

Métodos variacionales basados en el teorema de la cota superior⁽¹⁾

Por A. LUCEÑO y E. CASTILLO

Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Universidad de Santander

Algunos estudios realizados sobre la validez de varios métodos variacionales para la resolución de problemas de estabilidad en mecánica del suelo han puesto de manifiesto la existencia de importantes errores de planteamiento. Estos se deben, fundamentalmente, a la ausencia de un riguroso análisis matemático del supuesto mínimo absoluto del funcional planteado. No obstante, dicho análisis, que envuelve consideraciones sobre la segunda variación del funcional, puede presentar serias dificultades e incluso resultar inabordable.

En este trabajo se proponen los teoremas de límite como métodos de definición de funcionales de seguridad o de cargas aplicadas. Ello tiene la ventaja de que, cuando se verifican las condiciones de aplicación de dichos teoremas, está asegurada no sólo la existencia de cota inferior o de cota superior del funcional, dependiendo del teorema que se aplique, sino también un significado físico coherente. Con esto el problema queda reducido al análisis de la primera variación del funcional. Este método es aplicable a todo tipo de problemas de estabilidad en mecánica del suelo. En particular se aplica al problema de la estabilidad de taludes, definiéndose un funcional cociente de seguridad basado en el teorema de la cota superior y obteniéndose el sistema de ecuaciones resultante de la anulación de su primera variación.

INTRODUCCION

Durante los últimos diez años ha sido frecuente encontrar, en las más importantes revistas y congresos internacionales, artículos en los que la técnica del cálculo de variaciones se aplica a la resolución de problemas de estabilidad en mecánica del suelo y, en particular, al problema de la estabilidad de taludes.

Todos los métodos propuestos se basan en la obtención de un funcional y la búsqueda de su mínimo absoluto. Sin embargo, debido al hecho de que todo mínimo absoluto satisface «a posteriori» las condiciones de mínimo relativo, el problema ha sido hecho equivalente al de la obtención de estos mínimos relativos mediante la anulación de la primera variación del funcional.

No obstante, merece la pena tener en cuenta que este planteamiento sólo es correcto si el mínimo absoluto existe y que este mínimo puede ser obtenido por anulación de la primera variación del funcional solamente si son satisfechas ciertas condiciones de regularidad. Por otra parte, el método puede resultar inútil si el mínimo absoluto del funcional carece de significado físico, aún en el caso de un correcto planteamiento matemático del problema. Por consiguiente, la verificación de estas hipótesis implícitas debe ser comprobada para que el planteamiento variacional pueda ser considerado correcto. El problema que surge, entonces, es que la comprobación de tales hipótesis suele presentar serias dificultades matemáticas e incluso llega frecuentemente a resultar inabordable; por tanto, sería de gran interés el definir el funcional a minimizar de forma que: la existencia de su mínimo absoluto, la posibilidad de la obtención de este mínimo por anulación de su primera variación y el correcto significado físico de la solución así obtenida estuviera asegurada «a priori». Una posibilidad de definición de tales funcionales es proporcionada por los teoremas de límite.

(1) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de junio de 1983.

En efecto, en las condiciones de validez de los teoremas de la cota superior o de la cota inferior, la existencia del mínimo o máximo absoluto del funcional está asegurada. Además, dicho mínimo o máximo es posible obtenerlo por anulación de la primera variación del funcional si son impuestas suficientes condiciones de regularidad a las funciones implicadas.

En lo que sigue, se analiza, a modo de ejemplo, el problema de la estabilidad de taludes, definiéndose un funcional de seguridad basado en el teorema de la cota superior y obteniéndose, finalmente, el sistema de ecuaciones resultante de la anulación de su primera variación. De la resolución de este sistema de ecuaciones pueden obtenerse las extremales del funcional planteado y su mínimo absoluto.

Otros posibles métodos de definición de funcionales de este tipo pueden ser encontrados en Castillo y Luceño (1980) o Luceño (1979).

DEFINICION DE UN FUNCIONAL DE SEGURIDAD

Considérese el talud definido por la ecuación analítica de su perfil $\bar{y}(x)$, y constituido por un material plástico perfecto coulombiano con parámetros de resistencia interna C y Φ , y ley de flujo asociativa.

Supóngase además que dicho talud se encuentra, bajo la acción del peso propio y de las cargas, $P(x)$, aplicadas sobre él, en estado de equilibrio límite con una línea de discontinuidad $y(x)$ que separa la zona rígida II de la zona plástica I, como indica la figura 1, y sean $u(x, y)$, $v(x, y)$ las componentes horizontal y vertical de la velocidad de cada punto (x, y) de la masa plástica I.

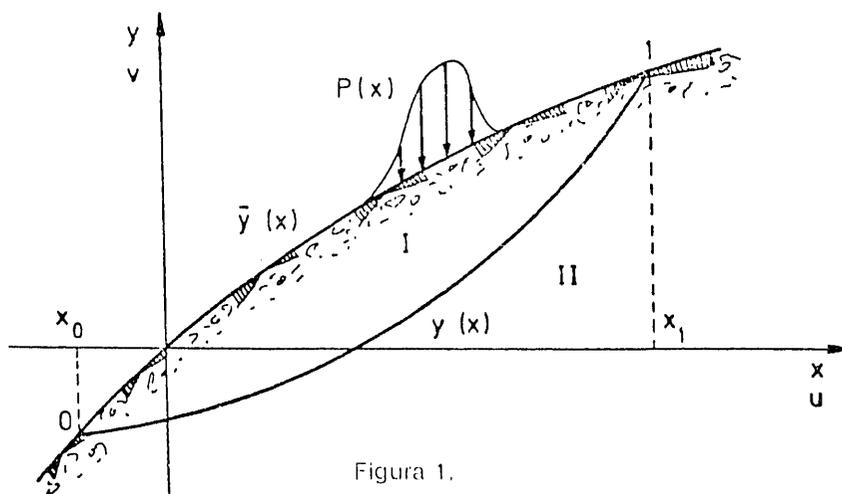


Figura 1.

Las condiciones de compatibilidad cinemática del campo de velocidades (u, v) exigen que se verifiquen, respectivamente, en el interior de la zona I y a lo largo de la línea de discontinuidad, $y(x)$, las ecuaciones:

$$\Delta \text{Vol} = - \text{sen} \Phi \dot{\gamma}_{\text{máx}} \quad ; \quad \forall (x, y) \in I \quad [1]$$

$$\frac{u_n}{u_t} = - \text{tg} \Phi \quad ; \quad \forall [x, y(x)] \text{ tal que } x \in [x_0, x_1] \quad [2]$$

donde ΔVol es el incremento de volumen, $\dot{\gamma}_{\text{máx}} = \dot{\epsilon}_{\text{máx}}^p - \dot{\epsilon}_{\text{máx}}^p$ es el incremento máximo de distorsión, U_n, U_t son las componentes, normal y tangencial a la línea de discontinuidad, del incremento de velocidad, x_0, x_1 están dados en la figura 1 y $\dot{\epsilon}_{\text{máx}}^p, \dot{\epsilon}_{\text{máx}}^p$ son los incrementos principales de deformación plástica.

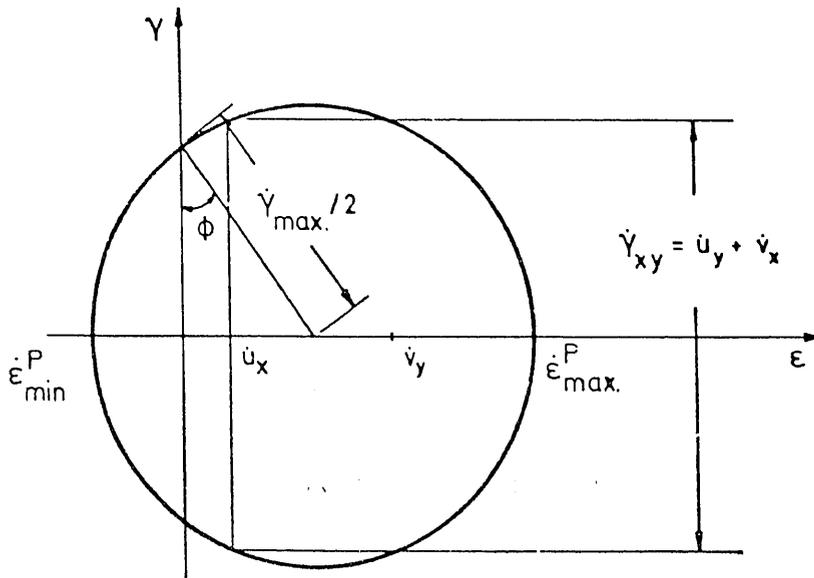


Figura 2.—Círculo de Mohr de los incrementos de deformación.

Es sabido (ver figura 2) que:

$$\Delta Vol = -(u_x + v_y) \quad [3]$$

$$\dot{\gamma}_{\max} = \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2}$$

por lo que la ecuación [1] se transforma en:

$$u_x + v_y = \text{sen}\Phi \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2} \quad ; \quad \forall (x, y) \in I \quad [4]$$

Además, de acuerdo con la figura 3, la ecuación [2] se convierte en:

$$\frac{v}{u} = \frac{y' - \text{tg}\Phi}{1 + y' \text{tg}\Phi} \quad ; \quad \forall [x, y(x)] \quad x \in [x_0, x_1] \quad [5]$$

donde $u < 0$ si $1 + y' \text{tg}\Phi > 0$.

Por otra parte, la disipación interna de energía por unidad de volumen en la zona plástica viene dada por la ecuación:

$$D_I = C \cos\Phi \dot{\gamma}_{\max} \quad [6]$$

que habida cuenta de [3] se transforma en:

$$D_I = C \cos\Phi \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2} \quad ; \quad \forall (x, y) \in I \quad [7]$$

mientras que dicha disipación interna de energía en la línea de discontinuidad $y(x)$ está dada por la ecuación:

$$D_y = C \dot{\gamma} = C \frac{u_I}{dn} \quad [8]$$

donde $\dot{\gamma} = u_I/dn$ es el incremento de distorsión debido al incremento de velocidad paralelo a la línea de discontinuidad (u_I), supuesto uniforme en una franja plástica de espesor infinitesimal (dn),

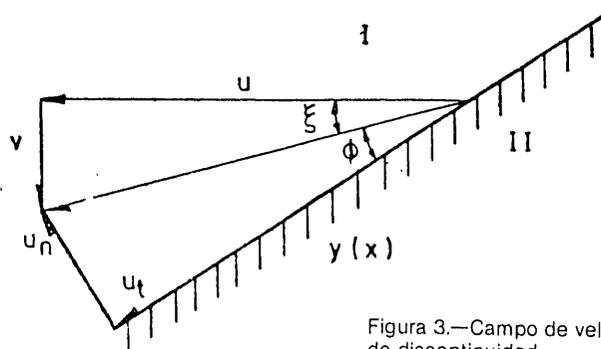


Figura 3.—Campo de velocidades para la proximidad de la línea de discontinuidad.

que, de acuerdo con la figura 3, da lugar a la siguiente expresión de la energía interna disipada, por unidad de longitud, a lo largo de \$y(x)\$:

$$D_y = C \cos\Phi \sqrt{u^2 + v^2} \quad [9]$$

Finalmente, el trabajo debido al peso propio, que es la única fuerza aplicada por unidad de volumen en la zona I, viene dado por:

$$W_1 = -\bar{\gamma}v \quad [10]$$

donde \$\bar{\gamma}\$ es el peso específico unitario aplicado para provocar el estado de equilibrio límite; y el trabajo, por unidad de abscisa, debido a las fuerzas, \$\bar{P}(x)\$, actuantes sobre el talud en dicho estado, resulta ser:

$$W_p = \bar{P}v$$

en el supuesto de que dichas fuerzas sean exclusivamente verticales.

Procediendo a la igualación, preconizada por el teorema de la cota superior, de la energía interna disipada en la zona plástica I y en la línea de discontinuidad \$y(x)\$ con el trabajo total de las fuerzas exteriores aplicadas resulta la siguiente ecuación:

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y(x)}^{\bar{y}(x)} -\bar{\gamma} v dy dx + \int_{x_0}^{x_1} \bar{P}v \Big|_{\bar{y}} dx = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y(x)}^{\bar{y}(x)} C \cos\Phi \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2} dy dx + \int_{x_0}^{x_1} C \cos\Phi \sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{1 + y'^2} \Big|_y dx \quad [11]$$

Si, en consonancia con lo anterior, se define el coeficiente de seguridad, \$F\$, por las expresiones:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \gamma \cdot F \\ \bar{P} &= P \cdot F \end{aligned} \quad [12]$$

donde \$\gamma\$ es el peso específico unitario real de la masa de suelo y \$P\$ es la ley de cargas realmente aplicadas sobre el talud, puede obtenerse a partir de [11] la siguiente expresión:

$$F = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \int_{y(x)}^{\bar{y}(x)} C \cos\Phi \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2} dy dx + \int_{x_0}^{x_1} C \cos\Phi \sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{1 + y'^2} \Big|_y dx}{\int_{x_0}^{x_1} \int_{y(x)}^{\bar{y}(x)} -\gamma v dy dx + \int_{x_0}^{x_1} P v \Big|_{\bar{y}} dx} \quad [13]$$

que define un funcional de seguridad: $F[x_0, x_1, y(x), u(x, y), v(x, y)]$. Dicho funcional está sometido a las restricciones debidas a las condiciones de compatibilidad cinemática del campo de velocidad supuesto, es decir, las ecuaciones [4] y [5].

Por tanto, el problema de la determinación del coeficiente de seguridad del talud y su campo de velocidades asociado, de acuerdo con las hipótesis realizadas, puede plantearse como sigue: encontrar la extremal $[x_0, x_1, y_0(x), u_0(x, y), v_0(x, y)]$ que proporciona el mínimo valor, F_s , del funcional cociente, F , definido por [13] con las condiciones [4] y [5].

PRIMERA VARIACION DEL FUNCIONAL

Puede demostrarse (Luceño, 1979) que toda extremal que proporciona un mínimo relativo, F_s , débil o fuerte, al funcional, F , definido por [13] con las condiciones [4] y [5] proporciona al menos un mínimo relativo débil al funcional $R[x_0, x_1, y(x), u(x, y), v(x, y)]$ definido por:

$$R = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y(x)}^{\bar{y}(x)} [C \cos\Phi \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2} + F_s \gamma v] dy dx + \int_y^{x_1} C \cos\Phi \sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{1 + y'^2} dx + \int_{\bar{y}}^{x_1} - F_s P v dx \quad [14]$$

con las condiciones [4] y [5] y

$$R[x_0^0, x_1^0, y_0(x), u_0(x, y), v_0(x, y)] = 0 \quad [15]$$

donde \int_y y $\int_{\bar{y}}$ indican integrales curvilíneas, respectivamente, a lo largo de y y \bar{y} en los sentidos de giro indicados, y $[x_0^0, x_1^0, y_0(x), u_0(x, y), v_0(x, y)]$ es la extremal buscada.

La condición [4] puede ser introducida en el funcional R mediante la técnica, utilizada usualmente en los problemas isoperimétricos, basada en la idea de los multiplicadores de Lagrange, mientras que la condición [5] puede ser abordada directamente. Así pues, el funcional R se transforma en:

$$R = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y(x)}^{\bar{y}(x)} [(C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi) \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2} - \lambda (u_x + v_y) + F_s \gamma v] dy dx + \int_y^{x_1} - C u \frac{1 + y'^2}{1 + y' \operatorname{tg}\Phi} dx + \int_{\bar{y}}^{x_1} - F_s P v dx \quad [16]$$

con las condiciones [4], [5] y [15] y siendo:

$$\lambda = \lambda(x, y) \quad [17]$$

una función desconocida.

Su primera variación puede obtenerse considerando el funcional R como suma de los funcionales R_1, R_2, R_3 definidos, respectivamente, por la primera, segunda y tercera integral de la expresión [16].

Es inmediato comprobar que el funcional $R_1[x_0, x_1, y(x), u(x, y), v(x, y)]$ es diferenciable en el sentido de Fréchet y se demuestra (ver apéndice 1) que, siendo $[\alpha_0, \alpha_1, \omega_1(x), \omega_2(x, y), \omega_3(x, y)]$ una variación admisible de $[x_0, x_1, y(x), u(x, y), v(x, y)]$, la primera variación de R_1 , teniendo en cuenta la

condición [5], viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \delta R_1 = & \int_{x_0}^{x_1} \int_y^{\bar{y}} \left\{ \omega_2 \left[\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) \right] + \omega_3 \left[\frac{\partial r_1}{\partial v} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \right] \right\} dy dx + \int_{x_1}^{x_0} \left\{ \omega_2 \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) + \right. \\ & \left. + \omega_3 \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \right\} dx + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \omega_2 \left[\left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) + \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \cdot \frac{y' - \operatorname{tg} \Phi}{1 + y' \operatorname{tg} \Phi} \right] - \omega_1 \left[\frac{d}{dx} \left[\left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \cdot \left(\frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + r_1 \right] \right\} dx + \omega_1 \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \Big|_{x_0}^{x_1} \end{aligned} \quad [18]$$

donde r_1 es la expresión subintegral de R_1 .

— Análogamente, el funcional $R_2[x_0, x_1, y(x), u[x, y(x)]]$ es diferenciable en el sentido de Féchet y su primera variación viene dada por:

$$\delta R_2 = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \omega_1 \left[\frac{\partial r_2}{\partial y} + u_y \frac{\partial r_2}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial r_2}{\partial y'} \right) \right] + \omega_2 \frac{\partial r_2}{\partial u} \right\} dx + \omega_1 \frac{\partial r_2}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1} + \alpha \cdot r_2 \Big|_{x_0}^{x_1} \quad [19]$$

donde r_2 es la expresión subintegral de R_2 .

— Finalmente, la primera variación del funcional $R_3[x_0, x_1, v[x, y(x)]]$ se expresa por

$$\delta R_3 = \int_{x_0}^{x_1} \omega_3 \frac{\partial r_3}{\partial v} dx + \alpha \cdot r_3 \Big|_{x_0}^{x_1} \quad [20]$$

siendo r_3 la expresión subintegral de R_3 .

— Ahora bien, por las propiedades de la suma de aplicaciones diferenciables se deduce que R es diferenciable en el sentido de Fréchet y su primera variación puede obtenerse mediante la fórmula:

$$\delta R = \delta R_1 + \delta R_2 + \delta R_3 \quad [21]$$

que teniendo en cuenta [18], [19] y [20] da lugar a:

$$\begin{aligned} \delta R = & \int_{x_0}^{x_1} \int_y^{\bar{y}} \left\{ \omega_2 \left[\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) \right] + \omega_3 \left[\frac{\partial r_1}{\partial v} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \right] \right\} dy dx + \int_{x_1}^{x_0} \left\{ \omega_2 \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) + \right. \\ & \left. + \omega_3 \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} - \frac{\partial r_3}{\partial v} \right) \right\} dx + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \omega_1 \left[\frac{\partial r_2}{\partial y} + u_y \frac{\partial r_2}{\partial u} - r_1 - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial r_2}{\partial y'} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \right] + \omega_2 \left[\frac{\partial r_2}{\partial u} + y' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{y' - \operatorname{tg} \Phi}{1 + y' \operatorname{tg} \Phi} \right] \right\} dx + \omega_1 \left[\frac{\partial r_2}{\partial y'} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \Big|_{x_0}^{x_1} + \alpha (r_2 + r_3) \Big|_{x_0}^{x_1} \quad [22]$$

CONDICIONES NECESARIAS DE MINIMO

La primera condición necesaria de mínimo relativo del funcional auxiliar R exige la anulación de su primera variación:

$$\delta R = 0 \quad [23]$$

independientemente de la variación admisible $[\alpha_0, \alpha_1, \omega_1(x), \omega_2(x, y), \omega_3(x, y)]$ elegida.

Esta condición conduce al siguiente sistema de ecuaciones (ver apéndice 2):

1.

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) = 0 \quad [24]$$

$$\forall (x, y) \in I$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) = 0 \quad [25]$$

que son las ecuaciones diferenciables en derivadas parciales de $u(x, y), v(x, y)$ en la zona plástica I.

2.

$$\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} = 0 \quad [26]$$

$$\forall [x, \bar{y}(x)]; x \in (x_0, x_1)$$

$$\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} - \frac{\partial r_3}{\partial v} = 0 \quad [27]$$

que son ecuaciones diferenciales ordinarias que se verifican en el perfil del talud $\bar{y}(x)$.

3.

$$\frac{\partial r_2}{\partial u} + y' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{y' - \operatorname{tg} \Phi}{1 + y' \operatorname{tg} \Phi} = 0 \quad [28]$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y} + u_y \frac{\partial r_2}{\partial u} - r_1 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial r_2}{\partial y'} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \right) = 0 \quad [29]$$

$$\forall [x, y(x)]; x \in (x_0, x_1)$$

que son ecuaciones diferenciales ordinarias que se verifican en la línea de discontinuidad $y(x)$.

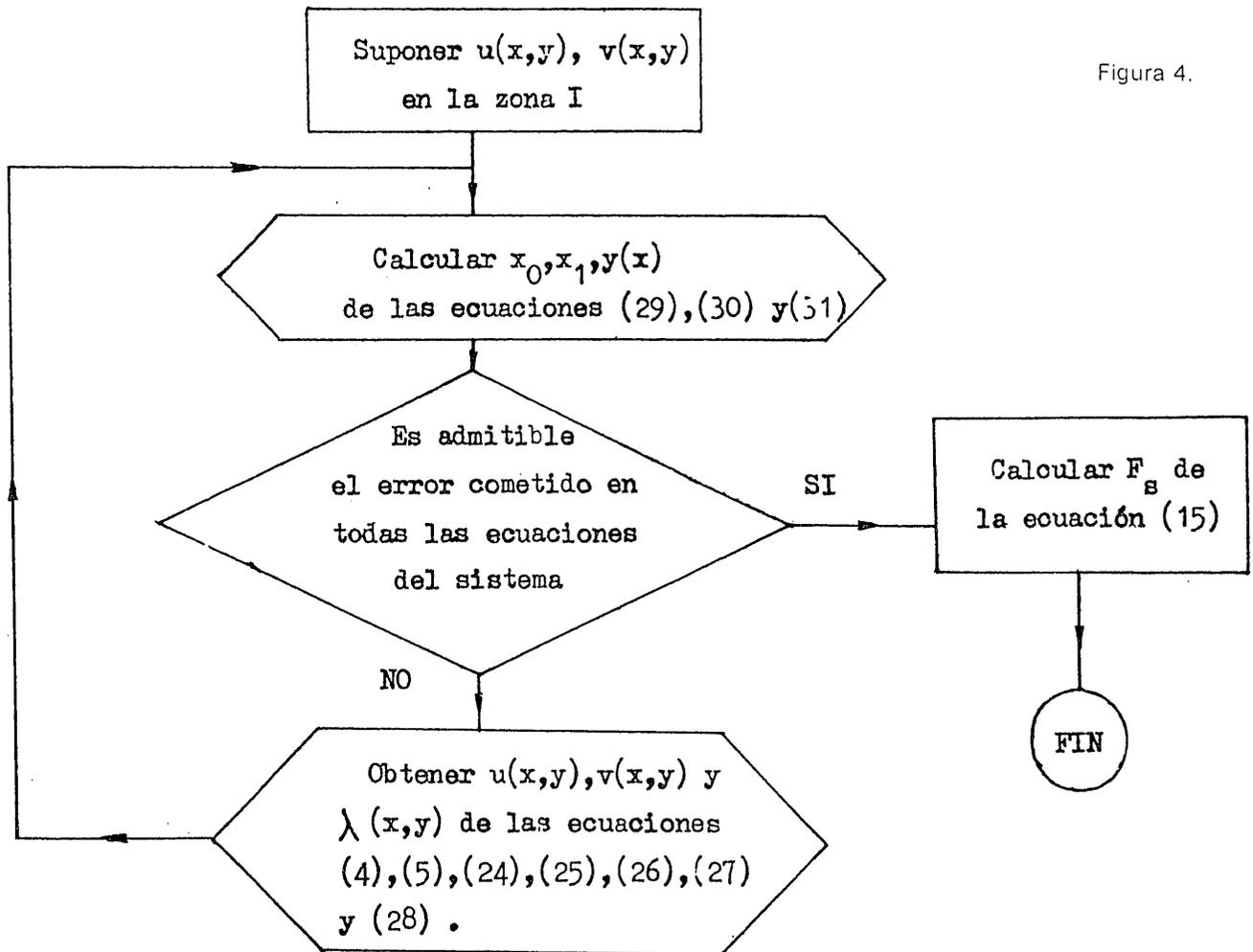
4.

$$(r_2 + r_3) + (\bar{y}' - y') \left(\frac{\partial r_2}{\partial y'} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \right) \Big|_{x_1} = 0 \quad [30]$$

$$(r_2 + r_3) + (\bar{y}' - y') \left(\frac{\partial r_2}{\partial y'} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \right) \Big|_{x_0} = 0 \quad [31]$$

que son ecuaciones puntuales que se verifican en x_1 y x_0 , respectivamente.

Figura 4.



A este sistema deben añadirse las ecuaciones dadas por las condiciones [4], [5] y [15]. Con ello, el problema de la determinación del coeficiente de seguridad del talud y el campo de velocidades asociado se transforma en la resolución del sistema de ecuaciones: [4], [24] y [25] en la zona plástica I; [26] y [27] en el perfil del talud; [5], [28] y [29] en la línea de discontinuidad; [30] en x_1 , [31] en x_0 y [15], que es la ecuación con la que se determina el valor del coeficiente de seguridad mínimo F_s .

No es difícil imaginar un proceso numérico iterativo de búsqueda de la solución con ayuda del ordenador. Un esquema simple de dicho proceso se representa en el organigrama de la figura 4.

CONSIDERACIONES SOBRE EL SISTEMA RESULTANTE PARA TERRENO HOMOGENEO

a) El sistema [24] y [25] para este caso se reduce notablemente. En efecto, habida cuenta de [16] se tiene:

$$r_1 = C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi) \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2} - \lambda (u_x + v_y) + F_s \gamma v \quad [32]$$

$$r_2 = - C u \frac{1 + y'^2}{1 + y' \operatorname{tg}\Phi} \quad [33]$$

$$r_3 = - F_s P v \quad [34]$$

y haciendo el cambio definido por:

$$\begin{aligned}\xi &= u_x - v_y \\ \eta &= v_x + u_y\end{aligned}\tag{35}$$

y posteriormente llamando a

$$\alpha = \frac{\xi}{\eta}\tag{36}$$

se tiene de [24] y [25]

$$\begin{aligned}\lambda_x \left(\rho \operatorname{sen}\Phi \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} - 1 \right) + \rho \lambda_y \operatorname{sen}\Phi \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \\ + \rho \frac{C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi}{(\sqrt{1+\alpha^2})^3} (\alpha_x - \alpha\alpha_y) = 0\end{aligned}\tag{37}$$

$$\begin{aligned}F_{s\gamma} - \rho\lambda_x \operatorname{sen}\Phi \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \lambda_y \left(\rho \operatorname{sen}\Phi \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + 1 \right) + \\ + \rho \frac{C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi}{(\sqrt{1+\alpha^2})^3} (\alpha\alpha_x + \alpha_y) = 0\end{aligned}\tag{38}$$

donde $\rho = \operatorname{signo}(\eta)$.

Pero puesto que en algún punto de la zona I puede ocurrir:

$$\begin{aligned}\varepsilon &\neq 0 \\ \eta &= 0\end{aligned}\tag{39}$$

es conveniente trabajar con la función β definida por:

$$\beta = \frac{\eta}{\xi} \quad ; \quad \left(\beta = \frac{1}{\alpha} \right)$$

obteniéndose entonces:

$$\begin{aligned}\lambda_y \left(\Theta \operatorname{sen}\Phi \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} - 1 \right) + \Theta \lambda_x \operatorname{sen}\Phi \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \\ + \Theta \frac{C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi}{(\sqrt{1+\beta^2})^3} (\beta_y - \beta\beta_x) = 0\end{aligned}\tag{41}$$

$$\begin{aligned}F_{s\gamma} - \Theta\lambda_x \operatorname{sen}\Phi \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} + \lambda_y \left(\Theta \operatorname{sen}\Phi \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} + 1 \right) - \\ - \Theta \frac{C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi}{(\sqrt{1+\beta^2})^3} (\beta_x + \beta\beta_y) = 0\end{aligned}\tag{42}$$

donde $\Theta = \operatorname{signo}(\xi)$.

Naturalmente es aconsejable usar las ecuaciones [37] y [38] cuando $|\alpha| \leq 1$ y las ecuaciones [41] y [42] cuando $|\beta| \leq 1$.

b) En determinados casos, las funciones β y λ en la superficie libre del talud adoptan formas sencillas. En efecto, las ecuaciones [26] y [27], teniendo en cuenta [35] y [40], se transforman en:

$$\bar{y}'[\Theta(C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi) - \lambda \sqrt{1 + \beta^2}] - \Theta(C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi) \cdot \beta = 0 \quad [43]$$

$$\bar{y}' \cdot \Theta(C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi) \beta + \Theta(C \cos\Phi + \lambda \operatorname{sen}\Phi) + (\lambda + F_s P) \sqrt{1 + \beta^2} = 0 \quad [44]$$

En particular en los tramos horizontales del perfil del talud ($\bar{y}' = 0$), resulta de [43] y [44]:

$$\beta = 0 \quad [45]$$

$$\lambda = - \frac{\Theta C \cos\Phi + F_s P}{1 + \Theta \operatorname{sen}\Phi}$$

y cuando no existen cargas aplicables sobre él ($F_s P = 0$) se obtiene:

$$\beta = \frac{2 \bar{y}'}{1 - \bar{y}'^2} \quad [46]$$

$$\lambda = \frac{-\Theta C \cos\Phi}{1 + \Theta \operatorname{sen}\Phi}$$

Las ecuaciones [43] y [44] se verifican en los puntos de la superficie libre de la zona I, es decir, en todo $[x, \bar{y}(x)]$ tal que $x \in (x_0, x_1)$.

c) Para el caso de superficie libre horizontal se obtienen conocidos valores de la pendiente de la línea de discontinuidad en los puntos de salida. Así es, pues, la ecuación [28] con los cambios de función [35] y [40] conduce a:

$$(C + \lambda \operatorname{tg}\Phi) \left[1 - \frac{\Theta \cos\Phi}{\sqrt{1 + \beta^2}} (\beta + \operatorname{tg}\Phi) \right] \cdot \left[y' - \frac{\Theta \cos\Phi (1 - \beta \operatorname{tg}\Phi)}{\sqrt{1 + \beta^2} - \Theta \cos\Phi (\beta + \operatorname{tg}\Phi)} \right]^2 = 0 \quad [47]$$

que debe verificarse en todos los puntos de la línea de discontinuidad, de donde:

$$y' = \frac{\Theta \cos\Phi (1 - \beta \operatorname{tg}\Phi)}{\sqrt{1 + \beta^2} - \Theta \cos\Phi (\beta + \operatorname{tg}\Phi)} \quad [48]$$

en todo punto $[x, y(x)]$ tal que $x \in (x_0, x_1)$.

Además, si $\bar{y}'(x_1) = 0$ se tiene, debido a [45]:

$$y'(x_1) = \frac{\Theta \cos\Phi}{1 - \Theta \operatorname{sen}\Phi}$$

con $\Theta = +1$ en dicho punto. Esta pendiente coincide con el conocido valor $\cotg(\pi/4 - \Phi/2)$. De la misma manera cuando $\bar{y}'(x_0) = 0$ resulta $y'(x_0) = -\cotg(\pi/4 + \Phi/2)$ con $\Theta = -1$.

OTROS FUNCIONALES

La hipótesis realizada sobre la existencia de la zona plástica I, que se extiende desde la línea de discontinuidad $y(x)$ hasta la superficie libre del talud $\bar{y}(x)$ no tiene por qué ser aceptable para formas cualesquiera del perfil del talud. En consecuencia, cabe imaginar otros campos de velocidades, como el dibujado en la figura 5, con dos zonas rígidas, II y III, y una zona plástica, I.

Este campo de velocidades admite un planteamiento similar al realizado para el mecanismo

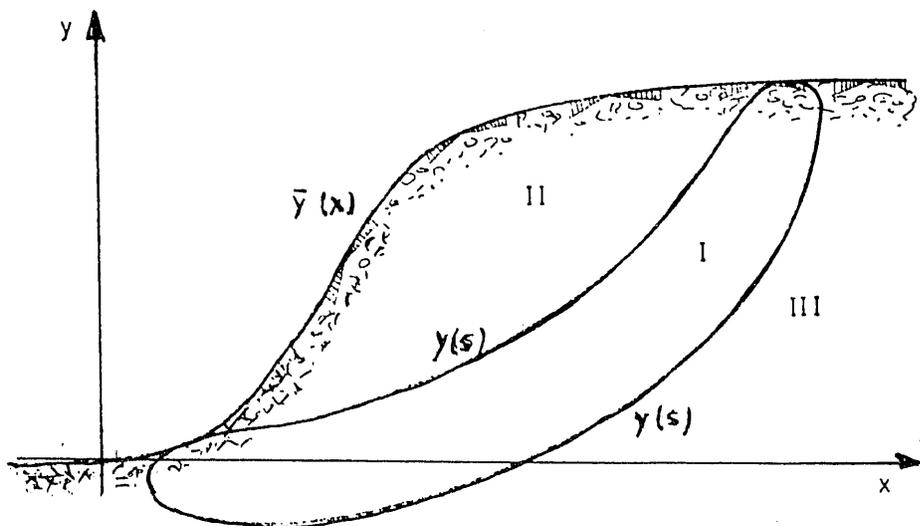


Figura 5.

de la figura 1; sin embargo, dada la forma de la línea de discontinuidad $y(s)$ resulta necesario el uso de representación paramétrica, lo que no debe proporcionar mayor dificultad, puesto que, precisamente, el cálculo de variaciones ha alcanzado muchos de sus resultados más importantes con el uso de dicha representación.

Finalmente, cabe señalar que puede pensarse en aplicaciones del modelo planteado a todos los problemas de estabilidad en mecánica del suelo.

CONCLUSIONES

1. En este trabajo se proponen los teoremas de límite como método para definir funcionales, bien de seguridad o bien de cargas aplicadas, ya que en este caso está asegurada la existencia de su mínimo (o máximo) absoluto.
2. En particular se define un funcional cociente de seguridad F basado en el teorema de la cota superior y de aplicación al estudio del problema de la estabilidad de taludes.
3. A partir del funcional F se obtiene el funcional equivalente R que presenta una forma más adecuada para el cálculo de su primera variación δR . Una vez obtenida ésta, y habida cuenta de las condiciones de compatibilidad cinemática que se incluyen en la definición de R , se procede a su anulación ($\delta R = 0$), con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones (diferenciales en derivadas parciales, diferenciales ordinarias y puntuales), cuya solución constituye el campo de velocidades y el coeficiente de seguridad asociados al mecanismo supuesto.
4. La búsqueda de dicha solución puede ser abordada por procedimientos numéricos iterativos. Sin embargo, a la vista del mismo sistema pueden deducirse ya algunas conclusiones; entre ellas destaca que el valor de la pendiente resulta ser $\cotg(\pi/4 - \Phi/2)$ y $\cotg(\pi/4 + \Phi/2)$ en los extremos superior e inferior respectivamente de la línea de deslizamiento cuando el perfil del talud es horizontal en dichos puntos.
5. Finalmente cabe decir que el modelo propuesto puede generalizarse a otros campos de velocidades que aparecen en la fase de colapso de los taludes, así como a todo tipo de problemas de estabilidad en mecánica del suelo.

AGRADECIMIENTO

Los autores desean expresar su más sincero agradecimiento a los profesores Alcibiades Serrano y Rodrigo Molina por sus valiosos comentarios y sugerencias sobre el tema.

REFERENCIAS

1. BOLZA, O.: «Lectures on the Calculus of Variations». Chelsea Publishing Company. New York, 1973.
2. CARTAN, H.: «Cálculo diferencial». Ediciones Omega, S. A. (1972).
3. CASTILLO, E., y LUCEÑO, A.: «Nuevos mecanismos de rotura para la resolución del problema de estabilidad». Revista del Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo José Luis Escario. Madrid, 1980.
4. CHEN, W. F.: «Limit analysis and Soil Plasticity». Elsevier Scientific Publishing Company (1975).
5. GELFAND, I. M., y FOMIN, S. V.: «Calculus of variations». Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall (1963).
6. JIMENEZ SALAS, J. A.; DE JUSTO ALPAÑES, J. L., y SERRANO GONZALEZ, A. A.: «Geotecnia y cimientos. II. Mecánica del suelo y de las rocas». Editorial Rueda (1976).
7. KOLMOGOROV, A. N., y FOMIN, S. V.: «Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional». Editorial Mir (1975).
8. LUCEÑO, A.: «Análisis de los métodos variacionales aplicados a los problemas de estabilidad en mecánica del suelo. Utilización del teorema de la cota superior». Tesis doctoral. Universidad de Santander, 1979.
9. LUCEÑO, A., y CASTILLO, E.: «Análisis crítico de los métodos variacionales aplicados a la estabilidad de taludes». Revista del Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo José Luis Escario. Madrid, 1980.
10. URIEL ROMERO, S.: «Cálculo de taludes isorresistentes por el método de las características y su aplicación al proyecto de presas de materiales sueltos». Revista de Obras Públicas. Agosto, 1967.

APENDICE 1

El funcional $R_1[x_0, x_1, y(x), u(x, y), v(x, y)]$ es diferenciable en el sentido de Fréchet, ya que siendo $[\alpha_0, \alpha_1, \omega_1(x), \omega_2(x, y), \omega_3(x, y)]$ una variación admisible de $[x_0, x_1, y(x), u(x, y), v(x, y)]$, la primera variación de R_1 está dada por la expresión:

$$\int_{x_0+\alpha_0}^{x_1+\alpha_1} \int_{y+\omega_1}^{\bar{y}} r_1(x, y, u + \omega_2, v + \omega_3, u_x + \omega_{2x}, v_x + \omega_{3x}, u_y + \omega_{2y}, v_y + \omega_{3y}) dy dx - \int_{x_0}^{x_1} \int_y^{\bar{y}} r_1(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) dy dx = \delta R_1 + o(\|\cdot\|) \tag{1.1}$$

donde r_1 es la expresión suintegral de R_1 , que desarrollada en serie de Taylor se transforma en:

$$\delta R_1 = \int_{x_0}^{x_1} \int_y^{\bar{y}} \left(\omega_2 \frac{\partial r_1}{\partial u} + \omega_3 \frac{\partial r_1}{\partial v} + \omega_{2x} \frac{\partial r_1}{\partial u_x} + \omega_{3x} \frac{\partial r_1}{\partial v_x} + \omega_{2y} \frac{\partial r_1}{\partial u_y} + \omega_{3y} \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) dy dx + \int_{\bar{y}}^{x_1} - r_1 \omega_1 dx \tag{1.2}$$

Esta expresión de δR_1 puede ponerse en la forma:

$$\delta R_1 = \int_{x_0}^{x_1} \int_y^{\bar{y}} \left\{ \omega_2 \left[\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) \right] + \omega_3 \left[\frac{\partial r_1}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \right] \right\} dy dx + \int_{x_0}^{x_1} \int_y^{\bar{y}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega_2 \frac{\partial r_1}{\partial u_x} + \omega_3 \frac{\partial r_1}{\partial v_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega_2 \frac{\partial r_1}{\partial u_y} + \omega_3 \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \right\} dy dx + \int_{\bar{y}}^{x_1} - r_1 \omega_1 dx \tag{1.3}$$

a la que, supuestas ciertas condiciones de regularidad, puede aplicarse la conocida fórmula de Green:

$$\iint \left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{P}}{\partial y} \right) dy dx = \oint_{\Gamma} (\hat{P} dx + \hat{Q} dy) \tag{1.4}$$

donde es la región de integración y Γ es su contorno, con lo que resulta:

$$\begin{aligned} \delta R_1 = & \int_{x_0}^{x_1} \int_y^{\bar{y}} \left\{ \omega_2 \left[\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) \right) \right] + \omega_3 \left[\frac{\partial r_1}{\partial v} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \right] \right\} dy dx + \oint_{\Gamma} \left\{ - \left(\omega_2 \frac{\partial r_1}{\partial u_y} + \omega_3 \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) dx + \right. \\ & \left. + \left(\omega_2 \frac{\partial r_1}{\partial u_x} + \omega_3 \frac{\partial r_1}{\partial v_x} \right) dy \right\} + \int_{x_0}^{x_1} -r_1 \omega_1 dx \end{aligned} \quad [1.5]$$

Ahora bien, puesto que debe verificarse la condición [5] en la línea de discontinuidad, se obtiene, por diferenciación de esta condición, la siguiente relación:

$$\omega_3 = \frac{y' - \operatorname{tg}\Phi}{1 + y' \operatorname{tg}\Phi} \omega_2 + \frac{u}{\cos^2\Phi (1 + y' \operatorname{tg}\Phi)^2} \omega_1 \quad ; \quad \forall [x, y(x)] \quad |x \in [x_0, x_1] \quad [1.6]$$

que introducida en [1.5] conduce finalmente, mediante integración por partes, a:

$$\begin{aligned} \delta R_1 = & \int_{x_0}^{x_1} \int_y^{\bar{y}} \left\{ \omega_2 \left[\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) \right] + \omega_3 \left[\frac{\partial r_1}{\partial v} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \right] \right\} dy dx + \int_{x_1}^{x_0} \left\{ \omega_2 \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) + \right. \\ & \left. + \omega_3 \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \right\} dx + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \omega_2 \left[\left(y' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \cdot \frac{y' - \operatorname{tg}\Phi}{1 + y' \operatorname{tg}\Phi} \right] - \omega_1 \left\{ \frac{d}{dx} \left[\left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \cdot \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left(\frac{u}{\cos^2\Phi (1 + y' \operatorname{tg}\Phi)^2} \right) + r_1 \right] \right\} dx + \omega_1 \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2\Phi (1 + y' \operatorname{tg}\Phi)^2} \right\} \Big|_{x_0}^{x_1} \end{aligned} \quad [1.7]$$

— Análogamente, el funcional $R_2[x_0, x_1, y(x), u[x, y(x)]]$ es diferenciable en el sentido de Fréchet y su primera variación viene dada por:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0 + u_0}^{x_1 + u_1} r_2 [x, y + \omega_1, y' + \omega_1', u(x, y + \omega_1) + \omega_2 (x, y + \omega_1)] dx - \\ & - \int_{x_0}^{x_1} r_2 [x, y, y', u(x, y)] dx = \delta R_2 + o(\|\cdot\|) \end{aligned} \quad [1.8]$$

donde r_2 es la expresión subintegral de R_2 .

Desarrollando [1.8] en serie de Taylor, resulta:

$$\delta R_2 = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \omega_1 \left(\frac{\partial r_2}{\partial y} + u_y \frac{\partial r_2}{\partial u} \right) + \omega_1' \frac{\partial r_2}{\partial y'} + \omega_2 \frac{\partial r_2}{\partial u} \right\} dx + \alpha \cdot r_2 \Big|_{x_0}^{x_1} \quad [1.9]$$

e integrando por partes se obtiene:

$$\delta R_2 = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \omega_1 \left[\frac{\partial r_2}{\partial y} + u_y \frac{\partial r_2}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_2}{\partial y'} \right) \right] + \omega_2 \frac{\partial r_2}{\partial u} \right\} dx + \omega_1 \frac{\partial r_2}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1} + \alpha \cdot r_2 \Big|_{x_0}^{x_1} \quad [1.10]$$

— Finalmente, la primera variación del funcional $R_3[x_0, x_1, v[x, \bar{y}(x)]]$ se expresa por:

$$\int_{\bar{y}(x_0 + \alpha_0)}^{x_1 + \alpha_1} r_3(v + \omega_3) dx - \int_{\bar{y}(x_0)}^{x_1} r_3(v) dx = \delta R_3 + o(\|\cdot\|) \quad [1.11]$$

esto es:

$$\delta R_3 = \int_{x_0}^{x_1} \omega_3 \frac{\partial r_3}{\partial v} dx + \alpha \cdot r_3 \Big|_{x_0}^{x_1} \quad [1.12]$$

APENDICE 2

La primera condición necesaria de mínimo relativo del funcional auxiliar R exige la anulación de su primera variación:

$$\delta R = 0 \quad [2.1]$$

independientemente de la variación admisible $[\alpha_0, \alpha_1, \omega_1(x), \omega_2(x, y), \omega_3(x, y)]$ elegida.

Así pues, si se elige, en particular, la siguiente variación:

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \\ \omega_1(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\ \omega_3(x, y) = 0 \quad ; \quad \forall (x, y) \in I \\ \omega_2(x, y) \text{ de clase } C^1 \text{ en } I \text{ y tal que:} \\ \omega_2[x, y(x)] = \omega_2[x, \bar{y}(x)] = 0 \end{aligned} \quad [2.2]$$

resulta de [2.1] y [2.2]:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) = 0 \quad [2.3]$$

Análogamente, eligiendo la variación:

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \\ \omega_1(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\ \omega_2(x, y) = 0 \quad ; \quad \forall (x, y) \in I \\ \omega_3(x, y) \text{ de clase } C^1 \text{ en } I \text{ y tal que:} \\ \omega_3[x, y(x)] = \omega_3[x, \bar{y}(x)] = 0 \end{aligned} \quad [2.4]$$

resulta:

$$\frac{\partial r_1}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) = 0 \quad [2.5]$$

Con ello, la expresión [22] se transforma en:

$$\delta R = \int_{\bar{y}(x_1)}^{x_0} \left\{ \omega_2 \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} \right) + \omega_3 \left(\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} - \frac{\partial r_3}{\partial v} \right) \right\} dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\bar{y} \rightarrow x_0}^{x_1} \left\{ \omega_1 \left(\frac{\partial r_2}{\partial y} \right) + u_y \frac{\partial r_2}{\partial u} - r_1 - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial r_2}{\partial y} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \omega_2 \left[\frac{\partial r_2}{\partial u} + y' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{y' - \operatorname{tg} \Phi}{1 + y' \operatorname{tg} \Phi} \right] \right\} dx + \\
 & + \omega_1 \left[\frac{\partial r_2}{\partial y} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \right] \Big|_{x_0}^{x_1} + \alpha (r_2 + r_3) \Big|_{x_0}^{x_1} \quad [2.6]
 \end{aligned}$$

Si ahora se elige como variación admisible:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \\
 & \omega_1(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\
 & \omega_3(x, y) = 0 \quad ; \quad \forall (x, y) \in I \\
 & \omega_2(x, y) \text{ de clase } C_1 \text{ en } I \text{ y tal que:} \quad [2.7] \\
 & \quad \omega_2[x, y(x)] = 0, \omega_2[x, \bar{y}(x)] \neq 0
 \end{aligned}$$

resulta de [2.1] y [2.6]:

$$\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} = 0 \quad [2.8]$$

y análogamente, con la variación:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \\
 & \omega_1(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\
 & \omega_2(x, y) = 0 \quad ; \quad \forall (x, y) \in I \\
 & \omega_3(x, y) \text{ de clase } C^1 \text{ en } I \text{ y tal que:} \quad [2.9] \\
 & \quad \omega_3[x, y(x)] = 0 \quad , \quad \omega_3[x, \bar{y}(x)] \neq 0
 \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\bar{y}' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} - \frac{\partial r_3}{\partial v} = 0 \quad [2.10]$$

con lo que [2.6] se transforma en:

$$\begin{aligned}
 \delta R = & \int_{\bar{y} \rightarrow x_0}^{x_1} \left\{ \omega_1 \left[\frac{\partial r_2}{\partial y} + u_y \frac{\partial r_2}{\partial u} - r_1 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial r_2}{\partial y} \right) + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \omega_2 \left[\frac{\partial r_2}{\partial u} + y' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{y' - \operatorname{tg} \Phi}{1 + y' \operatorname{tg} \Phi} \right] \right\} dx + \\
 & + \omega_1 \left[\frac{\partial r_2}{\partial y} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2 \Phi (1 + y' \operatorname{tg} \Phi)^2} \right] \Big|_{x_0}^{x_1} + \alpha (r_2 + r_3) \Big|_{x_0}^{x_1} \quad [2.11]
 \end{aligned}$$

Eligiendo ahora como variación admisible:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \\
 & \omega_1(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\
 & \omega_2(x, y) \text{ de clase } C^1 \text{ en } I \text{ tal que } \omega_2[x, y(x)] \neq 0 \quad [2.12]
 \end{aligned}$$

que es compatible con [1.6], resulta de [2.1] y [2.11].

$$\frac{\partial r_2}{\partial u} + y' \frac{\partial r_1}{\partial u_x} - \frac{\partial r_1}{\partial u_y} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{y' - \operatorname{tg}\Phi}{1 + y' \operatorname{tg}\Phi} = 0 \quad [2.13]$$

y con la variación:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$$

$$\omega_1(x) \text{ de clase } C^1 \text{ en } [x_0, x_1] \text{ y tal que } \omega_1(x_0) = \omega_1(x_1) = 0 \quad [2.14]$$

resulta de igual maneaa:

$$\frac{\partial r_2}{\partial y} + u_y \frac{\partial r_2}{\partial u} - r_1 - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial r_2}{\partial y'} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2\Phi (1 + y' \operatorname{tg}\Phi)^2} \right] = 0 \quad [2.15]$$

Con ello [2.11] se reduce a:

$$\delta R = \omega_1 \left[\frac{\partial r_2}{\partial y'} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2\Phi (1 + y' \operatorname{tg}\Phi)^2} \right] + \alpha (r_2 + r_3) \Big|_{x_0}^{x_1} \quad [2.16]$$

Además, como en el contorno deben verificarse las condiciones:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \bar{y}(x_0) \\ y(x_1) &= \bar{y}(x_1) \end{aligned} \quad [2.17]$$

se deduce:

$$\begin{aligned} \omega(x_0) &= [\bar{y}'(x_0) - y'(x_0)] \cdot \alpha_0 \\ \omega(x_1) &= [\bar{y}'(x_1) - y'(x_1)] \cdot \alpha_1 \end{aligned} \quad [2.18]$$

con lo que eligiendo la variación admisible:

$$\alpha_0 = 0 \quad , \quad \alpha_1 \neq 0 \quad [2.19]$$

se obtiene de [2.1] y [2.16]:

$$(r_2 + r_3) - (\bar{y}' - y') \left[\frac{\partial r_2}{\partial y'} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2\Phi (1 + y' \operatorname{tg}\Phi)^2} \right] \Big|_{x_1} = 0 \quad [2.20]$$

y, finalmente, con la variación:

$$\alpha_0 \neq 0 \quad , \quad \alpha_1 = 0 \quad [2.21]$$

resulta:

$$(r_2 + r_3) - (\bar{y}' - y') \left[\frac{\partial r_2}{\partial y'} + \left(y' \frac{\partial r_1}{\partial v_x} - \frac{\partial r_1}{\partial v_y} \right) \frac{u}{\cos^2\Phi (1 + y' \operatorname{tg}\Phi)^2} \right] \Big|_{x_0} = 0 \quad [2.22]$$