

# El centro de gravedad de las curvaturas del contorno de una figura plana y sus aplicaciones a la rodadura<sup>(\*)</sup>

Por M. A. HACAR BENITEZ

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Después de definir lo que es dicho "centro" en una figura plana, se determinan las longitudes de las trayectorias que, al rodar sobre una línea, describen los distintos puntos de la misma.

Con auxilio del citado "centro" se facilita la determinación de áreas comprendidas entre dichas trayectorias y esa línea (1).

Se exponen algunos ejemplos que evidencian su utilidad en la resolución de problemas geométricos.

Aplicaciones de la rodadura al estudio del movimiento de desplazamiento de bloques sometidos a acciones hidrodinámicas.

## DEFINICION

Se llama centro de gravedad de una línea al de distancias proporcionales de los elementos  $ds$  de la misma (figura 1) supuestos con masas o cargas iguales a su curvatura

$\frac{1}{R}$  por unidad de longitud (2).

Como, por definición, la curvatura de una línea en un punto es el límite de la relación del ángulo de las tangentes en dos puntos próximos (ángulo de contingencia) al elemento de arco que hay entre ellos, tendremos que:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$$

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de noviembre de 1982.

(1) Sólo hemos encontrado alusión de este «centro» en la mecánica de E. Collignon que indicamos en la bibliografía [5].

(2) En los tratados de Geometría a partir de Desartes, y sobre todo en los del pasado siglo y primeros decenios del presente, se prestaba gran atención al estudio de las cónicas y del triángulo, definiendo para este multitud de puntos, además de los clásicos como aricentro, circuncentro, ortocentro, incentro, etc., otros puntos y círculos, como el de los 9 puntos (en realidad son más de 43), o de Euler, los de Lemoine, Gergonne, Rocard, etc. (ver referencias bibliográficas [6], [7], [9] y [11]). Pero en ninguno de ellos hemos visto definido el centro de curvatura del mismo, que es el de gravedad de los vértices, afectados de masas o coeficientes iguales a los ángulos exteriores.

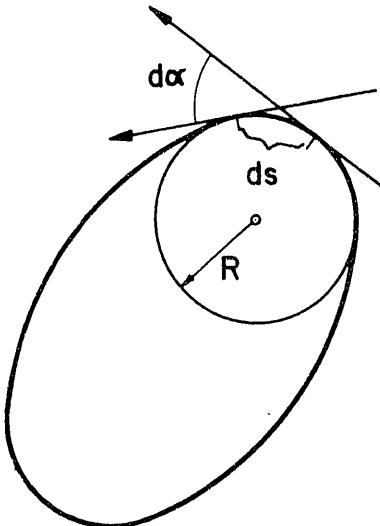


Fig. 1

Por ahora supondremos que la línea es plana, cerrada y convexa.

Si ésta es poligonal, las «masas» hay que disponerlas en los vértices y sus valores proporcionales a sus respectivos ángulos exteriores.

Vamos a ver la importancia que este «centro» juega en problemas de movimientos de rodadura y en la determinación de longitudes y áreas engendradas por ellos (3).

(3) Pensamos que algo de lo que aquí expondremos puede tener cierta utilidad en el estudio de los engranajes planos, de las cadenas cinemáticas y de los mecanismos en general. La teoría de éstos ha experimentado gran desarrollo en los últimos años en sus aplicaciones a los robots («robótica») (ver referencias bibliográficas [8] y [16]).

## LONGITUD DE RECORRIDO DE UN PUNTO CUALQUIERA DE LA FIGURA PLANA AL RODAR

### 1. Rodando sobre una recta

Si la curva (C) rueda sobre la recta EE' (figura 2), un elemento  $ds$  girará un elemento de ángulo  $d\alpha$ , tal que:  $d\alpha = \frac{ds}{R}$ , siendo  $R$  el radio de curvatura de (C) en el contacto A con la recta. Un punto cualquiera M del plano de la curva (C), llamada «ruleta», pasará a la posición M', describiendo un arco elemental de

$$\text{longitud: } \overline{MA} d\alpha = \overline{MA} \frac{ds}{R}.$$

Integrando esta expresión tendremos el recorrido total del punto M. Si, por ejemplo, la ruleta diese una vuelta completa, como la suma de los ángulos exteriores de una línea cerrada es  $2\pi$ , el recorrido total realizado por

M vendría dado por la expresión  $L = \int_0^{2\pi} \overline{MA} \cdot d\alpha$ , tomando la integral a lo largo de los puntos A del contorno de la curva «ruleta» (C).

De modo análogo, si la poligonal  $A_{i-2} A_{i-1} A_i A_{i+1} A_{i+2}$  (figura 3) «apoyada» en su lado  $A_{i-1} A_i$  se moviese girando hasta sustentarse en  $A_i A_{i+1}$ , un punto cualquiera M de la misma giraría el arco de círculo MM' de longitud  $\overline{MA}_i \cdot \alpha_i$ , siendo  $\alpha_i$  el ángulo exterior de los lados consecutivos  $A_{i-1} A_i$  y  $A_i A_{i+1}$  de la poligonal.

Si ésta rodase sobre EE', dando una vuelta completa, el recorrido total de M vendría dado por:  $L = \sum_{i=1}^n \overline{MA}_i \cdot \alpha_i$ , siendo la poligonal de n lados.

$$\text{Evidentemente } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi.$$

Ejemplos:

Ejemplos:

1º Recorrido del centro de un polígono regular de n lados rodando sin resbalar sobre una recta al dar una vuelta completa, siendo R el radio del círculo circunscrito a dicho polígono.

Como en tal caso  $\overline{MA}_i = R$  y  $\alpha_i = \frac{2\pi}{n}$  (figura 4) el recorrido buscado será:

$$L = n R \frac{2\pi}{n} = 2\pi R$$

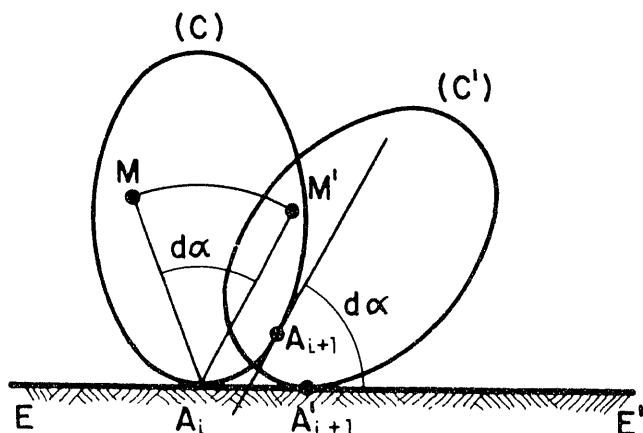


Fig. 2

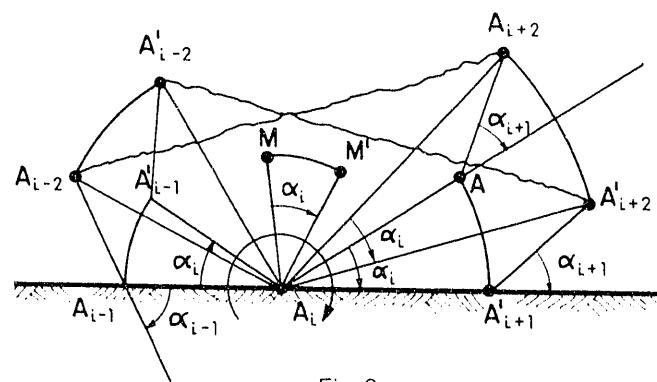


Fig. 3

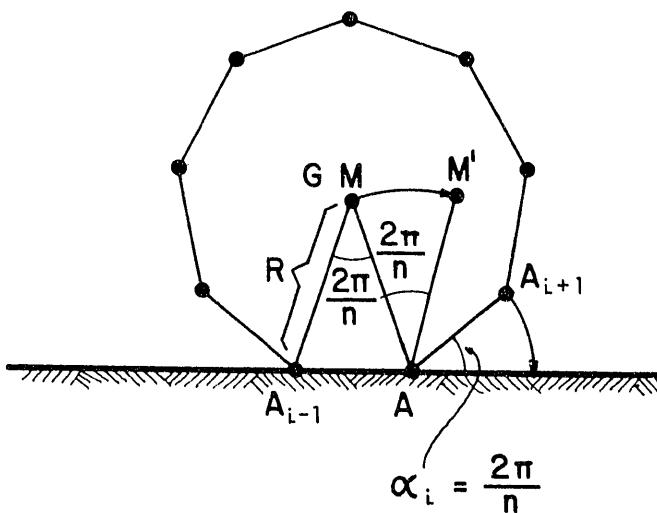


Fig. 4

resultando la curiosa propiedad de que el recorrido es independiente del número de lados del polígono; sólo depende del radio de su circunferencia, R, y es siempre  $2\pi R$ .

## EL CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS CURVATURAS DEL CONTORNO DE UNA FIGURA PLANA...

2.<sup>o</sup> Recorrido de un punto cualquiera del interior de un círculo que rueda sin resbalar sobre una recta (4).

Sea  $a$  la distancia de  $M$  al centro del círculo de radio  $R$ .

De acuerdo con lo indicado  $L = \int_0^{2\pi} MA \cdot d\alpha$ .

Como en el triángulo MOA de la figura 5  $MA^2 = a^2 + R^2 - 2aR \cos \alpha$ , sustituyendo en la integral queda:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \alpha} d\alpha,$$

que puede reducirse a una integral elíptica de segunda especie (5). Sería el caso de la longitud de una arcada de cicloide acortada.

En el caso particular de estar  $M$  sobre la circunferencia (cicloide natural)  $a = R$ , resulta:

$$L = \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \alpha} d\alpha =$$

$$= 2 R \int_0^{2\pi} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha = 8 \cdot R.$$

que, como sabemos, es la longitud de un arco de cicloide.

### 2. Rodando sobre una curva

Si la rodadura es sobre otra curva, el problema es análogo. El ángulo elemental que gira un punto  $M$  al recorrer el punto de contacto el elemento  $ds$  no es sólo el ángulo de contingencia  $d\alpha$  (figura 6) de dos tangentes próximas de la curva «ruleta», sino que se incrementa en el ángulo  $d\beta$  de la curva «base» correspondiente al mismo  $ds$ .

(4) Aunque etimológicamente ruleta, cicloide y trocoide vienen a significar lo mismo, ahora suele reservarse el nombre de «ruleta» o «generatriz» a la curva móvil, cualquiera) que rueda sobre otra llamada «base». Cicloide» es la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta. Si los puntos del lazo de dicho círculo son interiores o exteriores al lazo las curvas descritas son «cicloides», acortadas o largadas, respectivamente. También se las llama «trocooides» (aparecen en la teoría del oleaje). La curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda exteriormente sobre otra se llama «epicicloide». Si lo hace por su interior, «hipocicloide». Por último, si el punto no está en la misma circunferencia se les llama «epitrocoide», «hipotrocoide», según que ruede por el exterior o el interior de la (ver tomo 3, página 255, cita [4]).

(5) Definiciones y tabulaciones de estas integrales hemos en la conocida obra (en alemán e inglés) de Jahnke y F. Emde, «Tables of Functions - Funktionentafeln». Dover Publications, 1945. Más moderno es el voluminoso «Handbook of Mathematical Functions». Ed. by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Dover Publ., 1964.

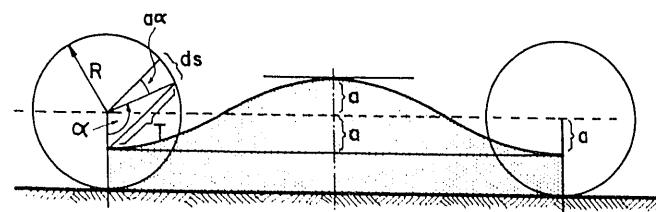


Fig. 5

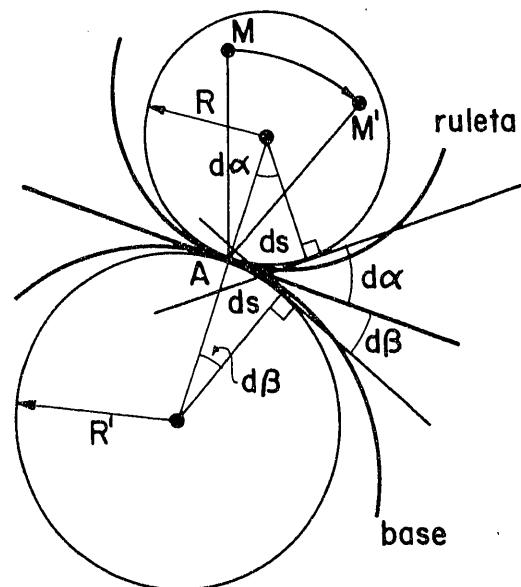


Fig. 6

Si  $R$  y  $R'$  son los radios de curvatura respectivamente de dichas curvas en su contacto, el elemento total de ángulo girado por  $M$  (alrededor o con centro en dicho punto de contacto) es ahora:

$$d\alpha + d\beta = \frac{ds}{R} + \frac{ds}{R'} = ds \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) =$$

$$= ds \left( 1 + \frac{R}{R'} \right) \quad (6)$$

Para hallar el recorrido de  $M$  habrá que integrar la expresión  $MA \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) ds$ , moviendo lo que se deba a lo largo del contorno de la curva «ruleta».

Si ambas curvas (base y ruleta) fuesen cir-

(6) Ver página 48 del libro de H. Bouasse citado en referencia bibliográfica [2].

cunferencias (7) de radios  $R'$  y  $R$  tales que  $R' = KR$ , para un punto de la circunferencia ruleta distante  $a$  de su centro, el recorrido  $L$  de una arcada completa sería también en general el resultado de una integral de tipo elíptico, análoga a la del segundo ejercicio del apartado anterior, pero multiplicada por  $1 + \frac{1}{K}$

Por esta razón, si está el punto sobre la circunferencia, resultan como longitudes de cada arcada de epicicloide ordinaria:

$$8R \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot Y \text{ para } k \text{ arcadas} \quad [8(1+k) \cdot R] \quad (8)$$

Ejemplos:

1.º Hallar la longitud total de la curva llamada cardioide, o epicicloide engendrada por un punto de una circunferencia que gira sobre otra del mismo radio.

De acuerdo con lo expuesto,  $k = 1$ , resultando  $L = 16 \cdot R$ , como es sabido.

2.º Hallar las longitudes totales de las hipocicloides llamadas: a) de La Hire; b) de Steiner (o de tres retrocesos); c) Astroide (o de cuatro retrocesos).

Es fácil comprobar que cuando se trata de hipocicloides las fórmulas son análogas a las de las epicicloides sin más que considerar que  $K$  es negativo.

a) Como la hipocicloide de La Hire (que en realidad es un segmento doble) corresponde a la línea descrita por un punto de una circunferencia de radio  $R$  que rueda interiormente sobre otra de radio  $R' = 2 \cdot R$ , resulta que  $k = 2$  y como longitud de una arcada:

$$8 \left(1 - \frac{1}{2}\right) R = 4R; \text{ luego el total de longitud es de } 2 \times 4 R = 8 R.$$

b) La hipocicloide de Steiner corresponde a  $k = 3$ , luego una arcada mide

$$8R \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3} R, \text{ y toda ella } 16 R.$$

c) Para la astroide  $k = 4$ , una arcada me-

(7) (Ver capítulo XI del libro de H. Bouasse citado en la referencia [3] en que trata de las epicicloides y las hipocicloides. También de las curvas llamadas «rosáceas», caso particular de las anteriores, cuando el punto trazador pasa por el centro del círculo fijo (referencia [15]).

(8) Este resultado aparece indicado por ejemplo en la obra citada [11] de Gomez Teixeira, página 440, haciendo determinadas integrales cuyos resultados ya eran conocidos por Newton y Bernouilli. Creemos ser de utilidad la forma tan sencilla en que lo hemos hallado.

diría:  $8 \left(1 - \frac{1}{4}\right) R = 6 R$ , y el total  $24 R$ .

## AREAS ENGENDRADAS POR UN PUNTO DE UNA FIGURA PLANA AL RODAR

### 1. Rodando sobre una recta

Veamos el área  $S$  comprendida entre la «base» rectilínea  $EE'$  y la línea descrita por un punto  $M$  de la «ruleta» al moverse rodando, después de dar una vuelta completa.

Como antes, al rodar, el punto  $M$  pasará a  $M'$  (figura 2). El área buscada será el resultado de integrar dos elementos de área de tipo

del sector circular  $MAM'$  que vale:  $\frac{1}{2}MA^2 d\alpha$ ,

y los elementos triangulares  $M'AB$ . La suma de estos últimos es evidente el área de la curva ruleta que llamaremos  $S_0$ .

En cuanto a la suma de los elementos  $MA^2 d\alpha$ , como  $M$  es fijo (en el plano de la ruleta), si tomamos sobre cada elemento  $ds$  del

contorno un «peso» o coeficiente  $\frac{1}{R}$  siendo

$R$  el radio de curvatura en dicho elemento, llamando  $G$  al centro de gravedad de estos pesos, por el conocido teorema de Leibnitz (9) aplicado a los diversos elementos del contorno tendremos:

$$\int \overline{MA}_i^2 \frac{ds}{R} = \int \overline{MA}_i^2 d\alpha_i = \\ = \int \overline{GA}_i^2 d\alpha_i = \overline{MG}^2 \int d\alpha_i$$

Pero como la suma de los ángulos de contingencia o exteriores de un contorno o polígono convexo vale  $4$  rectos:  $\int d\alpha_i = 2\pi$ .

Por lo tanto, determinado  $G$ , el problema se reduce a hallar la integral  $\int \overline{GA}_i^2 d\alpha_i$  a lo largo del contorno de la «ruleta».

En resumen, el área buscada es:

$$S = S_0 + \pi \overline{MG}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \overline{GA}_i^2 d\alpha_i \quad (1C)$$

(9) Ver, por ejemplo, referencia bibliográfica [17].

(10) En el caso de tratarse de la «rodadura» de un polígono de  $n$  lados en lugar de esta integral se tomará la suma  $\sum_{i=1}^n \overline{GA}_i^2 \cdot \alpha_i$ . Dicha área será mínima cuando  $M$  coincide con  $G$ , anulándose el segundo sumando. Para un

## EL CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS CURVATURAS DEL CONTORNO DE UNA FIGURA PLANA

expresión fundamental en la que de los sumandos que la componen, el primero, o sea,  $S_0$ , es constante. El tercero  $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{GA}_i^2 d\alpha$ , no depende del punto M tomado en la ruleta, sino sólo de la forma geométrica del contorno. El sumando  $\pi MG^2$  es el único variable con la posición de M. Se anula si M coincide con G. Entonces S resulta mínimo.

En resumen, podemos decir:

1.º El centro de gravedad G de las curvaturas de la línea del contorno de la curva «ruleta» es tal que el área comprendida entre una recta y la curva que describe al rodar sobre ella es mínima.

2.<sup>o</sup> Los puntos M de la ruleta que equidistan de G describen curvas tales que las áreas comprendidas entre ellas y la «base» rectilínea son iguales.

Ejemplos:

1.<sup>o</sup> Área comprendida entre una arcada de cicloide acortada y su base de rodadura (figura 5).

Evidentemente, G coincide con el centro de la ruleta de radio R

$$= R, \text{ luego } \frac{1}{2} \int_0^R \overline{GA}_r^2 \, dr = \pi R$$

Por tanto, el área buscada es:

$$S = \pi R^2 + \pi a^2 + \pi R^2 = \boxed{\pi(2R^2 + a^2)}$$

Para  $a = R$  tenemos el caso de la cicloide ordinaria, en la que  $S = 3 \pi R^2$ , o sea, tres veces el área del triángulo de lados  $a, b, c$ , hemos calculado que dicha área

$$S = S_0 + \frac{1}{4\pi} [a' B' C' - b' C' A' + c' A' B']$$

que A', B' y C' son los suplementos de los ángulos de  $\triangle ABC$ , medidos en radianes.

(11) En verdad esta fue la primera propiedad de la curva descubierta por Roberval en 1964. Aunque la integral por lo cual puede obtenerse:

$$\int_0^{2\pi} y \, dx = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \, d\theta = 3\pi R^2$$

á hoy al alcance de cualquier estudiante, era antes de tremia dificultad. Creo que lo expuesto constituye una ma muy sencilla de encontrar dicha área. Recordare-  
s que en 1658 el célebre Pascal, con el pseudónimo  
«Dettonville», propuso dós premios de 40 y 20 «pisto-  
nes (monedas de oro) a quienes obtuviesen áreas, vo-  
lúmenes y centros de gravedad relacionados con la ci-  
e...»

veces el área del círculo generador, como es bien sabido (11).

2.<sup>o</sup> Área engendrada por el centro de un polígono regular de  $n$  lados y de radio  $R$  al dar rodando una vuelta completa. Según lo expuesto, como

$$\sum_{i=1}^n \overline{G} A_i^2 a_i = n R^2 \frac{2\pi}{n} = 2\pi R^2$$

## resulta

$$S = \frac{\pi R^2}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = \pi R^2$$

(figuras 4 y 7)

Consideramos los casos límites

a)  $n = 2$ ;  $S_1 = \pi R^2$ , correspondientes a la figura 7a.

b)  $n = \infty$ ; en el límite como del cociente del arco al seno tiende a uno cuando

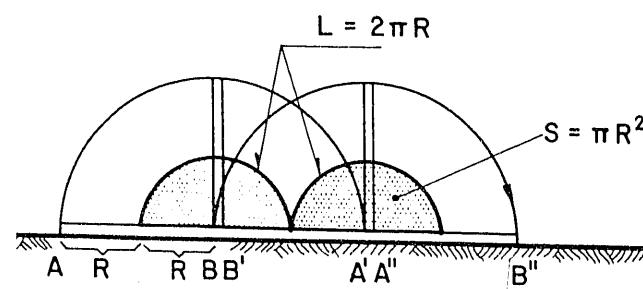


Fig. 7a.— $n = 2$ , Bisegmento

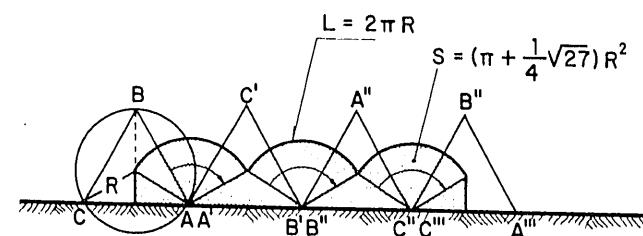


Fig. 1(b) = 0 ≈ 3. Tuamoto

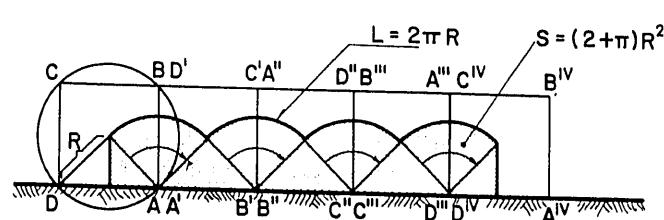


Fig. 7c.— $n = 4$ , Cuadrado.

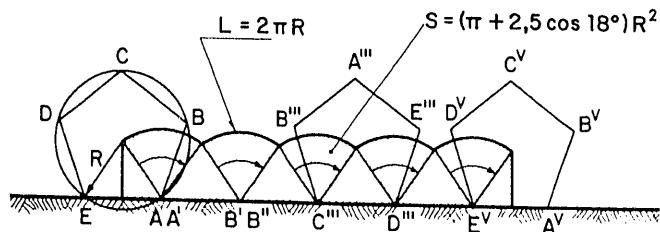


Fig. 7d.—n = 5. Pentágono.

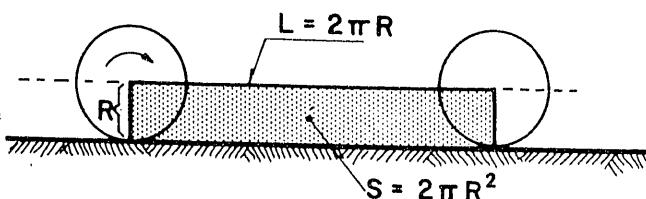


Fig. 7e.—n = ∞ . Círculo.

éste disminuye,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = 2\pi$ , luego  $\lim S = 2\pi R^2$ , lo cual es evidente (figura 7e).

3º Área engendrada por uno de los vértices del polígono regular al rodar sobre la recta.

Aparece entonces el término  $\pi \overline{MG}^2 = \pi R^2$  resultando un valor de S mayor que en el caso del área descrita por el centro del polígono, siendo ahora:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} + 2\pi R^2$$

Cuando n crece indefinidamente tenemos en el límite el área de la arcada de cicloide que vale  $3\pi R^2$ , como era de esperar.

(12) Con la rodadura de una curva (ruleta) sobre otra (base) se puede estudiar el movimiento plano en general. En cada posición hay en la ruleta determinados puntos y curvas especiales, como el centro instantáneo de rotación, el círculo de las inflexiones, etc. Hay también la llamada «cúbica de curvatura estacionaria» («circling point curve» en inglés, y «Kreisungspunktkurve» en alemán), que es el lugar geométrico de los puntos que tienen cuatro puntos de contacto infinitamente próximos de una circunferencia (ver obra citada de J. Nieto, página 140, en [16] de la bibliografía). Su importancia es grande en la teoría de los mecanismos, ya que las trayectorias de sus puntos se adaptan mejor a tramos circulares y rectilíneos, prestando gran ayuda a los problemas de síntesis. En el libro de A. Schoenflies, citado también en [18], se estudia dicho lugar geométrico para cuatro posiciones cualesquiera del plano móvil (lo anterior es el caso límite, cuando estas cuatro posiciones se acercan indefinidamente). Y también (página 42) los puntos (son cuatro, en general) en que para cinco posiciones cualesquiera de un sistema plano, están en una misma circunferencia.

## 2. Rodando sobre una curva (12)

De modo análogo a los casos anteriores, es fácil ver que ahora hay que tomar en las integrales, en lugar de  $d\alpha$ ,  $d\alpha \left(1 + \frac{R}{R'}\right) = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot d\alpha$ , siendo  $k = \frac{R'}{R}$  la relación entre los radios de las curvas «base» y «ruleta», respectivamente, y considerando K negativo si la «ruleta» rueda por el interior o parte cóncava de la «base».

Ejemplos:

1º Área de una arcada de epicicloide (o hipocicloide) engendrada por un punto M de una ruleta de radio R distante de su centro d al rodar exteriormente (o interiormente) sobre una base circular de radio  $R' = KR$  (figura 8).

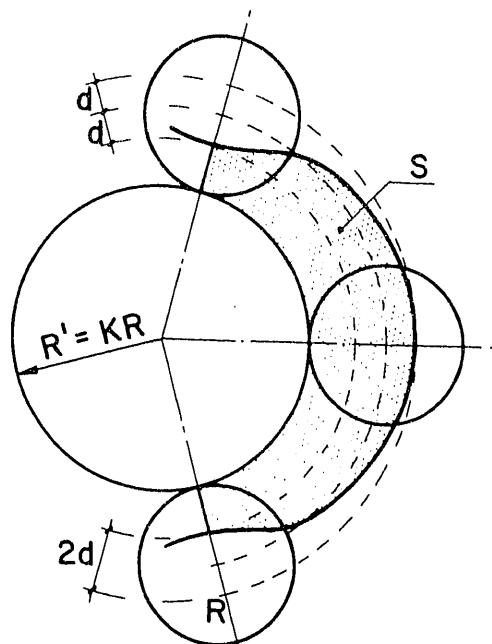


Fig. 8.

Se prueba fácilmente que para la epicicloide de es:

$$S = S_0 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \overline{MA}^2(d\alpha + d\beta) = \pi R^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{K}\right) \int_0^{2\pi} \overline{MA}^2 d\alpha$$

## EL CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS CURVATURAS DEL CONTORNO DE UNA FIGURA PLANA...

y como por el teorema de Leibnitz:

$$\int_0^{2\pi} \overline{MA^2} d\alpha = \int_0^{2\pi} \overline{GA^2} d\alpha + 2\pi \cdot \overline{MG^2} = \\ = 2\pi R^2 + 2\pi d^2$$

queda:

$$S = \pi R^2 + \pi \left( R^2 + d^2 \right) \left( 1 + \frac{1}{K} \right)$$

En el caso de una hipocicloide es la misma con K negativa.

2.<sup>o</sup> Areas de las curvas llamadas: a) Nefroide; b) Cardioide; c) Hipocicloide de La Hire; d) Hipocicloide de Steiner, y e) Astroide (13).

Corresponden respectivamente a: K = 2; 1; -2; -3 y -4.

Por tanto, el área de una arcada comprendida entre la circunferencia base (de radio R') y la curva es la última expresión indicada de S, para d = R, o sea: S =  $\left( 3 + \frac{2}{K} \right) \pi R^2$ ; y como

son K lóbulos o arcadas, será:

$$(2 + 3K) \pi R^2$$

En el caso de las epicycloides a esta cantidad habrá que sumar el área del propio círculo base que es  $\pi R'^2 = \pi K^2 R^2$ , resultando

$$S_{\text{total}} = \pi (1 + K) (2 + K) \cdot R^2 \quad (14)$$

(13) Sobre estas curvas, ver referencias [1], [14], [19] y [20].

(14) Esta expresión aparece en diversos tratados, como por ejemplo en el de Brocard y Lemoine, que citamos en referencia bibliográfica [4], tomo III, página 259. Creemos, sin embargo, haber llegado a ella por un camino muy sencillo, casi intuitivo.

(15) Estas curvas pueden obtenerse de muy diversas formas. En particular como curvas cáusticas por reflexión o catacáusticas (las cáusticas por refracción se llaman también diacáusticas). La importancia de las cáusticas es grande en toda la física, aunque generalmente se estudian más en la óptica. Son el lugar geométrico de los cos donde se concentra el calor o la luz reflejada o fractada por otra curva llamada «dirimante».

Así tenemos que la cáustica por reflexión del círculo para los rayos que parten de un punto de su circunferencia es una cardioide que tiene por foco el centro de dicho círculo.

Pero, además, la cáustica por reflexión de una cardioide para los rayos que parten de su punto de retroceso es una epicycloide de dos retrocesos (nefroide). Fue J. Lemaire quien reunió en su obra «Hypocycloïdes et épicycloïdes» las principales propiedades de éstas. No nos extenderemos más, remitiendo al lector que se profundizar en estas materias a las referencias [1], [11], [12] y [13], y sobre todo a los tomos II y III de la obra de Brocard y Lemoine, referencia [4].

Para las hipocicloides los valores de K son negativos.

En resumen, así tenemos (15):

| K | Curva                                     | Longitud     | Área             |
|---|-------------------------------------------|--------------|------------------|
| 2 | Nefroide (epicicloide de 2 retrocesos)    | $24 \cdot R$ | $8\pi \cdot R^2$ |
| 1 | Cardioide (epicicloide de 1 retroceso)    | $16 \cdot R$ | $6\pi \cdot R^2$ |
| 2 | Hipocicloide de La Hire (diámetro doble)  | $8 \cdot R$  | 0                |
| 3 | Hipocicloide de Steiner (de 3 retrocesos) | $16 \cdot R$ | $2\pi \cdot R^2$ |
| 4 | Astroide (hipocicloide de 4 retrocesos)   | $24 \cdot R$ | $6\pi \cdot R^2$ |

R = radio de la circunferencia móvil («ruleta»).

R' = radio de la circunferencia fija («base»).

K = R'/R en las epicicloides.

K = -R'/R en las hipocicloides.

L = Longitud total =  $8 \cdot (1 + K) \cdot R$ .

S = área total =  $\pi (1 + K) (2 + K) R^2$ .

**K = 2**

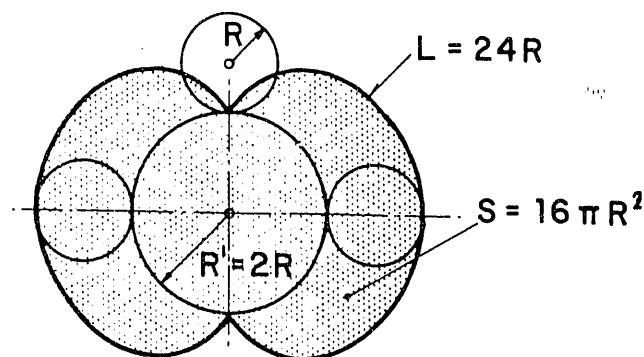


Fig. 9a.—Nefroide (Epicicloide de 2 retrocesos).

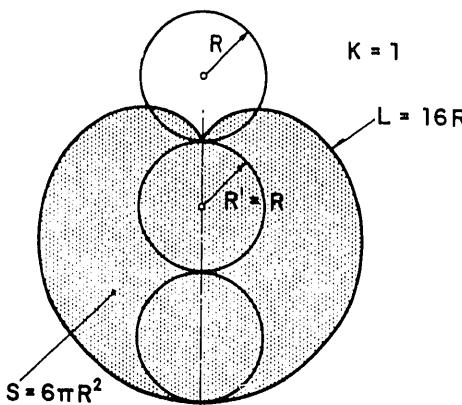
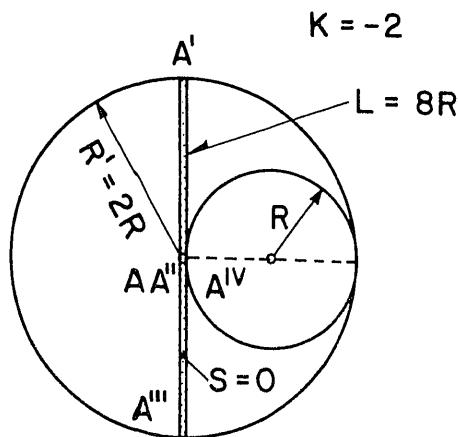


Fig. 9b.—Cardioide (Epicicloide de 1 retroceso).



### ENERGIA NECESARIA PARA HACER RODAR UN BLOQUE

La experiencia nos enseña que es más fácil hacer rodas sobre una recta un círculo que un cuadrado. Hacer rodar un exágono exigirá un esfuerzo intermedio.

Vamos a considerar la rodadura de unos cuantos tipos de figuras sencillas, en las que se confirman los resultados de dicha experiencia.

#### 1. Triángulo cualquiera (figura 10)

La trayectoria de su centro de gravedad  $G$  estará formada por arcos de círculo  $G, G', G'', G''' \dots$  En una vuelta completa del triángulo habrá recorrido, rodando, una longitud igual a la suma de sus lados  $a + b + c$ .

Fig. 9c.—Hipocicloide de La Hire (diámetro doble).

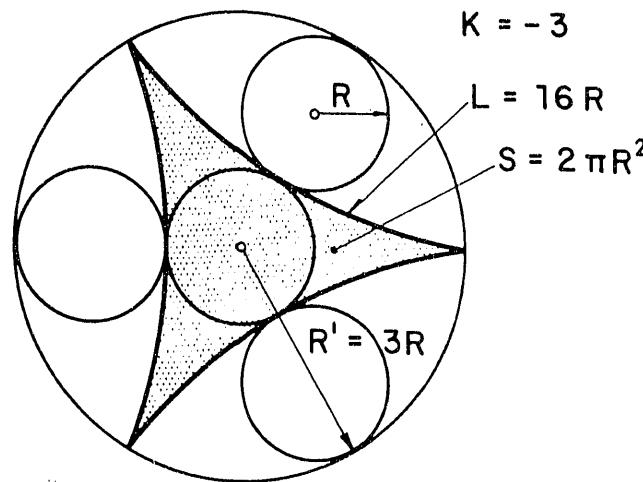


Fig. 9d.—Hipocicloide de Steiner (tres retrocesos).

$K = -4$

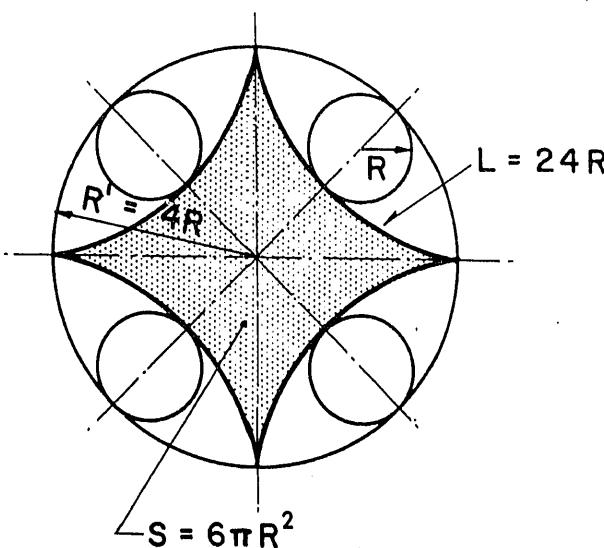


Fig. 9e.—Astroide (Hypocicloide de 4 retrocesos).

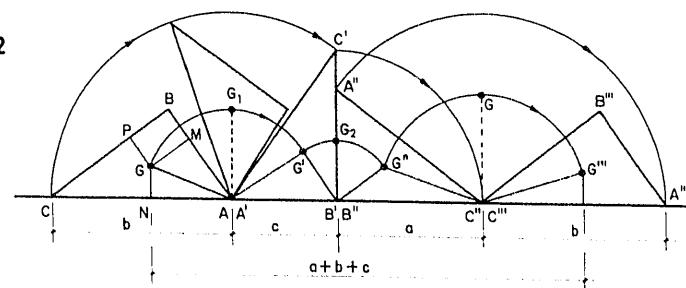


Fig. 10.

Si suponemos que el movimiento es lento y despreciamos las fuerzas de inercia, el trabajo a realizar será el de:

- 1.º Levantar el peso  $P$  del triángulo desde  $G$  hasta  $G_1$ , punto más alto del arco  $GG'$ .
- 2.º Lo mismo desde  $G'$  a  $G_2$ , y 3.º Lo mismo desde  $G''$  a  $G_3$ . Para los recorridos  $G_1G', G_2G''$  y  $G_3G'$  no hay que hacer esfuerzo alguno. El triángulo cae por su propio peso. Suponemos que no hay «rebote» ni recuperación de energía al caer.

Como los desniveles son:

$$\begin{aligned} \text{entre } G \text{ y } G_1 &\dots \quad \overline{GA} - \overline{GN} \\ \text{entre } G' \text{ y } G_2 &\dots \quad \overline{GB} - \overline{GP} \\ \text{entre } G'' \text{ y } G_3 &\dots \quad \overline{GC} - \overline{GM} \end{aligned}$$

(siendo  $M, N, P$  los pies de las perpendiculares trazadas desde  $G$  a los lados del triángulo, el trabajo a realizar es:

$$P [(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) - (\overline{GM} + \overline{GN} + \overline{GP})]$$

Observamos que  $\overline{GA}, \overline{GB}$  y  $\overline{GC}$  son las dos terceras partes de las longitudes de las me-

## EL CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS CURVATURAS DEL CONTORNO DE UNA FIGURA PLANA...

dianas  $m_a$ ,  $m_b$  y  $m_c$ , y que  $\overline{GM}$ ,  $\overline{GN}$  y  $\overline{GP}$  son las terceras partes de las alturas  $h_a$ ,  $h_b$  y  $h_c$ , respectivamente.

Sustituyendo valores y simplificando llegamos a obtener como promedio del trabajo a realizar por unidad de recorrido en la rodadura:

$$\frac{P}{3(a+b+c)} \left[ \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} + \sqrt{2(c^2+a^2)-b^2} + \sqrt{2(a^2+b^2)-c^2} - 2S \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right]$$

siendo  $S$  el área del triángulo.

En el caso de ser equilátero,  $a = b = c$ ;  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ , queda  $\frac{\sqrt{3}}{6} P = 0,2886 \cdot P$ .

### 2. Polígono regular de $n$ lados (figura 11)

El trabajo para un «recorrido» rodando igual al lado  $l$  del polígono es  $P \cdot (R - \text{apotema}) = P \left( R - R \cos \frac{\pi}{n} \right)$

Como  $l = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ , el trabajo por unidad de desplazamiento resulta ser:

$$P \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$$

Cuando  $n$  crece indefinidamente (círculo), resulta nulo, como era de esperar.

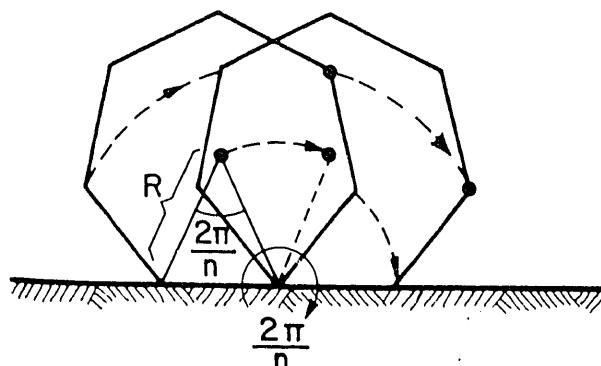


Fig. 11.

Damos un cuadro para distintos polígonos:

| FIGURA                | $n$ | Trabajo/unidad de longitud |
|-----------------------|-----|----------------------------|
| Triángulo .....       | 3   | $0,2886 \cdot P$           |
| Cuadrado.....         | 4   | $0,2071 \cdot P$           |
| Pentágono.....        | 5   | $0,1625 \cdot P$           |
| Exágono.....          | 6   | $0,1340 \cdot P$           |
| Pentadecágono....     | 15  | $0,0525 \cdot P$           |
| Círculo..... infinito |     | $0,0000 \cdot P$           |

### 3. Elipse de semiejes $a$ y $b$ ( $a > b$ ) (fig. 12)

Si  $L$  es su longitud y  $P$  su peso, el trabajo por unidad de desplazamiento en la rodadura será, como se evidencia observando la figura:

$$\frac{P \cdot 2(a-b)}{L}$$

La longitud  $L$  se obtiene por medio de una integral de tipo elíptico, que está tabulada.

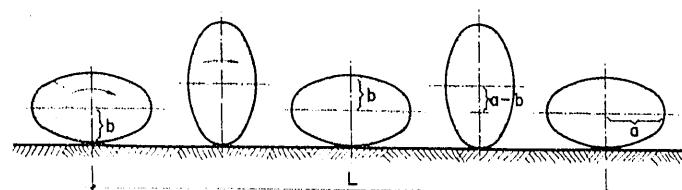


Fig. 12.

Con suficiente aproximación puede adoptarse la expresión:

$$L = \pi \left[ \frac{3}{2} (a+b) - \sqrt{ab} \right] \quad (16)$$

Por tanto, el trabajo unitario buscado será:

$$\frac{2(a-b)}{\pi \left[ \frac{3}{2} (a+b) - \sqrt{ab} \right]} \cdot P$$

Para el caso de ser  $a = b$  (círculo), claro, resulta nulo.

Para  $a = 2b \dots 0,2063 \cdot P$ , y para  $a = 3b \dots 0,2983 \cdot P$ , que difieren poco de los valores que antes obtuvimos para el cuadrado y el triángulo equilátero, respectivamente, del mismo peso  $P$ .

(16) Expresión que encontramos en «Notes y formules de l'Ingenieur», De Laharpe, tomo I. A. Michel Ed. 21 ed. París, 1923, donde se da una tabla para diversos valores de  $a$  y  $b$ . Para más precisión sobre longitudes de arcos de elipse ver el citado libro de Jahnke y Emde de Tablas de Funciones.

## EL CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS CURVATURAS DEL CONTORNO DE UNA FIGURA PLANA...

### FUERZA PARA MOVER UN BLOQUE (figura 13)

La fuerza  $F$  horizontal que sería preciso aplicar en el centro de gravedad  $G$  de un bloque poligonal regular de  $n$  lados para moverlo se deduciría de la igualdad:

$$F \cdot \text{apotema} = P \frac{1}{2} \quad \text{o sea,}$$

$$F \cdot R \cos \frac{\pi}{n} = P \cdot R \sin \frac{\pi}{n}, \text{ de donde}$$

$$F = P \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

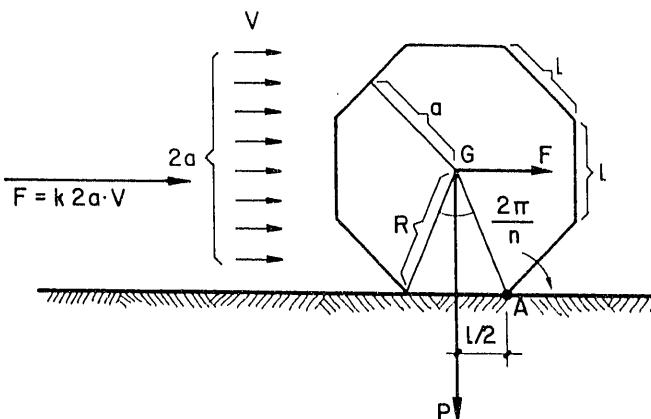


Fig. 13.

Supongamos que hubiese una corriente de velocidad  $V$  uniforme en toda su altura y que la fuerza hidrodinámica de la misma fuese proporcional a su cuadrado y a la superficie frontal sobre la que actúa. Aunque esta última sería igual a dos veces la apotema, si el número de lados es par, e igual a la apotema más el radio, si fuese impar, tomaremos  $2R$  (y así además estaremos del lado de la seguridad) para simplificar.

$$\text{Así tendríamos: } KV^2 \cdot 2R = P \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

$$\text{Sustituyendo } R = \sqrt{\frac{2P}{\gamma \cdot n \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}}, \text{ y ha-}$$

ciendo operaciones se despeja:

$$V^2 = \frac{\sqrt{P\gamma n}}{2K} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

Para  $n = \infty$  (círculo),  $V = 0$  como era de esperar.

$$\text{Si } n = 4 \dots V_{(4)}^2 = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{P\gamma}{2}}$$

$$\text{y si } n = 6 \dots V_{(6)}^2 = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{P\gamma}{2}} \cdot 0,658$$

Esto nos indica que un bloque exagonal iniciaría su movimiento en una corriente de velocidad sólo del  $\sqrt{0,658} = 81\%$  de la velocidad a que empezaría a moverse otro bloque del mismo peso, pero cuadrado.

También nos indican las expresiones anteriores que si se trata de bloques semejantes y del mismo material, para ser arrastrados, sus pesos deben ser proporcionales a las cuartas potencias de las velocidades.

Quizá sea exagerado tomar la resistencia por unidad superficial proporcional al cuadrado  $V$ . Al no ser grandes las velocidades podría tomarse dicha resistencia directamente proporcional a  $V$ . Así resultarían los pesos de los bloques proporcionales a los cuadrados de  $V$ . También podría adoptarse un término medio, como por ejemplo tomar los  $P$  proporcionales a los cubos de las  $V$  (17).

### RODADURA O DESLIZAMIENTO DE LOS CANTOS (figura 14)

Sean  $a$  y  $b$  los semiejes de la sección (elíptica) de un canto rodado. Si  $\phi$  es el ángulo de rozamiento del mismo sobre el lecho del río (horizontal), que suponemos constante, y  $F$

(17) No pretendemos ni mucho menos con lo indicado explicar el movimiento de los bloques. Solamente a título indicativo y haciendo hipótesis tan restrictivas que no pueden cumplirse en la realidad, como es el suponer que ruedan, sin deslizar, sobre un fondo plano, y considerándolo sólo en dos dimensiones, hemos tratado de aproximarnos un poco a interpretar lo que sucede. Para el estudio serio del problema hay que considerar las resistencias hidrodinámicas según la forma del bloque; la distribución de las velocidades en función de la profundidad; los fenómenos de turbulencia, etc. Acerca de ello pueden consultarse libros como los de J. C. Lebreton, «Dynamique fluviale», Eyrolles, París, 1974; A. J. Raudkivi, «Loose Boundary Hydraulics», Pergamon Press, 1976; S. Leliavsky, «Precis d'Hydraulique fluviale», Dunod, París, 1961; Bernard Quesnel, «Traité d'Hidráulique fluviale appliquée», Eyrolles, París; Ven-Te-Chow, «Open-Channel Hydraulics», McGraw-Hill, 1959, etcétera.

Estudios teóricos y experimentales más recientes de estas cuestiones aparecen en los «Proceedings of the A.S.C.E.» (American Society of the Civil Engineering) de la serie HY, hidráulica, y de la WW, puertos.

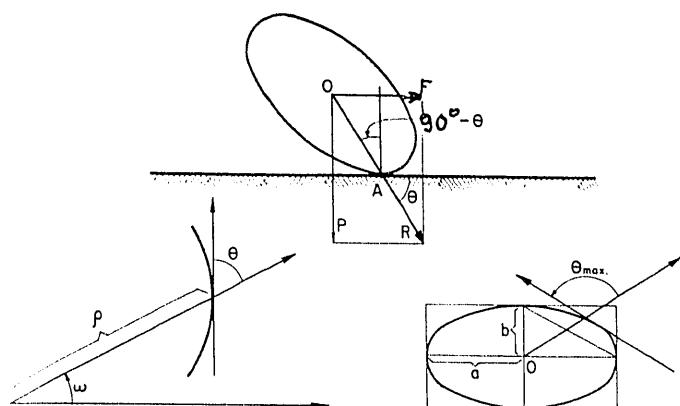


Fig. 14.

la resultante de las fuerzas hidrodinámicas, al combinarse con el peso  $P$ , darán otra resultante  $R$  que hará rodar el bloque sólo si pasa a la derecha del punto de apoyo  $A$ . El equilibrio en cada posición tendrá lugar cuando el ángulo de  $R$  con la vertical sea igual a  $\varphi$ .

Pero es sabido que en una elipse el ángulo  $\theta$  es mínimo cuando la tg en su contorno y  $OA$  corresponden a las direcciones de las diagonales del rectángulo circunscrito a la elipse, y cuyos lados son paralelos a los ejes, o sea, que  $\theta_{\min} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}$ .

Por tanto, no habrá deslizamiento, sino rodadura, si  $\theta_{\min} > \operatorname{tg} \varphi$ , o sea, si:

$$\frac{a^2 - b^2}{2ab} < \operatorname{tg} \varphi \quad \text{o} \quad \frac{b}{a} > \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad (*)$$

En caso contrario habrá deslizamiento del canto.

Por ejemplo, si  $a = 5$  y  $b = 4$  para un coeficiente de rozamiento  $\operatorname{tg} \varphi = 0,25$ , habrá rodadura, ya que  $\frac{a^2 - b^2}{2ab} = \frac{25 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 4} = 0,225 < \operatorname{tg} \varphi = 0,25$

Si para el mismo coeficiente de rozamiento que  $a = 5$  y  $b = 3$ , habría deslizamiento, ya que entonces:

$$\frac{a^2 - b^2}{2ab} = \frac{25 - 9}{2 \cdot 5 \cdot 3} = 0,5333 > \operatorname{tg} \varphi = 0,25$$

Pensamos que la fórmula (\*) puede tener cierto interés en las aplicaciones. Hay no obstante que considerar sus limitaciones, de acuerdo con las hipótesis, muy simplificadas, que han servido para deducirla.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BOLTIANSKI, V. G.: «La envolvente» (cap. III). Ed. Mir. Moscú, 1977.
- [2] BOUASSE, H.: «Théorie des vecteurs. Cinématique. Mécanismes». Libr. Delagrave. París, 1921. (Capítulo III y Apéndice.)
- [3] BOUASSE, H., y TURRIERE, E.: «Exercice et compléments de Mathématiques Générales». Libr. Delagrave. París, 1920. (Capítulo 11.)
- [4] BROCARD, H., y LEMOINE, T.: «Courbes géométriques remarquables». Libr. Albert Blanchard. París, 1967. (Tomos II y III.)
- [5] COLLIGNON, E.: «Traité de Mécanique». Libr. Hachette et Cie. París, 1881. (2.<sup>a</sup> parte, libro V.)
- [6] DÖRRIE, H.: «100 Great Problems of Elementary Mathematics». Dover Publications, Inc. N. York, 1965. (Problemas números 48, 52 y 53.)
- [7] DUBUC, S.: «Géometrie plane». Collection SUP Presse Universitaire de France. París, 1971. (Capítulo VII, Geometría del triángulo.)
- [8] DUFFY, J.: «Analysis of Mechanism and Robot Manipulators». Edward Arnold. Londres, 1980.
- [9] F. G. M.: «Exercices de Géométrie». París, 1912. (Puntos y círculos de Brocard, Euler, Gergonne, Lemoine, etc., de un triángulo.)
- [10] GOLOVINA, L. I., y YAGLOM, I. M.: «Inducción in Geometry». Topics in Mathematics. D. C. Heath and Company. Boston, 1963. (17. Problems involving squares).
- [11] GOMES TEIXEIRA, F.: «Tratado de las curvas especiales notables». Madrid. Imp. de la Gaceta de Madrid, 1905.
- [12] INGLADA, V.: «Problemas geométricos». Ed. Dos-sat, S. A. Madrid, 1948. (Capítulos 9, 10 y 14.)
- [13] MANNHEIM, A.: «Cours de Géométrie Descriptive». (Lecciones 14 a 17, Geometría cinética.)
- [14] MARTYN CUNDY A., H., y ROLLETT, A. P.: «Mathematical models». Oxford University Press, 1961. (Chapt II. Models in plane Geometry.)
- [15] MICHAEL, W.: «Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene». Verlag Birkhäuser. Basel, 1950. (Capítulos 4.<sup>a</sup> y 5.<sup>a</sup>.)
- [16] JUSTO, N.: «Síntesis de Mecanismos». Editorial AC, libros científicos y técnicos. Madrid, 1977.
- [17] PAPELIER, G.: «Exercices de Géométrie moderne», tomo I. Libr. Vuibert. París, 1925. (Páginas 105 y 106, Teorema de Leibnitz.)
- [18] SCHOENFLIES, A.: «La Géométrie du Mouvement». París, Gauthier-Villars et Fils, 1893. (Chapt. I. Mouvement d'un système plan dans son plan.)
- [19] TAILLE, J.: «Problèmes de Mathématiques». Libr. Vuibert. París, 1966. (Páginas 194 a 198 y 209 a 221.)
- [20] VASILIEV, N. B., y GUTENMAJER, V. L.: «Rectas y curvas». Ed. Mir. Moscú. (Capítulo 7. Rodaduras y trayectorias.)