

Algunas propiedades y aplicaciones de la elipse central de inercia del triángulo y del paralelogramo (*)

Por M. A. HACAR BENITEZ
Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos

En esta nota se indican unas sencillas propiedades, que pueden ser de utilidad, referentes a la elipse central de inercia del triángulo y a otras concéntricas y homotéticas con ella, como son la tangente en los puntos medios de los lados y la circunscrita al mismo.

Se proponen varias definiciones de "Índice de equilateralidad" de un triángulo.

Se extienden los resultados al paralelogramo.

1. INTRODUCCION

El cálculo de los momentos de inercia, que es una cuestión puramente geométrica, ha sido desarrollado principalmente en sus aplicaciones a la Dinámica y a la Resistencia de Materiales.

Los clásicos trabajos de K. Culmann y W. Ritter son reproducidos en todos los tratados posteriores de Mecánica Aplicada.

En particular nos vamos a referir a la elipse de elasticidad y a los teoremas de Culmann en las figuras planas.

Salvo algunas excepciones (1) podemos decir que no siempre se ha sacado el debido partido a los conocimientos que puede suministrar la Geometría para facilitar los cálculos mecánicos. Yo diría que incluso estos se acometen a veces de modo algo complicado por no recurrir a propiedades (de rectas conjugadas, de focos, etc.) que se estudiaban en los elementos de Geometría métrica y proyectiva... Pero la actual enseñanza va por otros derroteros que no pretendemos ni analizar ni juzgar. (2)

Solamente por si puede tener alguna utilidad, abreviando el planteamiento de las operaciones, o simplemente como curiosidad de cierto interés, vamos a exponer algunas propiedades que de modo disperso hemos ido recogiendo y desarrollando.

*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista, hasta el 31 de mayo de 1981.

2. MOMENTOS DE INERCIA DEL TRIANGULO

El momento de inercia del área de un triángulo ABC con respecto a un eje EE' contenido en su plano es el mismo que el de tres masas, iguales cada una a la tercera parte de la del triángulo, y situadas en los puntos medios de sus lados. (3)

Sea M la masa del triángulo y S su área. Si suponemos que la "densidad superficial de masa" es la unidad, $M = S$.

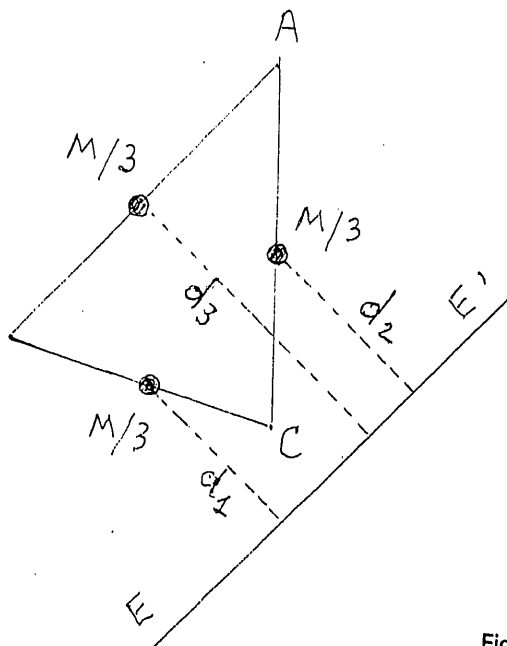


Figura 1a.

Por tanto, Figura 1a,

$$I_{EE'} = \frac{M}{3} \cdot d_1^2 + \frac{M}{3} \cdot d_2^2 + \frac{M}{3} \cdot d_3^2$$

Su demostración es inmediata. Fácilmente se generaliza por agregación o por paso al límite, al paralelogramo (Figura 1b) y a una barra (Figura 1c). (4)

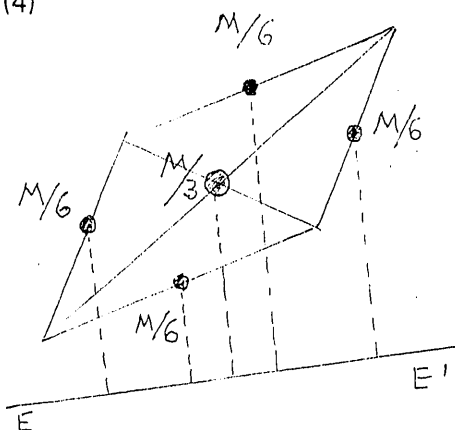


Figura 1b.

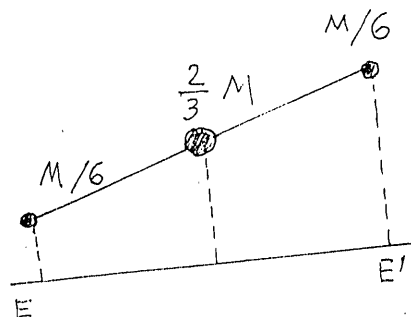


Figura 1c.

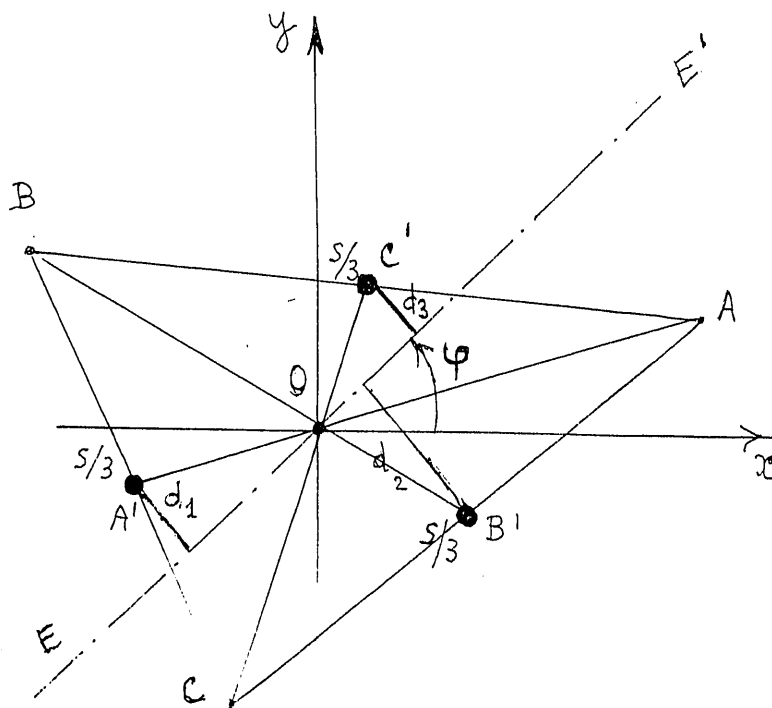


Figura 2.

Como toda figura plana se puede descomponer de manera aproximada en triángulos suficientemente pequeños, la acumulación indicada de masas puede facilitar el cálculo de sus momentos de inercia.

De acuerdo con lo indicado (Figura 2) el momento de inercia del triángulo A B C con respecto a un eje EE' que pasando por su centro de gravedad O forme un ángulo con el eje OX será:

$$I_{\varphi} = \frac{M}{3} \left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \right) \quad [1]$$

pero como la ecuación de dicho eje EE' es $y - \operatorname{tg} \varphi \cdot x = 0$ y los puntos medios de los lados tienen de coordenadas:

$$A' \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

$$B' \left(\frac{x_3 + x_1}{2}, \frac{y_3 + y_1}{2} \right)$$

$$C' \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

resulta:

$$d_1^2 = \left(\frac{y_2 + y_3}{2} - \operatorname{tg} \varphi \frac{x_2 + x_3}{2} \right)^2 / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

y análogamente para d_2 y d_3 .

Sustituyendo en I_{φ} y efectuando operaciones queda:

$$I_{\varphi} = -\frac{S}{6} \left(\beta \cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi + \gamma \sin \varphi \cos \varphi \right) \quad [2]$$

en la cual por simplificar hemos hecho:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -1/2 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right) \\ \beta &= y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = -1/2 \left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \right) \\ \gamma &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

[α y β son siempre negativos. Por haber tomado como origen O - el centro de gravedad del triángulo $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $y_1 + y_2 + y_3 = 0$].

ALGUNAS PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LA ELIPSE CENTRAL DE INERCIA

Los valores de φ que nos dan el mínimo I_1 y el máximo I_2 se obtienen al anular la derivada de I_φ con respecto a φ .

$$\text{Así resulta } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\gamma}{\beta - \alpha} \quad [4]$$

Y como momentos principales de inercia

$$I_{1,2} = S/12 \left[-(\alpha + \beta) \mp \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \gamma^2} \right] \quad [5]$$

3. ELIPSE CENTRAL DE INERCIA DEL TRIANGULO

Una representación gráfica de los momentos de inercia para distintos ejes que pasan por un punto, Fig. 3.^a, se logra tomando sobre cada uno de ellos y a ambos lados $\overline{OH} = \overline{OH'} = \frac{K}{\sqrt{I_\varphi}}$

siendo K una constante cualquiera.

El lugar de estos puntos H , de coordenadas

$$x = \frac{K}{\sqrt{I_\varphi}} \cos \varphi, \quad y = \frac{K}{\sqrt{I_\varphi}} \sin \varphi$$

se obtendrá sustituyendo en [2], y así resulta:

$$\beta x^2 + \alpha y^2 + \gamma \cdot xy - \frac{6K^2}{S} = 0$$

Entre estas elipses, concéntricas y homotéticas para diversos valores de K , suele adoptarse la que tiene por semiejes los radios de giro de las direcciones principales. Se le llama entonces *elipse central de inercia* propiamente dicha o *elipse* de Culmann. Corresponde al valor de $K = \sqrt{I_1 I_2 / S}$

$$\text{Así queda } \beta x^2 + \alpha y^2 + \gamma \cdot xy - \frac{\gamma^2 - 4\alpha\beta}{24} = 0 \quad [6]$$

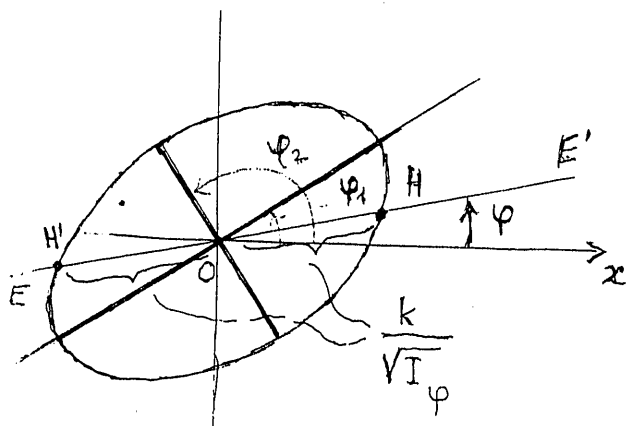


Figura 3.

Las direcciones de sus ejes principales se deducirán de:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - 2(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg} \varphi - \gamma = 0,$$

y serán por tanto

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha - \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \gamma^2}}{\gamma} \quad [7]$$

(perpendiculares entre sí).

Los radios de giro o semiejes de dicha elipse serán:

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{I_2}{S}} \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{I_1}{S}}$$

Por [5] resulta que valen:

$$\rho_{1,2}^2 = 1/12 \left[-(\alpha + \beta) \mp \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \gamma^2} \right]$$

Esta expresión puede ponerse en función de las longitudes a, b, c de los lados del triángulo: (5)

$$\rho_{1,2}^2 = 1/72 \left[a^2 + b^2 + c^2 \mp 2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2} \right] \quad [8]$$

4. ELIPSE TANGENTE A LOS LADOS DE UN TRIANGULO EN SUS PUNTOS MEDIOS

Tiene propiedades interesantes, algunas de las cuales vamos a enumerar:

1.^a Es homotética de la elipse de Culmann, siendo mayor que ella. La relación de homotecia es $\sqrt{2}$. Por tanto sus áreas están en la relación 2 : 1.

2.^a Las cuatro elipses indicadas en la Figura 4.^a son también concéntricas y homotéticas; en la misma aparecen dichas relaciones de homotecia.

Esto se evidencia sin más que considerar el triángulo equilátero de la Figura 5.^a. En él las elipses pasan a ser circunferencias. Como todo triángulo puede suponerse proyección ortogonal de uno equilátero, las homotecias y relaciones de áreas se conservan.

3.^a La dirección de cada lado del triángulo es conjugada de la de su mediana (con respecto a cualquiera de las elipses). Su involución permite de manera inmediata determinar sus rayos rectangulares o direcciones principales de la elipse de inercia (de modo analítico o gráfico).

Elipses con relaciones
de homotecia :

$1 = 1,0000$ inercia (Culmann)

$\sqrt{2} = 1,4142$ inscrita

$\frac{2\sqrt{6}}{3} = 1,633$ ($\frac{1}{3}$ de los lados)

$2\sqrt{2} = 2,828$ circunscrita.
(Steiner)

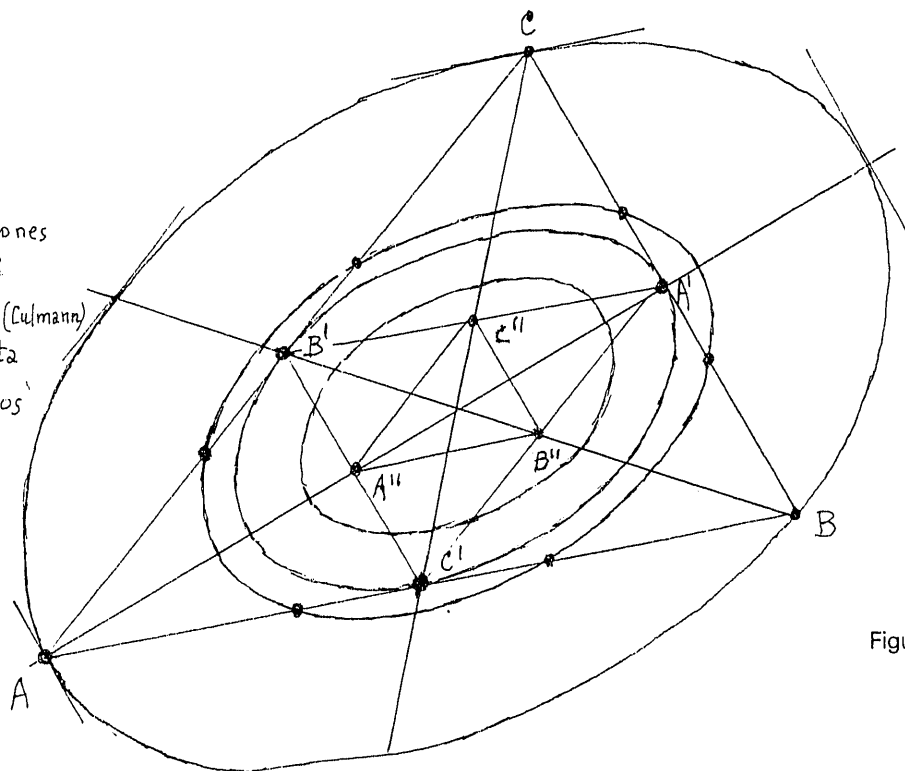


Figura 4.

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

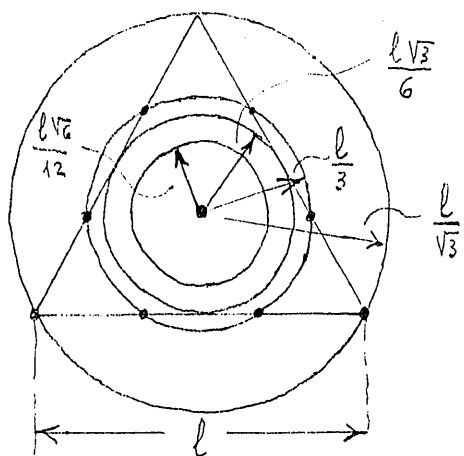


Figura 5.

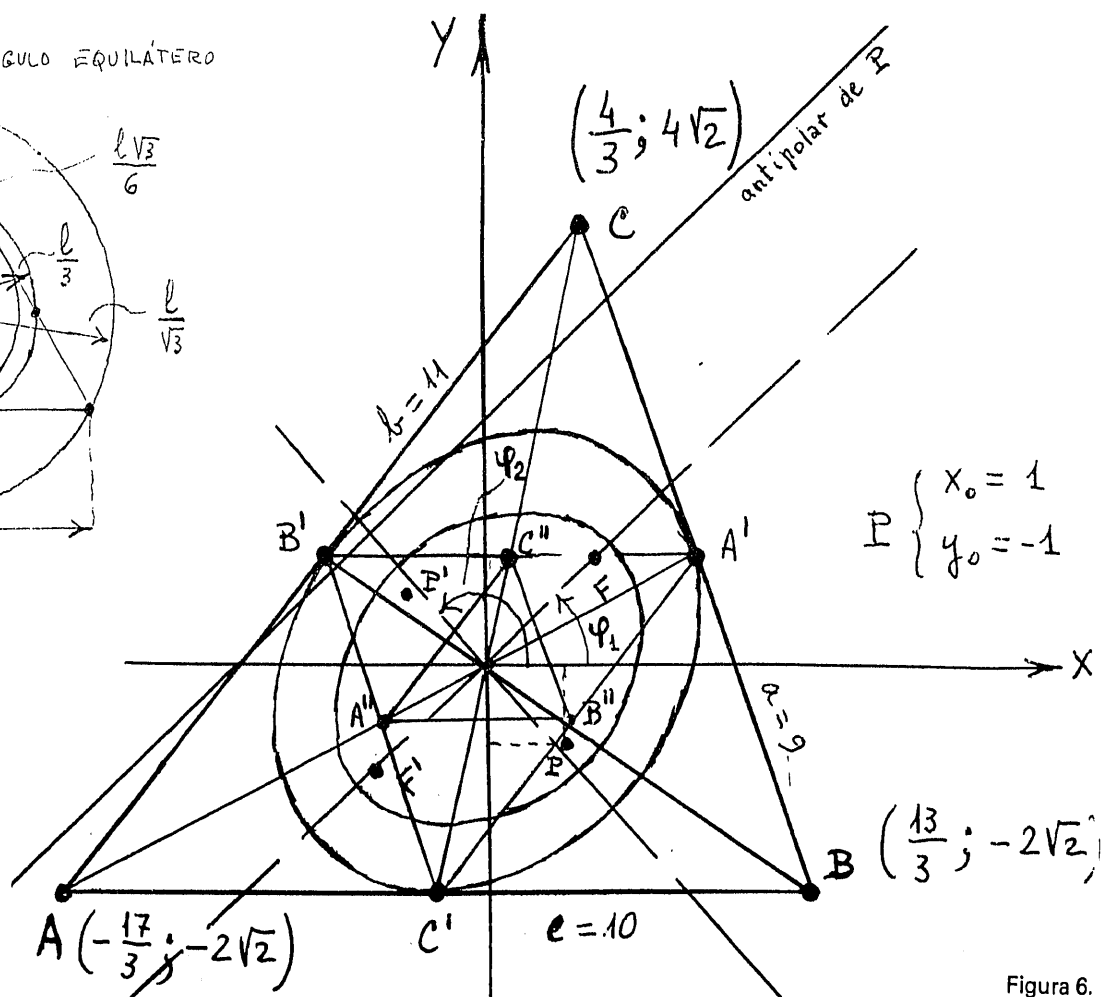


Figura 6.

ALGUNAS PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LA ELIPSE CENTRAL DE INERCIA

4.^a La elipse A' B' C' es la de *área máxima* que puede inscribirse en el triángulo ABC. La elipse ABC (llamada de Steiner) es la (6) de *área mínima*, concéntrica al triángulo, que puede circunscribirse al mismo.

5.^a Los focos F y F' de dicha elipse A' B' C' (Fig. 6^a) son los puntos de equilibrio de una masa puntual que fuese atraída o repelida desde los vértices ABC del triángulo con fuerzas inversamente proporcionales a sus respectivas distancias a los mismos.

Si por ejemplo, A, B y C, fuesen tres poblaciones que "rechazasen" o desearan tener alejadas de ellas alguna instalación molesta, nociva o peligrosa (nuclear, por ejemplo) y con tanta más fuerza cuanto más próxima estuviese de ella, los puntos F y F' podrían ser los de ubicación de la misma (7).

6.^a La propiedad anterior nos permite determinar de modo inmediato las coordenadas de sus focos F y F'.

Si por $z = x + iy$ indicamos su afijos, y por

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad z_3 = x_3 + iy_3$$

los de los vértices del triángulo, el equilibrio se expresará por:

$$\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \frac{1}{z-z_3} = 0$$

Efectuando operaciones y anulando por separado partes reales e imaginarias, obtenemos el sistema:

$$3(x^2 - y^2) + \alpha - \beta = 0$$

$$6xy - \gamma = 0$$

del que se obtiene para las abscisas de los focos la ecuación bicuadrada:

$$\left. \begin{aligned} 36x^4 + 12(\alpha - \beta)x^2 - \gamma^2 &= 0 \\ \text{y cuyas ordenadas son: } y &= \frac{\gamma}{6x} \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

La distancia entre los focos es:

$$\overline{FF'} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2} \quad [10]$$

5. INDICE DE EQUILATERALIDAD DE UN TRIANGULO

Se nos ocurre llamar así (I. de E.) a un número que venga a indicar el grado en que un triángulo se aproxima a ser equilátero. Podría servirnos como medida del mismo cociente que resulta de dividir el diámetro menor por el mayor de la elipse central de inercia.

Se obtiene así la unidad para el triángulo equilátero. En un triángulo "aplastado" sería nulo.

$$\text{Por lo expuesto, (I. de E.)}^2 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 = \quad [11]$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}}{a^2 + b^2 + c^2 + 2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}}$$

Podrían adoptarse otras definiciones, (8) como por ejemplo el cociente del área S del triángulo a la S' de otro triángulo del mismo perímetro, pero equilátero

$$\text{Como } S' = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2p}{3} \right)^2, \text{ resultaría:}$$

$$\text{(I. de E.)}^2 = S/S' = \sqrt[4]{27 \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}} \quad [12]$$

6. EJEMPLO DE APLICACION

Triángulo de lados $a = 9$; $b = 11$; $c = 10$ referidas las coordenadas de sus vértices a los ejes indicados en la Figura 6.^a.

$$(x_1 = -17/3; y_1 = -2\sqrt{2}) ;$$

$$(x_2 = 13/3; y_2 = -2\sqrt{2}) ;$$

$$(x_3 = 4/3; y_3 = 4\sqrt{2}) ;$$

$$\text{Según las fórmulas [2]: } \alpha = -79/3; \beta = -24; \gamma = 8 \sqrt{2} \quad S = 30 \sqrt{2}.$$

Por la [4] deducimos como direcciones de los ejes principales; $\text{tg } 2\varphi = 24/7 \sqrt{2}$, de donde

$$\varphi_1 = 39^\circ 18';$$

$$\varphi_2 = 129^\circ 18'$$

ALGUNAS PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LA ELIPSE CENTRAL DE INERCIA

La elipse de Culmann [6] es:

$$-24x^2 - 79/3y^2 + 8\sqrt{2} \cdot xy - 100 = 0$$

Los momentos principales de inercia se obtienen aplicando [8]:

$$I_{1,2} = \frac{30\sqrt{2}}{12} \left[\frac{79}{3} \pm 24 \mp \right.$$

$$\left. \sqrt{\left(79/3 - 24\right)^2 + 128} \right] = \begin{cases} 137 \\ 219 \end{cases}$$

de donde

$$\rho_{1,2}^2 = 1/36 \left[151 \mp \sqrt{1201} \right] = \begin{cases} 3,23 \\ 5,15 \end{cases}$$

luego $\rho_1 = 1,80$ $\rho_2 = 2,27$

la distancia entre los focos (10) es:

$$\overline{FF'} = 2/3 \cdot$$

$$\sqrt[4]{94 + 104 + 114 - 90^2 - 99^2 - 110^2} = 3,93$$

El "índice de equilateralidad" del triángulo resulta ser, según se aplique [11] ó [12], de 0,793 ó 0,923, respectivamente.

Charnela o línea neutra (Fig. 6.^a)

Puede interesar determinar la recta, lugar de los puntos en que no hay tensiones ni de compresión ni de tracción, en una sección triangular sometida a una fuerza perpendicular a ella en un punto P (x_0, y_0). Se trata de distribución plana de tensiones.

Sabemos (9) que dicha recta es la "antipolar" de P con respecto a la elipse central de inercia. O sea la polar de P' ($-x_0, -y_0$) con respecto a ella. Como dicha polar se obtiene "desdoblando" la ecuación [6] con respecto a las coordenadas de P', así:

$$-\beta x_0 x - \alpha y_0 y - \frac{\gamma}{2} (x_0 y + y_0 x) - \frac{\gamma^2 - 4\alpha\beta}{24} = 0$$

al efectuar agrupación de términos, queda:

$$\begin{aligned} & (2\beta x_0 + \gamma y_0)x + (2\alpha y_0 + \gamma x_0)y + \\ & + \frac{\gamma^2 - 4\alpha\beta}{12} = 0 \end{aligned} \quad [13]$$

Si en el ejemplo del triángulo anterior el punto de paso de la fuerza es P ($x_0 = 1; y_0 = -1$), la antipolar (charnela) es la recta

$$59,3x - 63,96y + 200 = 0$$

que representamos en la figura.

7. ELIPSE CENTRAL DE INERCIA DEL PARALELOGRAMO (10)

Consideremos el paralelogramo de lados $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, y ángulo α (Fig. 7.^a). Si φ es el ángulo que forma un eje EE' con el lado c , y d_1, d_2 son respectivamente las distancias al mismo de los puntos medios de los lados c y b tenemos:

$$S = b \cdot c \cdot \sin \alpha; a^2 = \overline{BC}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Adoptando como eje OX la paralela al lado AB y como OY el perpendicular, queda:

$$I_\varphi = 2 \cdot \frac{S}{6} \cdot \left(d_1^2 + d_2^2 \right) = \frac{S}{12} \left[b^2 \sin^2 (\alpha - \varphi) + c^2 \sin^2 \varphi \right] \quad [14]$$

El máximo y el mínimo se obtienen para

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b^2 \sin 2\alpha}{c^2 + b^2 \cos 2\alpha} \quad [15]$$

Por razonamientos análogos a los anteriores se obtiene como elipse de Culmann:

$$b^2 \sin^2 \alpha \cdot x^2 + (c^2 + b^2 \cos^2 \alpha) \cdot y^2 - 2b^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot x \cdot y - \frac{S^2}{12} = 0 \quad [16]$$

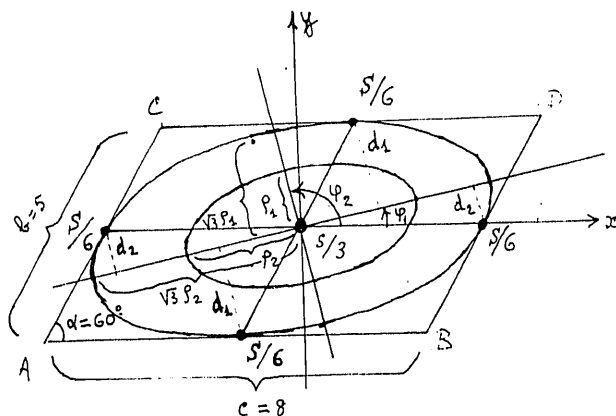


Figura 7.

ALGUNAS PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LA ELIPSE CENTRAL DE INERCIA

Es fácil comprobar que esta elipse es concéntrica y homotética de la inscrita en el paralelogramo y tangente al mismo en los puntos medios de sus lados.

Pero la relación de homotecia no es ahora $\sqrt{2}$, como en el triángulo, sino $\sqrt{3}$.

NOTAS

(1) C. Lorente de O. "La pieza elástica". Aguilar S.A. 1952 Madrid. Apéndices II y III.

(2) Parece que resurgen de nuevo los estudios de las geometrías clásicas — métrica, etc. — para sus aplicaciones en muy diversos problemas del campo de las estructuras tanto mecánicas, como físicas y biológicas. Los modelos de enlaces químicos y moleculares lo están exigiendo.

Libros como los de "Le Mathématicien", sección dirigida por Jean-Pierre Kahane en la colección reciente de "Presses Universitaires de France", y las traducciones del ruso en "Topics in Mathematics" Univ. Of Chicago, etc., parecen atestiguarlo.

(3) E.J. Routh "Dynamics of a system of rigid bodies" Mac Millan and Co. London 1882. Chapt. 1.

(4) En el tetraedro el momento de inercia de su masa M con respecto a un plano es el mismo que el de cuatro masas iguales a $M/20$ concentradas en sus vértices, y otra, de $4/5 \cdot M$ situada en su centro de gravedad.

(5) Los radios de giro de la elipse pueden pues deducirse de la ecuación bicuadrada

$$\rho^4 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36} \rho^2 + \frac{S^2}{108} = 0$$

En el tetraedro resulta que los semiejes del elipsoide inscrito en el mismo y tangente a las caras en su centro de gravedad, vienen dados por la ecuación bicúbica:

$$\rho^6 - \frac{A^2}{48} \rho^4 + \frac{S^2}{144} \rho^2 - \frac{V^2}{192} = 0$$

siendo A^2 la suma de los cuadrados de las aristas, S^2 la suma de los cuadrados de las áreas de las caras y V el volumen.

Los momentos de inercia con respecto a los planos principales son $M \cdot 3/5 \rho_i^2$ ($i = 1, 2, 3$).

Para el triángulo y el paralelogramo, siguiendo cálculos algo más complicados obtiene resultados análogos E. Friedirch en "Die Ermittlung der Trägheitsmomente für beliebige Dreiecks - und Parallelogrammquerschnitte". Oesterreichische Ingenieur - Zeitschrift. Agosto 1963 págs. 276-283.

(6) Tiene la elipse de Steiner propiedades muy interesantes. Pasa por el punto del mismo nombre del triángulo. Su ecuación en coordenadas baricéntricas $g_1 g_2 g_3$

$$1/g_1 + 1/g_2 + 1/g_3 = 0$$

lo que significa que todo punto M de la misma es tal que las áreas de los triángulos MBC , MCA y MAB , que son $g_1 = 1/2 a D_1$; $g_2 = 1/2 b D_2$; $g_3 = 1/2 c D_3$ cumplen (con sus debidos signos) la relación anterior, siendo $D_1 D_2 D_3$ las distancias de M a los lados a , b , c , del triángulo.

Ver por ejemplo H. Brocard et T. Lemoine "Courbes géométriques remarquables" t. III. Libr. A. Blanchard, París 1970, pág. 227; ó J. Carnoy "Géométrie Analytique" t. 1. París. Gauthier - Villars 1891 pág. 307; ó Serge Dubuc "Géométrie plane" Presses Universitaires de France. París 1971 pág. 140.

(7) Si se tratase de una masa *atraída* por A y B en *razón inversa* de la distancia, y *rechazada* por C en *razón también inversa*, la posición de equilibrio correspondería a los focos de una hipérbola tangente en C' (punto medio de AB) al lado AB y cuyas asíntotas fuesen los lados CA y CB . En el caso de una masa *atraída* (o *rechazada*) por A , B , C en *razón directa* de su distancia a ellos, el punto de equilibrio sería el baricentro del triángulo. P. Aubert et G. Papelier "Exercices de Mécanique" París. Libr. Vuibert. 1919, Livre III.

(8) Otra definición podría ser:

I. de E. = $2r/R$ siendo r y R los radios de los círculos inscritos y circunscrito del triángulo.

Como $r = S/p$ y $R = abc/4S$ resulta

$$I. de E. = \frac{(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{abc}$$

Podrían darse muchas más. Pero estimo que la expuesta en primer lugar, cociente ρ_1/ρ_2 es la más adecuada:

(9) Ver, por ejemplo, Cap. XIV, de C. Gay "Ponts en maçonnerie" Libr. J.B. Baillière et Fils. París 1924.

(10) Paralelogramos de clase $2m$ ($2m = 4$ son los ordinarios) así como n - vértices isobáricos, son cuestiones interesantes que pueden estudiarse en F. Bachmann u. Eckart Schmidt "N-ECKE" Bibliographischer Institut Mannheim Wien/Zürich Hochschultaschenbücher - Verlag 1970.