^2 \operatorname{tg} w}{b^2} \right)$$

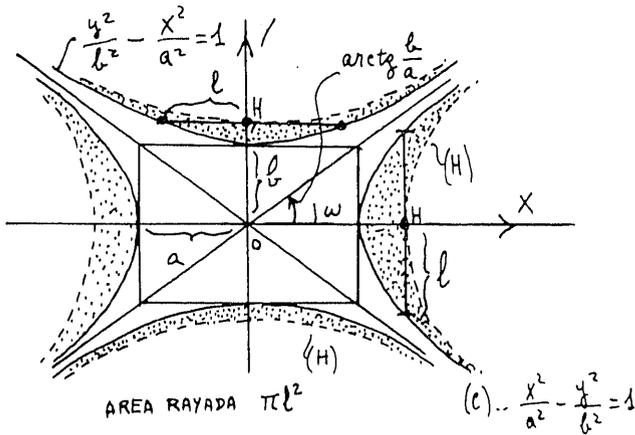


Figura 14.

Luego entre $w = 0$ y la asíntota $\text{tg } w = \frac{b}{a}$ resulta: $\frac{1}{2} l^2 \text{ arc tg } \frac{b}{a}$.

Considerando las dos ramas de la hipérbola y las de la hipérbola complementaria o conjugada, o sea, la superficie total rayada en la figura, queda como valor de su área:

$$4 \frac{1}{2} l^2 \text{ arc tg } \frac{a}{b} + 4 \frac{1}{2} l^2 \text{ arc tg } \frac{b}{a} = \pi l^2,$$

que es otra comprobación.

7.3. Parábola.

Su ecuación es: $y^2 = 2px$ (fig. 15).

Según lo expuesto, basta eliminar x_1, y_1, x_2, y_2 entre:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad y_1^2 = 2px_1 \quad y_2^2 = 2px_2$$

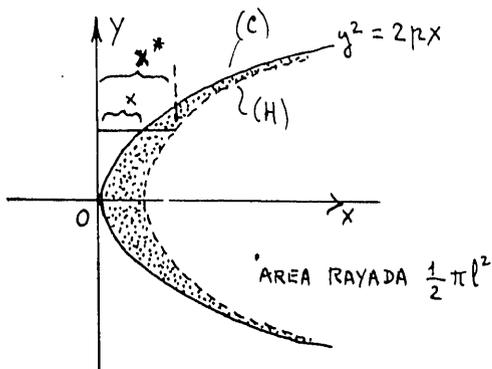


Figura 15.

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4l^2$, obteniéndose:

$$C. \text{ de H. } \dots (H) \dots x^* = \frac{y^2}{2p} + \frac{pl^2}{2(y^2 + p^2)}$$

Para hallar el área entre (C) y (H) integremos por franjas horizontales, resultando:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} (x^* - x) dy &= 2 \int_0^{\infty} \frac{pl^2}{2(y^2 + p^2)} dy = \\ &= l^2 \text{ arc tg } \frac{y}{p} = \frac{\pi}{2} l^2, \end{aligned}$$

como ya habíamos indicado al final del apartado 3.

7.4. Polígono convexo (fig. 16).

Si sus lados son suficientemente largos, se compone su C. de H. de elementos de arcos de elipse (de centros en los vértices; todas las elipses de la misma área πl^2) y de segmentos rectilíneos en la parte central de cada lado.

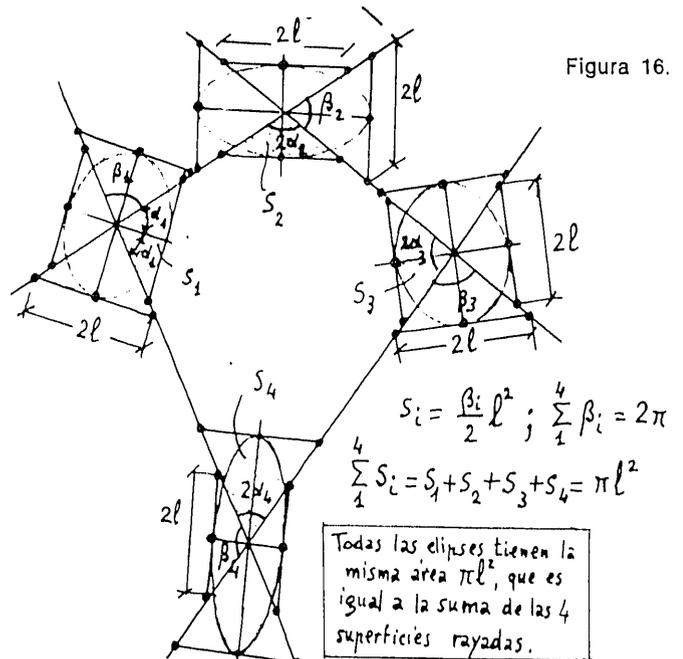


Figura 16.

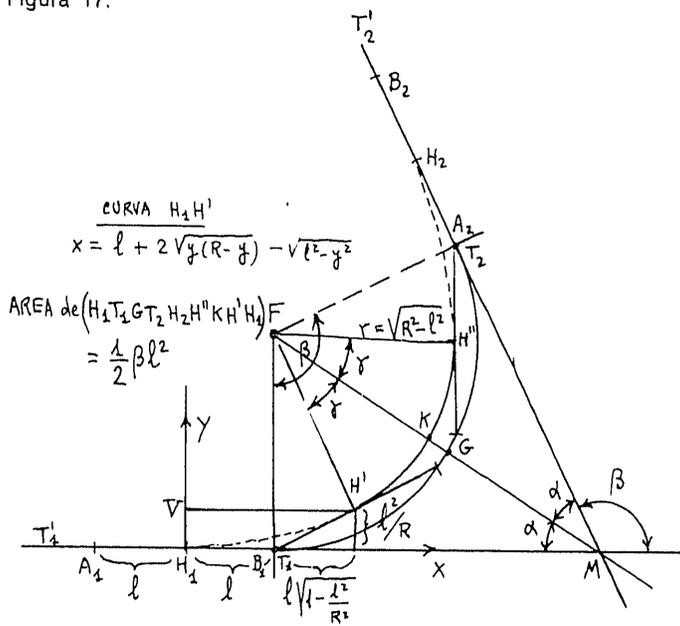
7.5. Arco de círculo.

De radio R y ángulo $\beta = \pi - 2\alpha$ y sus tangentes en los extremos (fig. 17).

Consideremos también lo indicado en el apartado 3 y en la figura 8. Si el arco de círculo es suficientemente grande, la C. de H. se compondrá de una parte central circular $H' H''$ de radio $\sqrt{R^2 - l^2}$

NUMEROSAS APLICACIONES DE UN TEOREMA DE GEOMETRIA

Figura 17.



y ángulo $2\gamma = \beta - 2 \arcsen \frac{l}{R}$ y de dos trozos

de curva $H' H_1$ y $H'' H_2$ que hacen como de «acuerdo» en sus extremos con las tangentes de entrada y salida T'_1, T_1 y T'_2, T_2 .

Del trozo $H_1 H'$ referido a los ejes XOY indicados, hemos obtenido como ecuación:

$$x = l + 2 \sqrt{y(R-y)} - \sqrt{l^2 - y^2}$$

Válida desde el punto $H_1 [x=0; y=0]$ hasta el

$$H' \left[x = l \left(1 + \sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}} \right); y = \frac{l^2}{R} \right]$$

Comprobemos directamente el valor del área $H_1 B_1 G K H' H_1$ mitad de la comprendida entre las curvas (C) y (H).

Resulta ésta de la siguiente suma algébrica de áreas:

$$[S(V H_1 C H') - S(H_1 H' V)] + S(H' C D) + S(F D M) - [S(F B_1 M) - S(F B_1 G)] - S(F H' K), \text{ siendo:}$$

$$S(V H_1 C H') = \int_0^{\frac{l^2}{R}} (l + 2 \sqrt{y(R-y)} - \sqrt{l^2 - y^2}) dy = \frac{l^3}{R} - l \sqrt{R^2 - l^2} + \frac{R^2}{2} \arcsen \frac{l}{R} + \frac{l^2}{2} \arcsen \frac{l}{R} - \frac{\pi l^2}{4}$$

$$S(H' C D) = \frac{l^3}{2 R^2 \sqrt{R^2 - l^2}}$$

$$S(F D M) = \frac{R^2}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \frac{l}{R^2 - l^2} \right)$$

$$S(F B_1 M) = \frac{R^2}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

$$S(F B_1 G) = \frac{1}{4} R^2 \beta$$

$$S(F H' K) = \frac{R^2 - l^2}{2} \left(\frac{\beta}{2} - \arcsen \frac{l}{R} \right)$$

$$S(V H_1 C H') = \frac{l^2}{R} \left(l + \frac{l}{R} \sqrt{R^2 - l^2} \right)$$

Operando, resulta $\frac{1}{4} \beta l^2$; luego el total es $\frac{1}{2} \beta l^2$ que nos comprueba una vez más lo ya indicado en el apartado 3 de aplicación del teorema de Holditch a una curva abierta.

Es fácil comprobar que la curva $H_1 H'$, que hace como transición entre la alineación recta T'_1, M y la parte circular $H' K H''$, tiene continuidad en H_1 y H' en cuanto las tangentes en sus extremos.

No así en cuanto a su curvatura.

En H_1 el radio de curvatura no es infinito, sino que vale $2R$.

En H' no es $R \sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}}$ como en la parte circu-

lar, sino $2R \sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2} + \frac{l^4}{R^4}}$.

Como l/R es pequeño resulta que aproximadamente valen $2R$.

En resumen, la curva $H_1 H'$ (y lo mismo la $H_2 H''$) vienen a ser unas curvas de acuerdo de radio $2R$, doble de la circular.

Pero es evidente, que sin más que hallar la curva de Holditch de la línea $T'_1 H_1 H' K H'' H_2 T'_2$ (o sea, la segunda holditchiana del trazado primitivo) obtendríamos otra curva de acuerdo (H_2) mejor, y así sucesivamente.

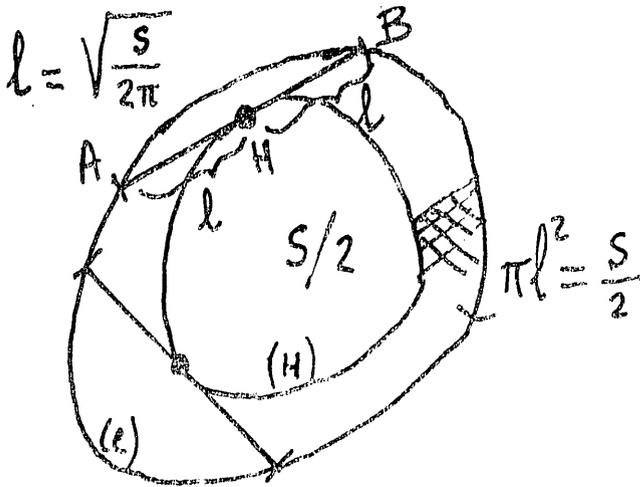


Figura 18-A.

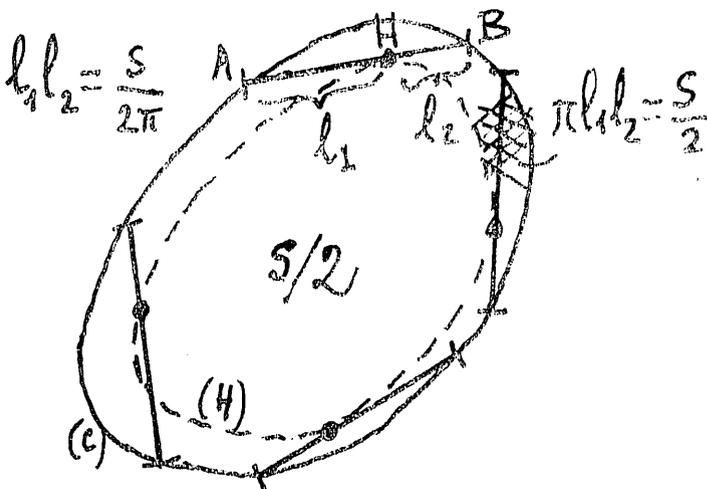


Figura 18-B.

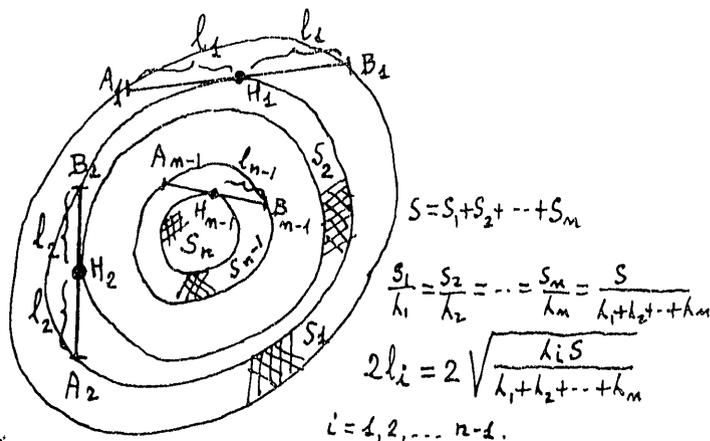


Figura 18-C.

8. APLICACIONES

8.1. División de un recinto en partes iguales o proporcionales a cantidades dadas.

De acuerdo con lo indicado en el apartado 5 y en la figura 10 sobre C. de H. de órdenes sucesivos, si por ejemplo deseamos dividir su recinto convexo de área S en dos partes iguales basta deslizar una

cuerda de longitud $\overline{AB} = 2l = \sqrt{\frac{2S}{\pi}} = 0,798 \sqrt{S}$.

Su punto medio H describirá una línea que encerrará un área S/2 (fig. 18-A).

También podemos tomar el segmento o cuerda $\overline{AB} = l_1 + l_2$ siendo $\overline{AH} = l_1$ $\overline{HB} = l_2$. Con tal que $\frac{l_1 \cdot l_2}{S} = \frac{1}{2\pi}$ (fig. 18-B) el punto H también describirá el contorno de un recinto de área S/2.

En general, si se desea dividir el recinto (C), de área S, en n partes proporcionales a cantidades $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (fig. 18-C), basta trazar las n-1 primeras holditchianas de (C), o sea, las (H₁), (H₂), ... (H_{n-1}) con cuerdas de longitudes respectivas 2l₁, 2l₂, ..., 2l_{n-1} tales que cada una sea de longitud:

$$2l_i = 2 \sqrt{\frac{\lambda_i S}{\pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

8.2. Revestimiento de una excavación irregular (figura 19).

La regularización del contorno de una excavación suele realizarse con hormigón mortero proyectado (gunitado), de tal forma que el espesor del revestimiento sea mayor en los entrantes o conca-

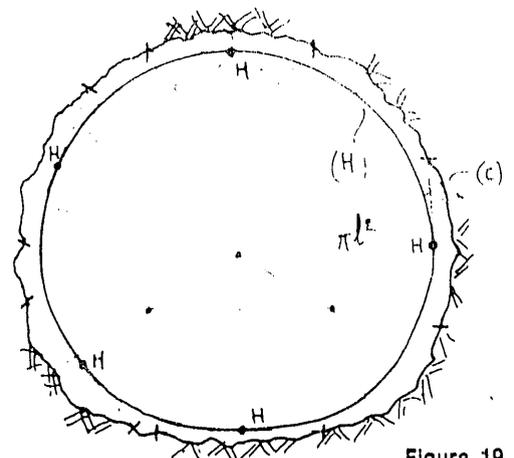


Figura 19.

NUMEROSAS APLICACIONES DE UN TEOREMA DE GEOMETRIA

vidades más pronunciadas, o sea, en los sitios de mayor curvatura, pues en ellos tienden además a concentrarse las tensiones.

Si asimilamos dicho contorno primitivo a una línea (C) y obtenemos su primera curva holditchiana ordinaria (H_1) con una cuerda $2l$, sus puntos H vendrán cumpliendo lo indicado. Será muy fácil ver los puntos en que el revestimiento tendrá su máximo espesor. Y sabremos con exactitud, que si la cuerda utilizada es de longitud $2l$ metros la sección del revestimiento será de πl^2 metros cuadrados.

Así, por ejemplo, si al contorno de una galería de $D = 6$ metros de diámetro de excavación le asignamos una curva (H) con una cuerda $2l = 1,40$ metros la sección del revestimiento será de $\pi l^2 = 1,54$ metros cuadrados

$$\left(100 \cdot \frac{\pi l^2}{\pi D^2} = 5,44 \% \text{ de la de excavación} \right)$$

$$\text{Su espesor medio } e = \frac{\pi l^2}{\pi D} = 0,0817 \text{ metros}$$

Sobre este revestimiento puede darse otro, a base de hallar la siguiente curva de Holditch, con la misma o con distinta cuerda, según la sección o el espesor medio que queramos dar a esta segunda capa. Y así sucesivamente.

3.3. Circulación en curva de un vehículo guiado.

Estudiemos la marcha de un vagón de ferrocarril en una curva de radio variable cuya línea media (eje de la vía) es (C) (fig. 20).

Supondremos los dos bogies o carretones del vagón lo suficientemente distanciados como para poder considerar que los centros de apoyo de sus

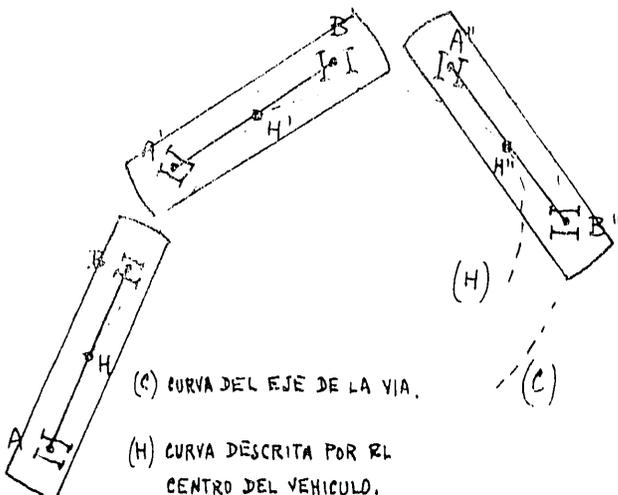


Figura 20.

cuatro ruedas son puntos $A B A' B' A'' B''$ que están sobre la curva (C).

En estas condiciones, es evidente que el centro de la caja del vagón se proyecta sobre una curva (H), holditchiana de la (C), deducida de ella con la cuerda $A B = A' B' = A'' B'' = \dots = 2l$, que es precisamente el llamado «empate» o «base rígida» del vehículo.

Si este fuese de 14 metros, en una curva de radio $R = 300$ metros, la distancia e de H al eje de la vía vendrá dada por $l^2 = e(2R - e)$ de donde:

$$e = 8,17 \text{ centímetros}$$

Si la carga del vagón estuviese muy concentrada en el centro de su caja y si además dicha carga fuese muy superior al propio peso del vagón, describiría —su proyección horizontal— no la curva (C) del eje de la vía, sino su curva de Holditch (H).

En las variaciones bruscas de la curvatura de la vía —o en sus irregularidades, o en el paso de recta a curva— esto tiene su importancia. Como vimos en el apartado 7.5 (ver también notas) las variaciones de curvatura de (H) son más suaves que las de (C); las C. de H. sucesivas van «regularizándola».

8.4. Regularización de trazados.

Una curva cerrada o abierta puede regularizarse substituyéndola por sus holditchianas de órdenes sucesivos. Así se indica en la figura 21.

Más general: Si a una curva tan tortuosa como es la $A_0 P_0 B_0$ de la figura 22, le hallamos sus (H_1), (H_2), (H_3), ..., sucesivas, obtenemos las curvas indicadas $A_1 P_1 B_1$, $A_2 P_2 B_2$, $A_3 P_3 B_3$, ..., respectivamente, cada una de ellas más «regular» que la anterior en su trazado.

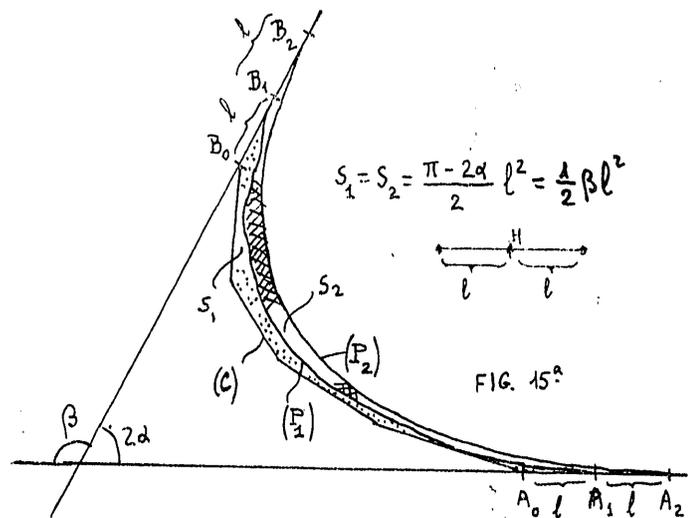


Figura 21.

NUMEROSAS APLICACIONES DE UN TEOREMA DE GEOMETRIA

En los trazados de líneas ferroviarias suelen hacerse estas rectificaciones de curvas siguiendo los sistemas expuestos por Schramm, Chapellet, Schubert, etc., conocidos como métodos de las flechas, de las cuerdas deslizantes, etc.

El que indicamos parte de principios totalmente diferentes, pero estimamos que puede ser ventajoso por las siguientes razones:

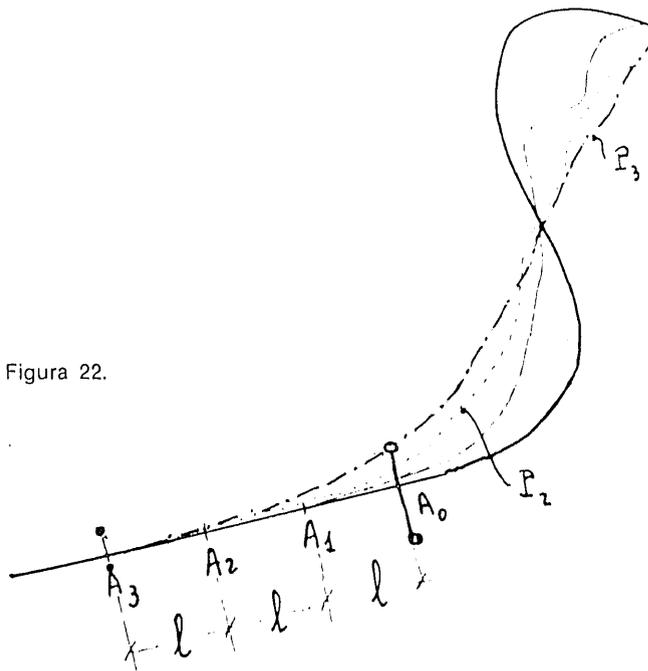


Figura 22.

CURVA DADA	$A_0 P_0 B_0$	
1ª RECTIFICACION	$A_1 P_1 B_1$	
2ª " "	$A_2 P_2 B_2$	
3ª " "	$A_3 P_3 B_3$	

En las figuras 23, 24 y 25 indicamos algunas curvas holditchianas sucesivas (H_1), (H_2), ..., deducidas de su respectiva curva matriz (C).

La (C) de la figura 25 es la curva llamada ovoide o folium simplex, de ecuación en coordenadas polares $\rho = a \cos^3 w$, estudiada por Kepler, Brocard y Longchamps.

Hacemos observar la tendencia a adoptar forma circular las C. de H. de órdenes superiores (ver las tres últimas figuras citadas).

Queremos llamar la atención sobre la conveniencia de no olvidar la utilidad que para estudios y aplicaciones actuales (mecánicos, físicos, qui-

- 1.º Es sencillo de aplicar y muy fácilmente programable.
- 2.º Los errores no son acumulativos.
- 3.º Permite con facilidad imponer condiciones a la curva rectificada.

Esperamos desarrollarlo en breve para su utilización práctica en trazados de carreteras y líneas ferroviarias.

8.5. Otras posibles aplicaciones.

Pensamos que puede tenerla, por ejemplo, en la división de secciones de piezas para su estudio elástico o de secciones de conductos de fluidos para su distribución de velocidades, etc. También para el desarrollo o evolución de determinadas formas geométricas que presenta una célula. Una forma circular, rodeada de una unidad membrana evoluciona al haber sido empujada hacia afuera para formar pseudópodos. Después, las membranas evaginadas se vuelven a replegar, formando membranas nucleares apareadas y un primitivo retículo endoplasmático (ver figura 9).

ANILLOS DE IGUAL AREA

OBTENIDOS CON SUCEсивAS CURVAS DE HOLDITCH

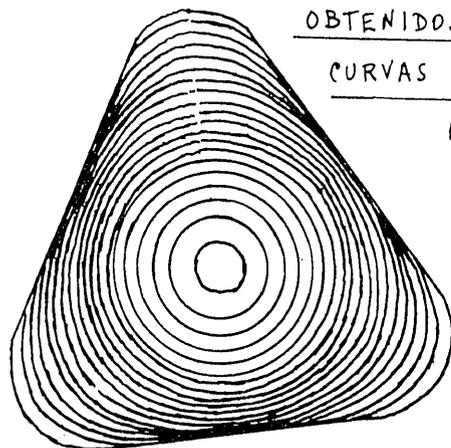


Figura 23.

NUMEROSAS APLICACIONES DE UN TEOREMA DE GEOMETRIA

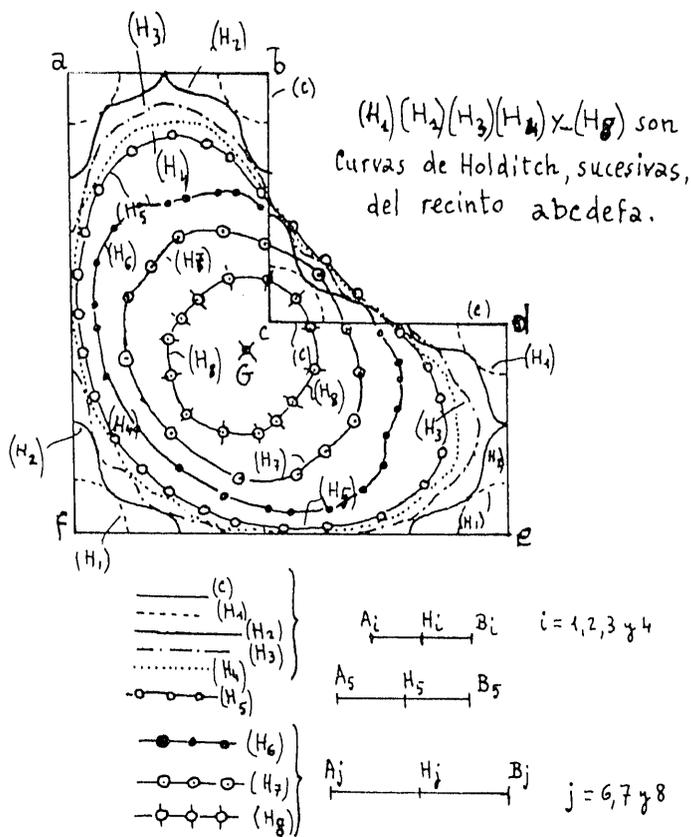


Figura 24.

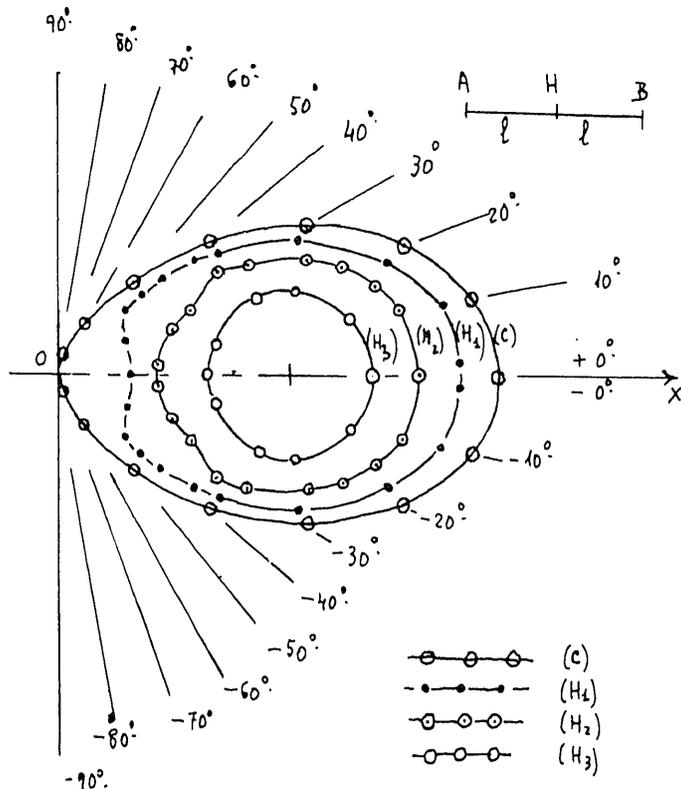


Figura 25.

micos, biológicos) pueden tener las metas a que llegaron Newton, Descartes, Steiner, Manheim, Pappus, Bernouilli y muchos más, en sus investigaciones geométricas.

Con los medios hoy disponibles (ordenadores, modelos, etc.) contribuirán ampliamente al desarrollo de las ciencias y de las técnicas.

* * *

Agradezco los ánimos y las orientaciones que me dieron mis amigos y compañeros Angel del Campo, José Torán, Olegario Llamazares y Manuel Moriel al exponerles las ideas desarrolladas en este escrito.

Y también a Rafael Gómez de los Reyes por la paciencia que tuvo de escucharlas y por las aclaraciones que me hizo de algunos cálculos.

NOTAS

(1) También es sabido que el lugar descrito por el vértice M de un triángulo AMB cuyos vértices A y B se deslizan sobre dos rectas fijas OX y OY es una elipse (Mannheim: «Géometrie cinématique»).

Nosotros hemos obtenido (fig. 26-A) que para $XOY = 90^\circ$ el área de esta elipse es $S = \pi (l_1 l_2 - d^2)$ siendo d la distancia de M a AB y l_1 y l_2 las proyecciones de MA y MB sobre AB .

Como comprobación (fig. 26-B) tenemos que si $l_1 = l_2 = l$ la elipse resulta de semiejes $l + d$ y $l - d$, siendo su área $\pi (l^2 - d^2)$.

También se prueba que si una recta se desplaza de forma que tres de sus puntos permanezcan en tres planos dados, un punto cualquiera de esta recta describe un elipsoide que tiene por centro el punto de intersección de los tres planos.

Y más aún: Si cuatro puntos de una recta móvil se mueven sobre cuatro planos dados, un punto cualquiera de esta recta describe una elipse.

(2) El teorema de Holditch viene a ser un caso particular del de Williamson que dice (fig. 27-A):

«Si los tres puntos A , B y C de una recta dada se mueven en el plano de tal modo que describen respectivamente curvas cerradas de áreas $S(A)$, $S(B)$ y $S(C)$ se verifica que:

$$S(C) = \frac{l_2 S(A) + l_1 S(B)}{l_1 + l_2} - \pi l_1 l_2$$

siendo:

$$\overline{AC} = l_1 \quad \overline{CB} = l_2$$

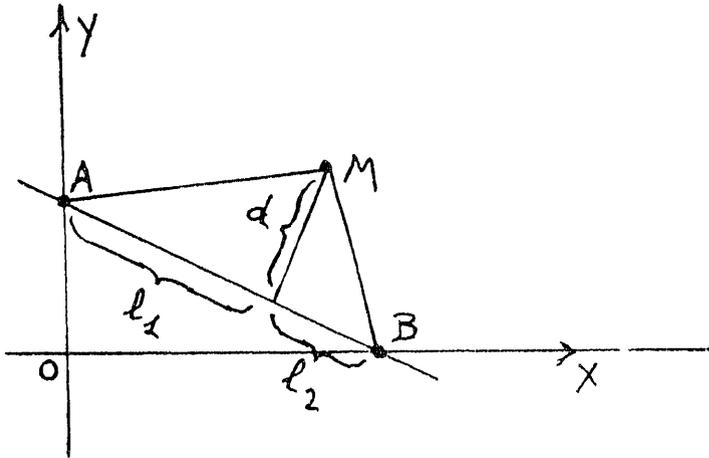


Figura 26-A.

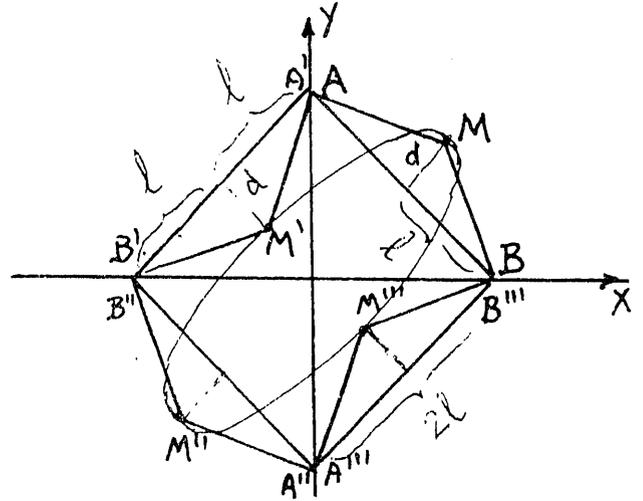
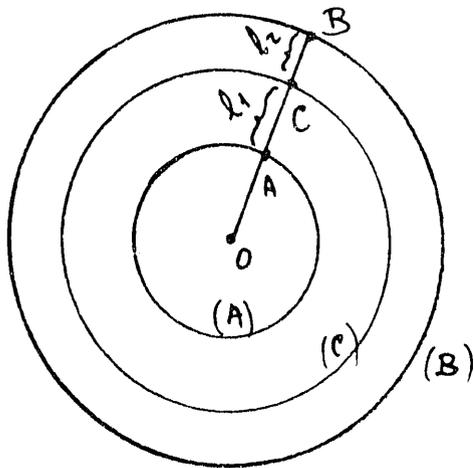


Figura 26-B.



EJEMPLO SENCILLO DE COMPROBACION

$$S(C) = \pi \overline{OC}^2$$

$$\overline{OC}^2 = \frac{l_2 \overline{OA}^2 + l_1 \overline{OB}^2}{l_1 + l_2} - l_1 l_2$$

Como $S(A) = \pi \overline{OA}^2$ y $S(B) = \pi \overline{OB}^2$

queda
$$S(C) = \frac{l_2 S(A) + S(B) \cdot l_1}{l_1 + l_2} - \pi l_1 l_2$$

Figura 27-A.

Cuando las curvas (A) y (B) se confunden, resulta $S(A) = S(B) = S$ y queda $S - S(C) = \pi l_1 l_2$ que es el teorema de Holditch.

A su vez el de Williamson puede considerarse como caso particular o límite del de Leudesdorf que dice: «Si ABC son tres puntos de una figura plana móvil invariable, no situados en línea recta, y P un cuarto punto de esta figura en la que tiene (referida a ABC) como coordenadas triangulares $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$; si S(A), S(B), S(C) y S(P) son las áreas totales descritas por las trayectorias de los puntos respectivos, se verifica que (fig. 27-B):

$$S(P) = \lambda_1 S(A) + \lambda_2 S(B) + \lambda_3 S(C) + \pi t^2 \dots$$

siendo t el segmento de tangente trazado desde P al círculo circunscrito a ABC».

En efecto, si P estuviese sobre AB, en el límite, $\lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 = \frac{l_2}{l_1 + l_2}; \lambda_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2}; t^2 = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$$

resultando:

$$S(P) = \frac{l_2 S(A) + l_1 S(B)}{l_1 + l_2} - \pi l_1 l_2$$

que es el de Williamson anterior, cambiando (C) por (P).

NUMEROSAS APLICACIONES DE UN TEOREMA DE GEOMETRIA

Figura 27-B.

TRIANGULO ABC GIRANDO ALREDEDOR DE A.

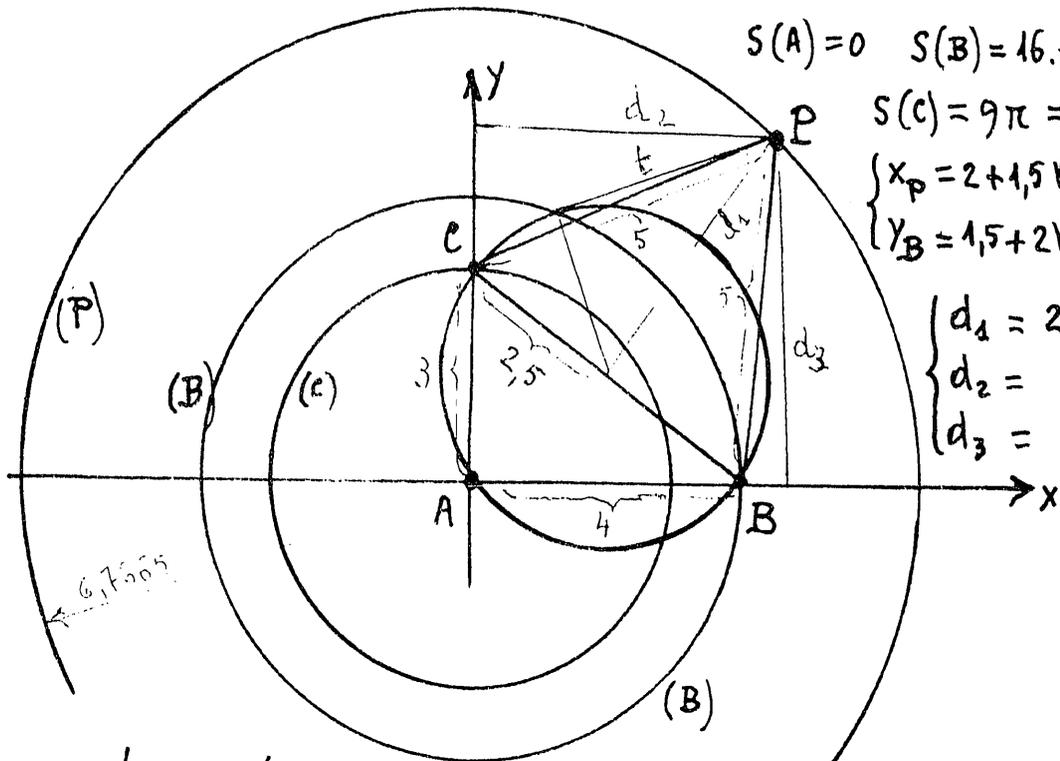
$a=5 \quad b=3 \quad c=4$

$S(A)=0 \quad S(B)=16\pi=50,2655$

$S(C)=9\pi=28,2743$

$\begin{cases} x_P = 2 + 1,5\sqrt{3} = 4,5980 \\ y_B = 1,5 + 2\sqrt{3} = 4,9641 \end{cases}$

$\begin{cases} d_1 = 2,5\sqrt{3} \\ d_2 = 4 \\ d_3 = 3 \end{cases}$



$$\frac{h_1}{a \cdot d_1} = \frac{h_2}{b \cdot d_2} = \frac{h_3}{c \cdot d_3} = \frac{1}{a \cdot d_1 + b \cdot d_2 + c \cdot d_3}$$

$h_1 = -1,804 \quad h_2 = 1,150 \quad h_3 = 1,654$

$$t^2 = (x_P - 2)^2 + (y_P - 1,5)^2 - 2,5^2 = 12,5$$

$$S(P) = -1,804 \cdot 0,0000 + 1,150 \cdot 50,2655 + 1,654 \cdot 28,2743 + 12,5 \cdot \pi = 143,84$$

(3) Demostración del teorema de Holditch.

El área interior a la curva (H) viene dada por

Tomando como origen un punto O interior a (C)

$$S(H) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2} dw$$

(figura 7) y llamando $OA = \rho_1$; $OB = \rho_2$ y $OH = \rho$ en los triángulos OAH y OBH se verifica que:

que en virtud de lo anterior es igual:

$$\rho_1^2 = \rho^2 + l_1^2 - 2 l_1 \rho \cos \alpha;$$

$$\rho_2^2 = \rho^2 + l_2^2 + 2 l_2 \rho \cos \alpha$$

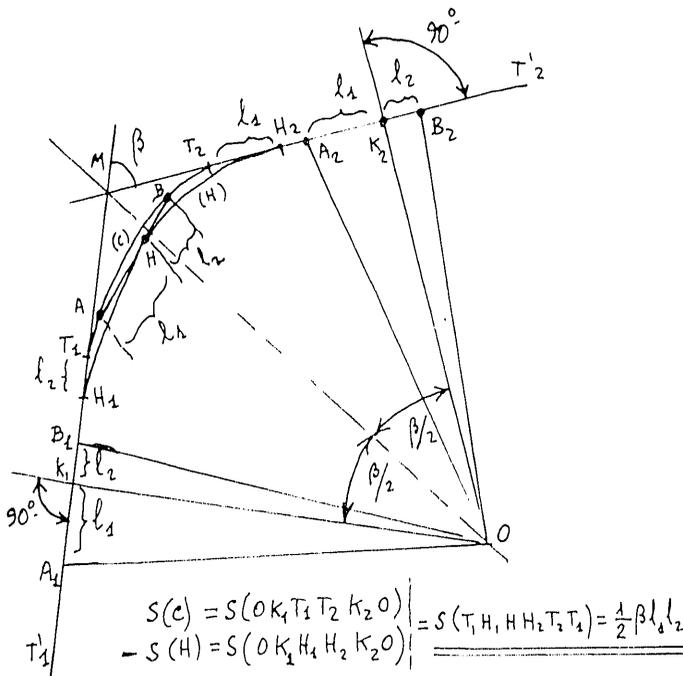
$$\frac{l_2}{l_1 + l_2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1^2}{2} dw + \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

Eliminando $\cos \alpha$ se despeja $\rho^2 = \frac{1}{l_1 + l_2}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho_2^2}{2} dw - l_1 l_2 \int_0^{2\pi} \frac{dw}{2}$$

$$(\rho_1^2 l_2 + \rho_2^2 l_1) - l_1 l_2.$$

Figura 28.



Las dos primeras integrales son evidentemente el área $S(C)$. La tercera vale $\pi l_1 l_2$. Por lo tanto,

$$S(H) = \frac{l_2}{l_1 + l_2} S(C) + \frac{l_1}{l_1 + l_2} S(C) - \pi l_1 l_2$$

de donde se deduce que $S(C) - S(H) = \pi l_1 l_2$ que es el teorema de Holditch.

(4) Teorema de Holditch para curva abierta (figura 28).

El arco de curva (C) es $T_1 T_2$. Prolonguemos $T_1 T'_1$ y $T_2 T'_2$.

El arco de curva (H) es $H_1 H_2$. El área comprendida entre ambas es: $S(C) - S(H) = S(H_1 H H_2 T_2 T_1 H_1)$.

Tomemos sobre MT'_1 y $MT'_2 \dots MK_1 = MK_2$ suficientemente grandes para que $MK_1 > MT_1 + l_2$ y $MK_2 > MT_2 + l_1$.

Ahora ρ_1 tendrá como posiciones extremas OA_1 y OA_2 , y ρ_2 , OB_1 y OB_2 , siendo:

$$\int_{K_1}^{K_2} \frac{\rho^2}{2} dw = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \int_{A_1}^{A_2} \frac{\rho_1^2}{2} dw + \frac{l_1}{l_1 + l_2} \int_{B_1}^{B_2} \frac{\rho_2^2}{2} dw - \int_{K_1}^{K_2} \frac{l_1 l_2}{2} dw$$

o sea, $S(H) = S(C) - \frac{1}{2} \beta l_1 l_2$, luego $S(C) - S(H) = \frac{1}{2} \beta l_1 l_2$.

BIBLIOGRAFIA

- H. BROCARD et T. LEMOYNE: "Courbes géométriques remarquables". 3 tomos. Lib. Albert Blanchard. Paris, 1967-70.
- A. SCHOENFLIES: "La géométrie du mouvement". Gauthier-Villars. Paris, 1893.
- J. CARNOY: "Géométrie Analytique". Gauthier-Villars. Paris, 1891.
- F. GOMES TEIXEIRA: "Curvas especiales notables". Imprenta Gaceta de Madrid, 1905.
- F. G. M.: "Exercices de Géométrie". Tours-Paris, 1912.
- A. MANNHEIM: "Géométrie cinématique". Gauthier-Villars. Paris, 1886.
- E. FOURREY: "Curiosites géométriques". Lib. Vuibert. Paris, 1938.
- J. DAVID ROBERSTON: "La membrana de la célula viva". (Selecciones de Scientific American. La célula viva). Ed. Blume. Barcelona, 1970.
- J. CHAPPELET: "Méthodes de rectification du tracé des courbes de chemin de fer par correction des fleches". Eyrolles, ed. 1938.
- GIOVANNI POLSONI: "Considerazioni sulle curve di raccordo ferroviarie". Ingegneria Ferroviaria. April 1950.
- H. F. HICKERSON: "A mathematical examination of spiraled compound curves". Proceedings of the A.S.C.E. 1953.
- A. CAQUOT: "Le raccordement parfait". Revue Générale des Chemins de Fer, enero 1940.
- E. SCHUBERT: "Die Mechanisierung der Bogenberichtigung". E.T.R. Viena, febrero 1964.
- G. SHRAMM: "Der Gleisbofen". Verlag Elsner. Berlín, 1924. "Ein neues Gleisrichtverfahren". Der Bauingenieur. Julio 1964.
- D. BRANDENBURG: "Von der Gleisbogenaufmessung über Gleiskoordinaten zur Gleisabsteckung". Eisenbahningenieur, 23, 1972.

Sobre rectificación de curvas ferroviarias por distintos métodos se han ocupado en España de darlas a conocer y aplicarlas, entre otros, José María García Lomas, Alfredo Crespo, Fermín García González, Luis Echano y Asúa, Francisco Wais, etc., cuyos trabajos aparecieron publicados en diversos libros y monografías y en la "Revista de Obras Públicas" y "Ferrocarriles y Tranvías".