

# Problemas asociados a la utilización de los simuladores numéricos de oleaje

Por J. JAVIER DIEZ GONZALEZ  
JOSEF R. MEDINA FOLGADO

Departamento de Ingeniería Oceanográfica y Puertos.  
E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Valencia

*El establecimiento adecuado del clima marítimo de una zona, exige la utilización de modelos descriptivos espectrales para definir el oleaje. El empleo de los simuladores numéricos viene indicado por la escasez y heterogeneidad de los registros disponibles, la optimización de las campañas de registro y la necesidad de relacionar formas espectrales diversas a los parámetros estadísticos correspondientes de alturas y períodos de ola. Mediante análisis espectral y estadístico contrastado de registros simulados por diferentes procedimientos se llega a la conclusión de la existencia de distorsiones significativas asociadas a cada modelo particular de simulación. La disparidad entre simuladores resulta particularmente importante respecto del parámetro altura de ola máxima de registro, que resulta creciente con la duración para todos los métodos empleados.*

## 1. INTRODUCCION

Para entender el desarrollo de los modelos descriptivos del oleaje usados en la actualidad, es necesario fijar nuestra atención en la década de los 40, cuando la electrónica inició su ascenso espectacular. Nuevos equipos y técnicas experimentales comenzaron a obtener registros de oleaje que a simple vista poco tenían que ver con la mayoría de las ondas deterministas teóricas que resolvían las ecuaciones hidrodinámicas que definen el movimiento del fluido ideal.

La consideración del oleaje como suma de una infinidad de ondas senoides de pequeña amplitud, con dirección y potencia variables, era un modelo determinista lineal lo suficientemente amplio como para adaptarse a la nueva visión de la realidad. Registros del mismo oleaje sólo tenían en común sus propiedades estadísticas, el modelo estocástico en general se abre paso y con él la descripción espectral.

Situaciones análogas se produjeron en Sis-mología, Meteorología y otras ciencias de la Tierra, donde se empezaban a tratar grandes volúmenes de registros con marcado carácter

aleatorio, impulsando con ello la aparición de los modelos estocásticos para describir procesos muy diversos. La electrónica, por sus especiales condiciones, tomó la delantera en el tratamiento y modelación de estas señales, y así Pierson, Longuet-Higgins, Neuman y otros oceanógrafos desarrollaron en su campo de especialidad, técnicas y modelos creados en principio para resolver problemas electrónicos (Rice, Tukey, Hamming).

La necesidad de un modelo completo y simple al mismo tiempo llevó a considerar el oleaje como un proceso estocástico, cuasies-tacionario, normal y ergódico respecto de todos los parámetros estadísticos de interés. Proceso estocástico porque registros correspondientes al mismo oleaje sólo tienen en común sus propiedades estadísticas; cuasies-tacionario porque la simplificación del modelo aconseja admitir la estacionariedad de duraciones reducidas; normal porque permite describirlo totalmente con los momentos de primer y segundo orden (media y función de autocorrelación); por último, la ergodicidad del modelo permite determinar los estadísticos que definen el proceso con el análisis de una sola realización.

Admitiendo para el oleaje el modelo estocástico, estacionario o cuasiestacionario, normal y ergódico, se pueden manejar con facilidad una gran cantidad de registros. Una realización del proceso (registro) obtenido en un punto del mar y durante un cierto intervalo de tiempo, es uno de la infinidad que pueden registrarse del mismo oleaje y con igual probabilidad. Con el modelo aceptado, estamos en disposición de obtener, a partir de un solo registro, el momento de segundo orden del proceso (espectro o función de autocorrelación), y con él la descripción completa del oleaje.

Así pues, del conjunto infinito de funciones que definen el proceso de oleaje  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_k(t)$ , ..., en general sólo dispondremos de una única realización limitada del mismo  $[x_1(t)]_0^T$ , de la que, necesariamente, deberemos estimar la función de autocorrelación o espectro del proceso:

$$R_{xx}(t, \tau) = R_{xx}(\tau) \quad \text{estacionariedad}$$

$$R_{xx}(\tau) = E \{ [x(t + \tau) \cdot x(t)]_k \} = E [x(t + \tau) \cdot x(t)] \quad \text{ergodicidad}$$

$$S_{xx}(f) = F [R_{xx}(\tau)] \quad \text{espectro del proceso}$$

Esta función de autocorrelación  $[R_{xx}(\tau)]$  o el espectro  $[S_{xx}(f)]$ , que es su transformada de Fourier contendrán toda la información del proceso. A partir de este punto, puede considerarse que el espectro de oleaje  $[S_{xx}(f)]$  define totalmente el oleaje.

El modelo expuesto, estructurado para asimilar la información contenida en registros bidimensionales  $z(x, t)$ , puede generalizarse para describir la superficie del mar en tres dimensiones  $z(x, y, t)$ , apareciendo con ello la figura del espectro direccional de oleaje de forma análoga. En este artículo vamos a limitarnos al modelo unidireccional por ser éste la base para estudiar el comportamiento de los simuladores numéricos en general; por otro lado, el número reducido de sistemas de registro direccional que funcionan en la actualidad, y las características especiales de los modelos direccionales o no lineales, aconsejan no incluirlos en este estudio básico.

Aunque podemos considerar con cierto fundamento que la descripción espectral resuelve satisfactoriamente el problema de obtener y almacenar información relativa al oleaje, queda todavía pendiente la necesidad de re-

lacionar las diferentes formas descriptivas del mismo. Tanto registros como observaciones y estudios relativos al comportamiento de estructuras y procesos marítimos frente al oleaje están basados generalmente en descripciones geométrico-estadísticas del mismo. En efecto, el transporte sólido litoral o el tamaño de los cantos del manto principal de un dique de escollera vendrán por lo general estudiados por su respuesta frente a olas o grupos de olas determinadas por sus características de alturas y períodos; por otro lado, el estudio de problemas de resonancia o la planificación de campañas de registro precisan registros sintéticos de oleaje asociados a niveles de energía concretos, a espectros determinados. Por todo ello, será necesario obtener registros simulados que en esencia constituyen el proceso inverso al análisis de oleaje, ya que podremos obtener de un espectro la infinidad de registros (realización) equiprobables que definen el proceso estocástico, estacionario, normal y ergódico con que se ha modelado el mismo.

El simulador numérico de oleaje será, pues, el instrumento o método numérico capaz de reproducir con fidelidad registros sintéticos de oleaje asociados a formas espectrales concretas. En este artículo señalaremos algunos de los problemas y particularidades asociadas al empleo de diferentes técnicas de simulación numérica.

## 2. TRATAMIENTO NUMERICO DE SEÑALES

Antes de iniciar la descripción de los diferentes procedimientos de simulación de oleaje, vamos a exponer algunos aspectos relativos al tratamiento numérico de señales y que tendrán gran influencia en la explicación del comportamiento de los métodos de análisis y síntesis de oleaje. Se reseñarán fundamentalmente los fenómenos de discretización y truncamiento y su repercusión en la visión de las señales en los dominios del tiempo y la frecuencia.

Vamos a introducir la terminología relativa a las señales en los dos dominios, transformadas de Fourier y el conjunto de conceptos de este grupo que serán empleados en adelante.

La transformada de Fourier, que relaciona

señales continuas y no periódicas en los dos dominios, se expresa:

$$X(f) = \text{CFT} [x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \exp(-j 2\pi f t) dt$$

$$x(t) = \text{CFT}^{-1} [X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \exp(+j 2\pi f t) df$$

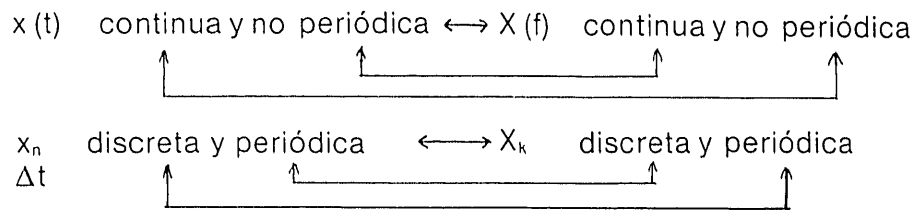
$$j = \sqrt{-1} \quad \text{unidad imaginaria}$$

Análogamente, la transformada de Fourier que relaciona señales discretas y periódicas en los dos dominios:

$$X_k = \text{DFT} (x_n) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \exp(-j \frac{2\pi n k}{N}) \Delta t$$

$$x_n = \text{DFT}^{-1} (X_k) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp(+j \frac{2\pi n k}{N}) \Delta f$$

$$\left. \begin{array}{l} x(n \Delta t) \rightarrow x_n = x[n] \\ n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ x_n = x_{n+N} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{discreta periódica} \\ (\Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N}) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} X(k \Delta f) \rightarrow X_k = X[k] \\ k = 0, 1, \dots, N-1 \\ X_k = X_{k+N} \end{array} \right.$$



Formas similares de la transformada de Fourier pueden tomarse para relacionar funciones continuas y periódicas (análisis de Fourier clásico) o discretas y no periódicas en uno y otro dominio (21).

En este artículo se utilizará indistintamente la forma continua o discreta para definir una señal en un dominio.

$$x_n \leftrightarrow x[n] \leftrightarrow x(n \Delta t) : X_k \leftrightarrow X[k] \leftrightarrow X(k \Delta f)$$

Para expresar la transformada de Fourier de una función temporal  $x(t)$  se tomara:  $X(f)$  o  $S_x(f)$ . Con esta terminología, el espectro de rama doble asociado a una señal  $x(t)$  será:

$$S_{xx}(f) = S_x(f) \cdot S_x^*(f)$$

donde  $*$  es el operador conjugado.

El espectro de potencia del proceso  $\{x(t)\}$  definido para el semieje positivo de frecuencia puede tomarse:

$$S(f) = 2 S_{xx}(f) \quad f > 0$$

$$S(f) = 0 \quad f < 0$$

Si el espectro se define a partir de la función de autocorrelación del proceso:

$$R_{xx}(\tau) = E [x(t + \tau) \cdot x(t)]$$

$$S_{xx}(f) = \text{CFT} [R_{xx}(\tau)]$$

$$R_{xx}(\tau) = \text{CFT}^{-1} [S_{xx}(f)]$$

Estas son las ecuaciones básicas sobre las que se estructuran las dos técnicas clásicas de estimación espectral (18). El espectro podrá obtenerse de la función de autocorrelación del proceso (1), o bien directamente de la señal  $x(t)$ .

### Discretización y truncamiento

Aunque con el modelo estocástico, estacionario, normal y ergódico, junto con las ecuaciones anteriores podríamos resolver el tema del análisis y síntesis de oleaje a nivel teórico, la situación real es diferente. Para manejar señales en la práctica mediante algoritmos numéricos, será necesario truncar la señal (duración finita) y discretizarla (resolución finita) a intervalos  $\Delta t$  constantes, ya que de lo contrario nos veríamos obligados a emplear sistemas analógicos (baja fiabilidad) y registros infinitamente extensos imposibles de obtener en la práctica.

La discretización a intervalos constantes  $\Delta t$  provoca en el dominio del tiempo pasar de una señal continua  $x(t)$  a otra discreta  $x_n = x(n \Delta t)$ . Esto implica una pérdida de información que en el dominio de la frecuencia se

denomina doblado («aliasing», «folding») y corresponde al fenómeno de confundir en una sola las componentes de frecuencias relacionadas con la de doblado  $F_d = 1/2 \Delta t$ . Hay que tener en cuenta que:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_0 n \Delta t + \varphi_0) &= \\ &= \cos[2\pi (f_0 + pF) n \Delta t + \varphi_0] = \\ &= \cos[2\pi (pF - f_0) n \Delta t - \varphi_0] \end{aligned}$$

$$f_0 \in ]0, 1/2 \Delta t[$$

$$F = 2 F_d = 1/\Delta t$$

$$p \in \mathbb{Z}$$

(Figura 1)

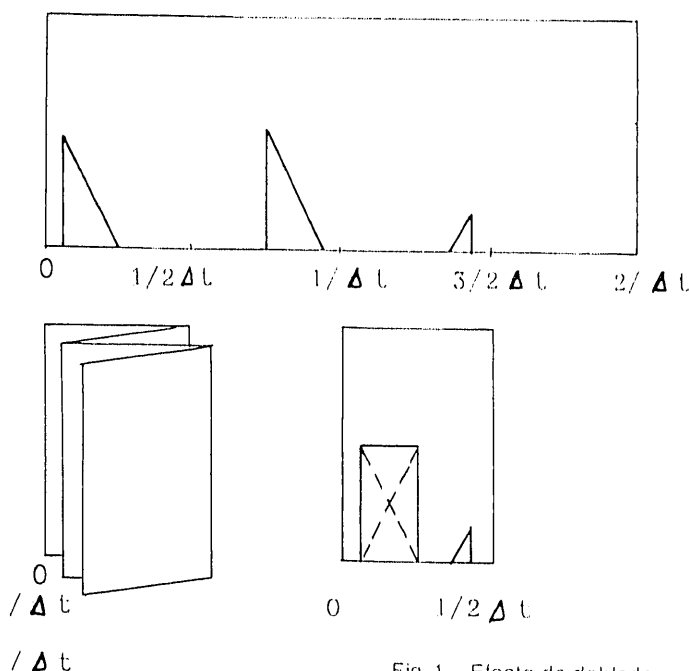


Fig. 1.—Efecto de doblado.

Esto significa de hecho la eliminación de las frecuencias componentes mayores que la de doblado ( $F_d = 1/2 \Delta t$ ).

La necesidad de truncar la señal por limitaciones en la capacidad del sistema y para optimizar los recursos de registro, lleva a la consideración del segundo gran fenómeno negativo de la manipulación real de señales. La función real infinitamente extensa deberá limitarse a un intervalo finito (12), el efecto producido será equivalente a multiplicar la señal temporal teórica por una función ventana («windowing») que deberá cumplir (1):

$$\begin{aligned} w(t) &= 0 \quad \text{si } \begin{cases} t \gg T/2 \\ t \ll -T/2 \end{cases} \\ w(t) &= 1 \quad t = 0 \end{aligned}$$

$$0 < w(t) < 1 \quad -T/2 < t < T/2$$

$$x(t) \Big|_{-T/2}^{+T/2} = \left[ x(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] \cdot \left[ w(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right]$$

Este producto de funciones en el dominio del tiempo tiene su operación equivalente (convolución) en el dominio de la frecuencia; así, el paso de la señal por una cierta ventana de datos  $w(t)$  producirá:

$$\left[ x(t) \Big|_{-T/2}^{+T/2} \right] = y(t) \quad \text{señal fija truncada}$$

$$\left[ x(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] = x(t) \quad \text{señal original infinita}$$

$$\left[ w(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] = w(t) \quad \text{ventana temporal}$$

$$y(t) = x(t) \cdot w(t) \quad \text{producto continuo}$$

$$S_y(f) = S_x(f) \star W(f) \quad \text{convolución continua}$$

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \cdot W(h-f) df$$

El efecto resultante sobre el espectro es la transferencia de potencia entre frecuencias próximas («spectral leakage»), que se traducirá en una pérdida de resolución en el dominio de la frecuencia.

Resumen, la discretización de la señal en el dominio del tiempo condiciona la extensión del espectro y, simétricamente, la limitación de la señal temporal reducirá la resolución máxima en el dominio de la frecuencia. Si nuestros registros de oleaje son, por ejemplo, de  $N = 600$  puntos y  $\Delta t = 1,5$  seg., como los que sirvieron de base para desarrollar el espectro P.M.K. (23), no será posible realizar estimaciones espectrales para frecuencias superiores a  $1/2 \Delta t = 0,33$  Hz, ni obtener resoluciones de frecuencias tales que  $\Delta f \approx 10^{-3}$  Hz; otras consideraciones reducen muchísimo más estas limitaciones reales primarias.

### 3. SIMULACION NUMERICA DE OLAJE

Aunque la simulación numérica de oleaje comprende todas las técnicas que para cada modelo de oleaje son capaces de obtener registros sintéticos, en este artículo nos limitaremos a las técnicas de simulación lineal que pueden generar registros de oleaje relacionados con aspectos definidos previamente.

te. Estas técnicas estarán basadas en instrumentos o algoritmos que podrán realizar el proceso inverso al análisis espectral del oleaje.

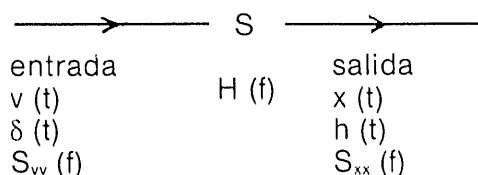
En efecto, si en el análisis el problema consiste en condensar dentro de una forma espectral  $S(f)$  toda la información de un proceso compuesto por la infinidad de realizaciones obtenidas (o que hubieran podido obtenerse) del mismo oleaje, en la simulación lo que se pretende es generar parte de esa familia de registros (realizaciones) que constituyen o definen el proceso estocástico con que hemos modelado el oleaje y que están íntimamente relacionados con el espectro de ese oleaje.

La simulación de los desplazamientos de la superficie del mar  $x(t)$  por medio de un ordenador puede realizarse básicamente de dos formas diferentes (2, 9, 11): filtrado digital de una señal estocástica por medio de un sistema lineal previamente diseñado y representación de la función por series de funciones trigonométricas.

### Filtrado digital:

El procedimiento general consiste en obtener una señal estocástica  $x(t)$  asociada a un espectro  $S_{xx}(f)$ , haciendo pasar otra señal estocástica con espectro conocido a través de un filtro numérico diseñado a tal fin.

Esta transformación, referida a sistemas y señales analógicas, puede expresarse (13):



$$x(t) = v(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

$H(f) = \text{CFT}[h(t)]$  Función de transferencia del sistema

$$S_{xx}(f) = S_{vv}(f) |H(f)|^2 \quad [1]$$

donde

$v(t)$  es la señal estocástica de entrada

$x(t)$  es la señal estocástica de salida

$\delta(t)$  es la función delta de Dirac

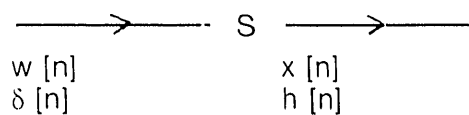
$h(t)$  es la función respuesta delta del sistema

$H(f)$  es la función de transferencia del sistema.

Con el esquema expuesto, estamos en disposición de obtener señales analógicas (continuas)  $x(t)$  con el espectro requerido  $S_{xx}(f)$  a partir de otras  $v(t)$  con espectro arbitrario fijo  $S_{vv}(f)$ . En general, el problema será resolver la implantación de un sistema lineal, invariante temporal que cumpla la ecuación [1] satisfactoriamente.

Si ello fuera posible, excitando el sistema con una señal  $v(t)$  aleatoria pura (ruido blanco) cumpliría  $S_{vv}(f) = 1 \forall f$  y crear un sistema lineal con función de transferencia  $H(f) = \sqrt{S_{xx}(f)} \cdot \exp[j\phi(f)]$  tendríamos resuelto nuestro problema de simulación. Sin embargo, ello no es viable en la práctica y nos veremos obligados a trabajar con sistemas discretos para resolver transformaciones análogas y, en el caso particular nuestro, sistemas digitales para transformar señales discretas.

La mecánica de funcionamiento puede expresarse de forma análoga:



$$x[n] = w[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} w[m] \cdot h[n - m] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} w[n - m] \cdot h[m]$$

$w[n]$  - Aleatoria pura, normal  $N(0, \sigma_w)$

$x[n]$  - Señal estocástica discreta  $x[n] = x(n \Delta t)$

Un filtro digital con función de transferencia racional, sistema discreto causal ( $h[n] = 0, \forall n < 0$ ) y estable ( $h[n] \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ ) cumple las condiciones necesarias para la simulación numérica de oleaje. Un sistema de estas características está definido (22) por la ecuación de recurrencia:

$$x[n] + a_1 x[n - 1] + \dots + a_p x[n - p] = b_0 w[n] + \dots + b_q w[n - q] \quad [2]$$

Un proceso que puede ser definido por la ecuación de recurrencia [2] se denomina ARMA (p, q) y puede representar correctamente el oleaje, como paso previo a la estimación espectral (14) si  $p = 30$  y  $q = 1$ .

Para realizar la simulación numérica de oleaje con este método, deberemos elegir los conjuntos  $\{a_i\}$  y  $\{b_i\}$  de tal forma que el espectro asociado a la secuencia de salida sea el deseado (14).

$$S(f) = \frac{\sigma_w^2 \Delta t \sum_{n=0}^q b_n \exp(-j 2\pi f n \Delta t)|^2}{1 + \sum_{k=1}^p a_k \exp(-j 2\pi f n \Delta t)|^2}$$

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_p x_{n-p} = b_0 w_n + \dots + b_q w_{n-q}$$

$$x_n = x(n \Delta t) \quad E[W_n^2] = \sigma_w^2 \\ \overline{W_n W_{n-i}} = 0 \quad V_i \neq 0$$

Esta técnica de simulación numérica, aunque ha sido empleada por algunos autores, es poco utilizada para este fin (11). Las razones fundamentales son la dificultad de reproducir formas espectrales variadas y la de introducir o extraer información relativa a las fases de las componentes en un registro (9). A pesar de ello, para el caso de tener que realizar síntesis numéricas con el fin de estudiar el comportamiento de modelos reducidos frente a oleaje irregular, estos procedimientos tienen una clara ventaja frente a la simulación por series de senoides, al resultar fáciles de implementar electrónicamente y consumir un tiempo de procesado mínimo (7, 15, 26).

### Series de funciones trigonométricas

Para la simulación numérica de realizaciones correspondientes a procesos estocásticos estacionarios, gaussianos y con espectro de potencia  $S(x)$ , se ha venido empleando el modelo formado por la suma de senoides de frecuencias y amplitudes fijas relacionadas con el espectro y fases aleatorias uniformemente distribuidas en  $[0, 2\pi]$ . Los algoritmos de este tipo empleados para la simulación numérica de oleaje irregular unidireccional (5, 11), son:

$$x(n \Delta t) = \sum_{i=1}^M a_i \cos(2\pi f_i n \Delta t + \gamma_i) \quad [3]$$

- $\gamma_i$  Aleatoria, uniformemente distribuida en  
 $x(n \Delta t)$  Registro simulado discreto del desplazamiento vertical de la superficie del mar.

- $a_i = \sqrt{2 S(f_i) \Delta t}$  Amplitud de cada componente  
 $f_i$  Frecuencia de cada componente.  
 $S(f)$  Espectro de oleaje.

Cuando el número de componentes del modelo [3] crece, la señal simulada se aproxima a la realización correcta de la de un proceso estocástico, estacionario, normal y con espectro de potencia  $S(f)$  (Rice, 1944). Como casi siempre en la modelística, su carácter aproximativo permite elegir aquel modelo que menos distorsiones provoque a nuestros objetivos, aparecen así diferentes formas de aplicación según el tipo de elección del conjunto  $\{f_i\}$ , del número de componentes  $M$  y del intervalo de discretización  $\Delta t$ .

Como condición previa hay que recordar la relación existente entre el intervalo temporal de discretización  $\Delta t$  y la frecuencia máxima posible de simulación discreta  $f_{\max} < 1/2 \Delta t$ . Esto puede establecerse implícitamente eligiendo un intervalo adecuado de simulación  $\Delta t$ , o bien expresarse explícitamente si se quiere estudiar la influencia en la simulación de una limitación en cuanto a la frecuencia máxima. Ejemplos de la primera forma de actuación podemos verlos en (9) y (10), mientras que en (11) Y. Goda llega a considerar adecuado un intervalo  $\Delta t \ll 1/5 \cdot f_{\max}$  y en (20) nosotros fijamos  $\Delta t = 1/4 \cdot f_{\max}$  después de un test previo y con el criterio de minimizar las distorsiones relativas al período de ola simulado. Por último, hay que indicar en este punto que algunos autores fijan arbitrariamente el intervalo temporal  $\Delta t$ , para después estudiar absurdamente la influencia de la frecuencia de corte por encima de la de doblado.

El tiempo de computación es el factor dominante en el uso de este tipo de simuladores. Estructurar un modelo de esta clase implica utilizar la ecuación [3] con al menos  $M = 100$  componentes (9) lo que representa un elevado coste en recursos del computador. Será pues necesario elegir un número de componentes tal que proporcione registros adecuados para nuestros propósitos y consuma el mínimo de recursos posible.

Aunque algunos autores no prestan interés por este aspecto de la simulación numérica, el tema es importante ya que indirectamente afectará al modelo de simulación.

A este respecto Goda (1981) ha señalado la ventaja que supone utilizar el siguiente algoritmo de cálculo para computar la ecuación [3]:

$$\begin{aligned} A_m &= \cos(2\pi f_m \Delta t) & B_m &= \sin(2\pi f_m \Delta t) \\ \cos(2\pi f_m t_{i+1}) &= \cos(2\pi f_m t_i) \cdot A_m - \\ &\quad - \sin(2\pi f_m t_i) \cdot B_m \\ \sin(2\pi f_m t_{i+1}) &= A_m \cdot \sin(2\pi f_m t_i) \\ &\quad + B_m \cdot \cos(2\pi f_m t_i) \end{aligned} \quad [5]$$

Con este método numérico ha conseguido resultados satisfactorios que para el caso de simulación unidireccional puede representar un ahorro importante de tiempo de computación. La velocidad aproximada aumenta en relación 13/4 (20), es decir, el algoritmo [5] puede computar la ecuación [3] con 130 componentes a la misma velocidad que lo hace el algoritmo directo con 40. La ventaja se produce por reducción de las llamadas a la función  $\cos(x)$ , a costa de un aumento del número de sumas y productos que consumen menos tiempo.

Con objeto de optimizar la eficiencia de este tipo de simuladores, hemos conseguido otro algoritmo, más eficiente que el [5] y que tiene aplicación positiva tanto para simuladores unidireccionales como direccionales. En este senoide se considera un caso límite de proceso AR(2):

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_m t_{i+2}) &= 2 \cdot A_m \cdot \cos(2\pi f_i t_{i+1}) - \\ &\quad - \cos(2\pi f_i t_i) \\ \sin(2\pi f_m t_{i+2}) &= 2 \cdot A_m \cdot \sin(2\pi f_i t_{i+1}) - \\ &\quad - \sin(2\pi f_i t_i) \end{aligned} \quad [6]$$

Con el algoritmo [6] se consiguen velocidades relativas 32/4 mejorando el 13/4 de [5]. Las simulaciones se han realizado con el sistema UNIVAC 1100/60 de la UPV, FORTRAN ASCII nivel 10R1 y técnica simple de programación.

Expuestos los condicionantes básicos de un simulador por series de funciones trigonométricas, vamos a detallar la técnica de construcción y elección adecuada del modelo de simulación. La forma básica se apoya en la ecuación [3]

$$x(n\Delta t) = \sum_{i=1}^M a_i \cos(2\pi f_i n\Delta t + \varphi_i) = X_n$$

- $a_i, f_i$  amplitudes y frecuencias relacionadas con  $S(f)$
- $\varphi_i$  fases aleatorias con distribución uniforme en  $[0, 2\pi]$

$$a_i = \sqrt{2 S(f_i) \Delta f_i}$$

Aunque los resultados correspondientes a estos modelos han sido contestados porque no corresponden satisfactoriamente a la variabilidad estadística de registros reales (10), esta técnica todavía es empleada por algunos autores (5, 19, 20) y puede considerarse una primera aproximación a una correcta simulación de oleaje irregular unidireccional lineal. En este contexto, hemos desarrollado el estudio base (20) como una aproximación válida al estudio general de simulación dejando el análisis direccional, no lineal para una segunda fase.

Los distintos procedimientos de elección de los conjuntos  $\{a_i\}$ -- $\{f_i\}$  definirán las diferentes variantes de este grupo de simuladores. Vamos a destacar los siguientes:

#### *Frecuencias armónicas:*

Esta es la forma trivial de resolver el problema, dividiendo el espectro a intervalos  $\Delta f = \text{ect.}$  El método de frecuencias armónicas equivale a discretizar el espectro en bandas de igual anchura  $\Delta f$  para, posteriormente elegir como frecuencia  $f_i$  representante de banda la medida del recorrido frecuencial. El problema fundamental de este método es que las frecuencias resultan armónicas unas de otras y por tanto el registro es periódico. Con  $M = 100$  componentes,  $\Delta t = 1$  seg., y un espectro entre 0 y 0.25 Hz, el período resultaría  $T = 800$  seg. insuficiente para la mayoría de las aplicaciones de los simuladores numéricos.

Para evitar esta situación, se han ideado otros métodos que atendiendo a la ecuación general [3] permitan generar registros numéricos con un período prácticamente ilimitado:

#### *Procedimiento de Borgman:*

Denominado por algunos autores de función espectral acumulada, consiste en obtener un conjunto de frecuencias a partir de la función espectral acumulada  $E(f) = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S(f) df$  de tal modo que la potencia  $a_i^2/2$  de cada senoide componente sea constante  $a_i = a = \text{cte. } \forall i$ .

$$\begin{aligned} \{f_i\} / \int_{f_i}^{f_{i+1}} S(f) df &= \frac{E}{M} = \frac{a^2}{2} = e_0 : \\ &: E = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S(f) df \\ M &= \text{número de componentes} \end{aligned}$$

Definida la técnica de discretización del espectro en bandas, queda por fijar el criterio de elección de la frecuencia representante de banda. Las dos variantes más significativas las hemos denominado B1 y B2 en este estudio y corresponden a tomar la frecuencia  $f_i^*$  de la banda  $[f_i, f_{i+1}]$  como la mediana energética (9, 10):

$$\int_{f_i}^{f_{i+1}} S(f) df = \int_{f_i}^{f_{i+1}} S(f) df = \frac{E}{2M} \quad [B1]$$

o bien tomar la media del recorrido frecuencial [5]:

$$(f_i) = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} \quad [B2]$$

En general, la forma de discretizar el espectro definirá el procedimiento particular de simulación, mientras que la frecuencia representante de banda podrá tomarse con algunos de los criterios anteriores u otro similar. Parece razonable que esta frecuencia esté comprendida entre la mediana energética (que ignora diferencias en el recorrido frecuencial de la banda) y la medida frecuencial (que hace lo propio con la distribución de potencias en la banda).

*Otros modelos de series de funciones trigonométricas:*

En 1970 Goda publica un estudio estadístico de parámetros de oleaje basados en una simulación numérica con un modelo denominado de series de funciones trigonométricas. Aunque hace referencia al procedimiento de Borgman publicado el año anterior (2) y a la existencia de otra forma de simular en base a filtros digitales, desarrolla su propio método para determinar  $\{a_i, f_i\}$  estableciendo como bases de la simulación:

1. Que el conjunto  $\{f_i\}$  no forme armónicos. Esto permitirá obtener registros extensos.
2. Que las magnitudes  $a_i$  sean semejantes en lo posible, para reducir al máximo el número de componentes necesario.

Dada la diversidad de formas espectrales, estas dos condiciones son difíciles de cumplir, llegándose en aquella ocasión a un modelo de espectro cuasi-aleatorio con elección de frecuencia representante de banda la media frecuencia. Sería fácil crear otros mo-

delos de simulación que cumplan la ecuación [3]; sin embargo, parece razonable utilizar el procedimiento de Borgman siempre que ello sea posible, con objeto de minimizar el número de componentes y mantener el período de simulación muy elevado.

*Simulación FFT:*

Además de los modelos de simulación generales vistos anteriormente, la aparición en 1965 (4) de los algoritmos FFT (finite Fourier Transform) hicieron cambiar notablemente las antiguas técnicas de análisis espectral y han provocado la creación de técnicas de simulación basadas en dar valores adecuados a los coeficientes complejos de Fourier del algoritmo FFT en el dominio de la frecuencia, para volverlo al dominio del tiempo invirtiendo la transformación de Fourier a una gran velocidad (24).

Esta técnica ha sido empleada mediante un algoritmo compacto FFT, con objeto de simular registros de oleaje irregular unidireccional lineal con objeto de dirigir una pala generadora en un canal de ensayos y con una capacidad de computación mínima (17); también puede emplearse para obtener registros simulados de oleaje unidireccional no lineal (16), pero aún así, en la actualidad algunos autores siguen ignorando esta técnica de simulación numérica como tal. Nosotros hemos utilizado un simulador FFT para realizar el contraste entre otros dos simuladores del tipo Borgman B1 y B2. Puede comprobarse con facilidad (20) que el paso directo de la señal del dominio de la frecuencia al del tiempo mediante un algoritmo que resuelve la transformación discreta de Fourier, es equivalente a realizar una simulación de serie de senoides de frecuencias armónicas ( $f_m = m \Delta f$ ) y en número elevado ( $K = N/2 - 1$ ).

La formación del vector complejo debe ajustarse a las expresiones:

$$X_m = \frac{1}{2} \sqrt{25 (f_m) \Delta f} \cdot \exp(-j \varphi_m)$$

$f_m = m \Delta f$ ,  $\varphi_m$  aleatoria con distribución uniforme en  $[0, 2\pi]$

$N$  — número de puntos a simular.

$\Delta t$  — intervalo temporal de simulación.

$\Delta f$  — intervalo frecuencial de simulación.

$$\begin{aligned} X_{n-m} &= X_m^* & m &= 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ X_0 &= X_{N/2} = 0 \end{aligned} \quad [8]$$



Las condiciones [7-8] semejantes a las [3-4] son las que establecen la correspondencia entre la forma espectral  $S(f)$  que define el proceso, la serie de fases aleatorias  $\{\phi_m\}$  y la señal que se corresponde en el dominio de la frecuencia  $X_m$ . Con la condición [8] impuesta, la señal  $x_n = \text{DFT}^{-1}[X_m]$  será real, de media nula y sin componente alterna pura.

Dado que los algoritmos FFT actúan sobre vectores complejos, hemos utilizado una variante de simulación con objeto de optimizar los recursos del ordenador; en cada transformación se generan dos registros simulados del mismo espectro. El esquema de simulación es:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & [\phi_m] & \longrightarrow & [x_n] \\ \Delta t & | & \longrightarrow & \Delta f & \longrightarrow & [f_m] & \longrightarrow [S(f_m)] \\ N & & & & & & \updownarrow \\ & & & & [\psi_m] & \longrightarrow & [y_n] \end{array}$$

La ventaja fundamental de la simulación FFT frente a las de series de senoides es su alta velocidad. Una simulación FFT de 8.912 puntos ( $M = 4.095$  componentes armónicas) es tan rápida como una síntesis directa de la ecuación [3] con sólo cuatro componentes. Aunque los algoritmos [5] y [6] pueden reducir esta ventaja, queda fuera de toda duda su mayor eficiencia computacional.

En resumen y aunque pueden verse publicaciones de alto nivel relativas a simulación que no consideran la técnica FFT, hemos estructurado un simulador de este tipo para contrastar resultados con dos del tipo Borgman (B1 y B2) y que servirá para establecer en primera aproximación las limitaciones propias de los diferentes simuladores de oleaje irregular, unidireccional, lineal.

#### 4. CONTRASTE DE SIMULACION

Este capítulo está destinado a contestar la cuestión. ¿Tienen los métodos numéricos de simulación alguna influencia sobre los resultados de la misma? o sea, los registros simulados ¿dependen sólo del espectro de entrada, o también del propio método empleado?

Este tema previo hay que resolverlo ya que de lo contrario pueden extraerse conclusiones que no se correspondan con la realidad del propio modelo teórico de simulación. Es

habitual realizar estudios relativos a las características de registros simulados con un cierto método, sin prestar mucha atención al simulador empleado. En algunas ocasiones (11), se tratan de justificar algunos parámetros del simulador como  $\Delta t$ ,  $f_{\max}$ ,  $M$ , atendiendo a criterios en su mayoría empíricos, pero la tónica general es tomar fijo de antemano tanto el procedimiento de simulación como la variante empleada justificando la acción con que el resultado es aproximadamente correcto. Precisamente ese presupuesto es el sujeto principal de este capítulo.

Para determinar con claridad las posibles divergencias de resultados entre los distintos procedimientos de simulación, hay que estudiar las diferencias existentes entre cada método numérico y el modelo matemático base. Recordemos que el oleaje lo hemos supuesto modelado correctamente como un proceso estocástico, estacionario y gaussiano, se ha centrado este estudio en la simulación unidireccional y se ha concretado el contraste de simuladores entre dos de series de senoides del tipo Borgman y un simulador directo vía FFT.

Dado que el proceso se presupone lineal, la división del espectro de oleaje continuo  $S(f) \int_{f_{\min}}^{f_{\max}}$  en bandas de frecuencia  $S(f)$  no supone cambio alguno del modelo matemático puro. La distorsión fundamental de cada procedimiento se produce al convertirse cada «banda estrecha» del espectro en una delta de Dirac para el modelo numérico.

En el dominio del tiempo, la componente a cada banda  $S(f) \int_{f_i}^{f_{i+1}}$  que sería una señal temporal de potencia media  $\int_{f_i}^{f_{i+1}} S(f) df = e_0$  y con una distribución de amplitudes máximas siguiendo la función de Rayleigh aproximadamente, se convierte en una senoide de amplitud  $a = \sqrt{2} e_0$  y con frecuencia dependiente del método de simulación utilizado y la forma del espectro de entrada (fig. 2).

Esta situación implica una pérdida de información creciente con la potencia de cada banda y dependerá de la técnica de simulación que se utilice. En las figuras (3) y (4) pueden verse los espectros teóricos de los procesos realmente simulados; puede entenderse con facilidad que un simulador clásico del tipo Borgman realizará con dificultad la

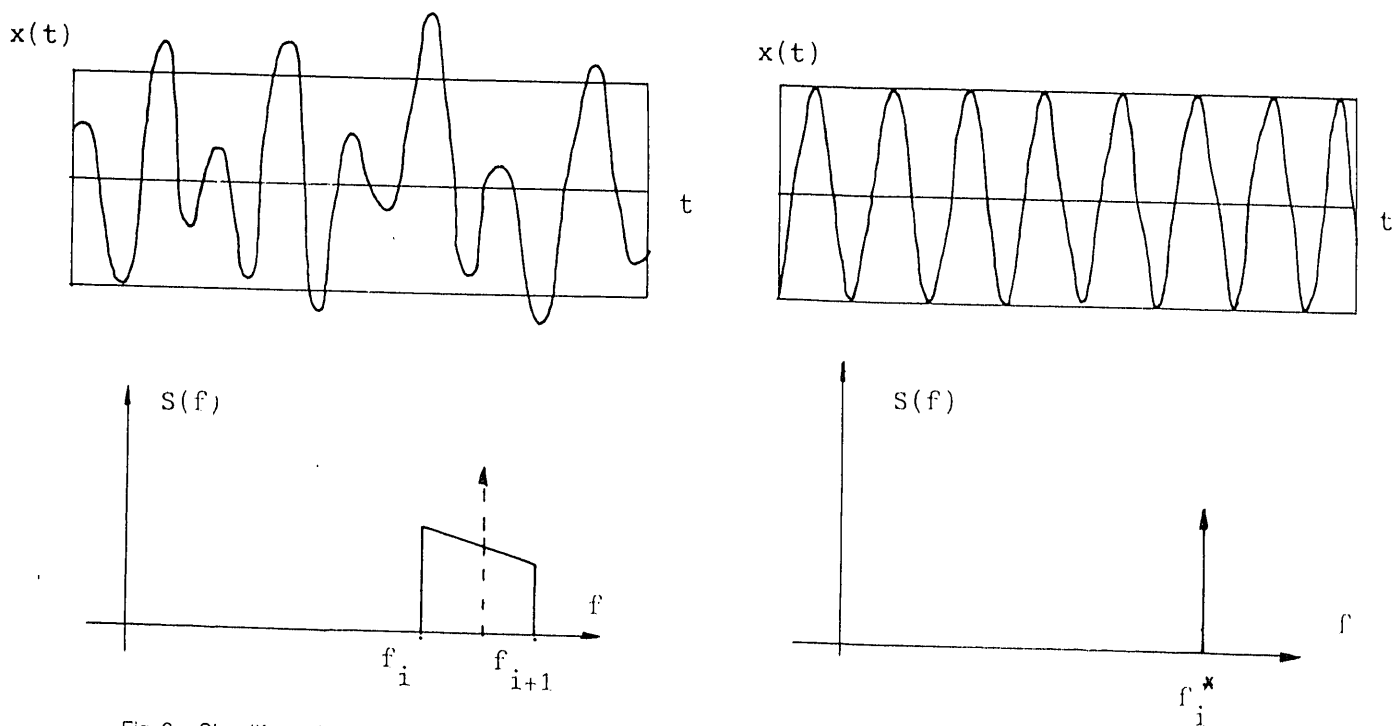


Fig. 2.—Simplificación realizada en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

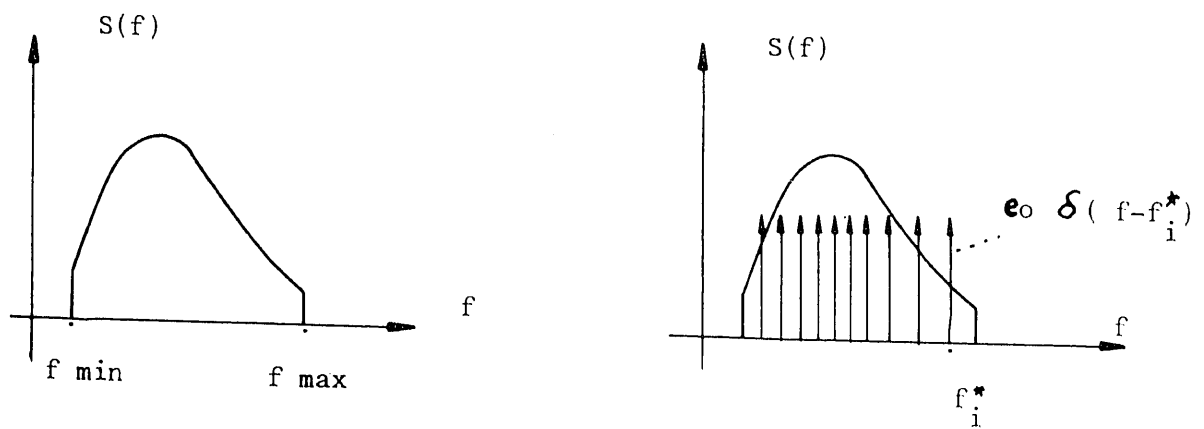


Fig. 3.—Espectro real simulado. Procedimiento de Borgman.

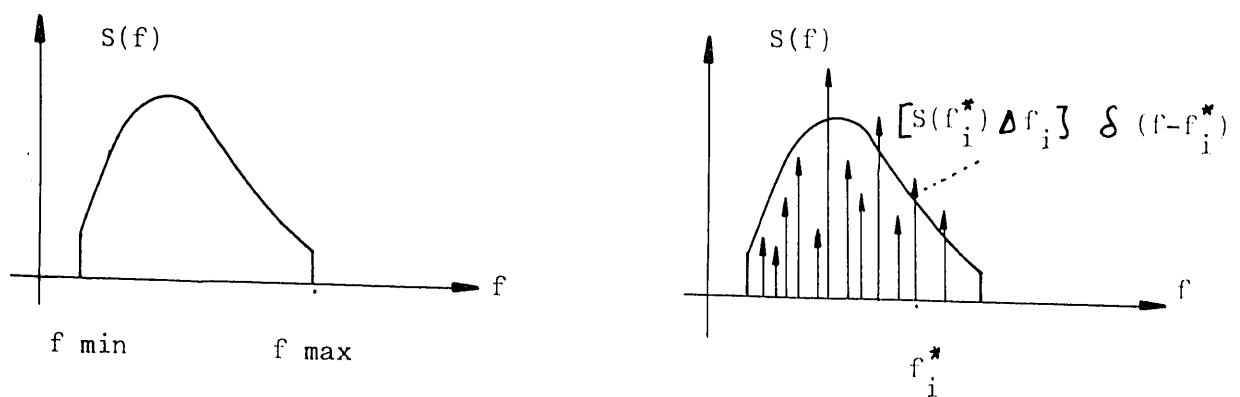


Fig. 4.—Espectro real simulado. Procedimiento de Goda.

simulación de las zonas espectrales de menos potencia, donde una banda relativamente ancha será sustituida por una senoide. Por otra parte, la simulación FFT intercambia senoides por bandas espectrales de anchura

constante  $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$ , resultando con ello re-

gistros periódicos muy extensos.

Las divergencias observadas a nivel teórico y en el dominio de la frecuencia, han sido contrastadas con análisis espectrales de registros simulados por diferentes procedimientos. Para poder establecer con claridad las diferencias imputables a cada método, se eligió una única forma espectral.

$$\text{P.M.K. } (f_{\text{pico}} = 0,0635 \text{ Hz}) : S(f) = 5 \cdot 10^{-4} \cdot f^{-5} \cdot \exp(-2,02 \times 10^{-5} f^{-4})$$

(m<sup>2</sup> × seg)

Antes de aplicar al espectro teórico PMK elegidos los diferentes métodos de simulación, es aconsejable señalar algunos aspectos de estas formas espectrales. Puede demostrarse (6, 20) la inconsistencia teórica que representa admitir esta forma espectral para todo el rango de frecuencias reales. Si  $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$  son las funciones desplazamiento, velocidad y aceleración vertical de la superficie del mar, se verifica:

$$\sigma_x^2 = m_{00}, \quad \sigma_v^2 = (2\pi)^2 m_{20}, \quad \sigma_a^2 = (2\pi)^4 m_{40}$$

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_x^2 \sigma_a^2}$$

Para espectros que tengan rama potencial  $K f^n$  a frecuencias elevadas, como el PMK o JONSWAP ( $n=5$ ) que admiten el análisis dimensional de Kitaigorodskii a altas frecuencias, se obtienen momentos infinitos que llevan a situaciones absurdas como  $\sigma_x^2 = \infty$  si el espectro se considera correcto en  $[0, \infty[$  f. El problema de fondo consiste en que los espectros teóricos como los indicados, están basados en datos de campo que no permiten realizar estimaciones espectrales más allá de 0,3 ó 0,4 Hz.; posteriormente suele recurrirse al análisis dimensional o registros de alta precisión que de alguna forma, permiten estimar la forma espectral a frecuencias elevadas. La extrapolación de estos resultados fuera del recorrido en que son correctos, lleva a la situación absurda señalada anteriormente, incluso a frecuencias relativamente bajas (8)

pueden obtenerse resultados divergentes con la teoría dimensional debido a la presencia de fenómenos no lineales no considerados.

En la tabla 1 se muestra la variación de los parámetros teóricos  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_v^2$ ,  $\sigma_a^2$ ,  $\epsilon$  y  $\bar{T}_0$ , asociados a diferentes frecuencias de corte. Las ondas de gravedad, en este caso, pueden considerarse puras por debajo de 0,33 Hz., frecuencia a la que tanto  $\sigma_x^2$  como  $\sigma_v^2$  y  $\bar{T}_0$  han alcanzado prácticamente sus valores asintóticos.

La relación óptima entre el intervalo temporal de discretización  $\Delta t$  y la frecuencia máxima de simulación  $f_{\text{max}}$  se adoptó

$$\Delta t = \frac{1}{4 \cdot f_{\text{max}}} < \frac{1}{2 \cdot f_{\text{max}}}$$

después de los tanteos expuestos en la tabla 2 que muestra su influencia sobre el período medio  $\bar{T}$  de simulación FFT. Con lo visto y la consideración de que los registradores rara vez permiten describir el espectro de oleaje a frecuencias superiores a 0,5 Hz., se tomó este límite como la frecuencia máxima del espectro útil.

Establecido el espectro útil a simular  $S_{\text{PMK}}(f)$  con  $f_p = 0,0635$  Hz.,  $f_{\text{max}} = 0,5$  Hz.,  $f_{\text{min}} = 0$  Hz.,

$$\Delta t = 0,5 \text{ seg.} = \frac{1}{4 \cdot f_{\text{max}}}$$

con valores teóricos  $\sigma_x = 2,49$  m.,  $\sigma_v = 1,38$  m/seg.,  $\sigma_a = 1,2$  m/seg<sup>2</sup>,  $\epsilon = 0,772$  y  $\bar{T}_0 = 11,32$  seg., se simuló series aleatorias de 40 registros correspondientes a los procedimientos y técnicas de simulación B1, B2 y FFT reseñadas anteriormente, con duración de registro  $N \Delta t \rightarrow 512, 1.024, 2.048$  y  $4.096$  seg., y número de componentes (B1 y B2)  $M = 32, 64, 128, 256$  y  $512$ . Se determinaron para cada realización los parámetros estadísticos asociados a la serie de alturas y períodos de ola resultantes de aplicar el criterio de pasos ascendentes por cero para definir las olas. Se estudiaron las distribuciones de los parámetros:

$x_m$	= desplazamiento medio cuadrático.
$H_m$	= altura de ola medio cuadrático.
$H_{1/3}$	= altura de ola media del tercio superior de olas.
$H_{0,2}$	= percentiles del 20 %, 50 % y 80 % de la distribución de alturas de ola.
$H_{0,5}$	
$H_{0,8}$	= período medio.
$\bar{T}$	

- $H_{\max}, \dot{M}$  = altura de ola máxima de registro.  
 $\chi^2_{H-PH}$  = valores chi-cuadrado para medir la bondad del ajuste de las alturas de ola o la f.d.d. de Rayleigh máximo verosímil.  
 $\chi^2_{T-PT}$  = valores chi-cuadrado para medir la bondad del ajuste de los períodos al cuadrado de ola a la f.d.d. de Rayleigh máximo verosímil.

Los diferentes valores obtenidos de cada simulador se han comparado con los correspondientes a espectros de banda estrecha. En las tablas 3, 4, 5 y 6 pueden verse los resultados correspondientes a algunos de estos parámetros.

De la tabla 3 se desprende que la elección de la frecuencia representante de banda afecta al período medio de registro; esta elección, como se indicó en el capítulo anterior, debería estar comprendida entre la media frecuencial y la mediana energética, ya que éstos dan valores de  $T$  por debajo y por encima respectivamente del valor referencia y el de la simulación FFT. Los períodos medios  $T$  resultan aproximados a los correspondientes a

$$\varepsilon = 0 \left( \sqrt{\frac{m_0}{m_z}} \right)$$

pero los ajustes de la serie de  $\bar{T}^2$  a la función de Rayleigh resulta mucho peor que en el caso de las alturas de ola.

La tendencia general de todos los parámetros relacionados con las alturas de ola  $H$  y observada por diversos autores tanto en el terreno de la simulación numérica como en registros reales, es la disminución de valores (2-8 %) en este espectro ancho respecto del correspondiente a  $\varepsilon = 0$  y la misma potencia. Es por tanto razonable que los estimadores  $\chi^2$  de la bondad de ajuste a la f.d.d. de Rayleigh indiquen peores ajustes al aumentar el número de olas.

En cualquier caso y dado que las series aleatorias de fases coinciden para todo par de simulaciones  $B1(N,M) - B2(N,M)$ , puede afirmarse que existen diferencias significativas entre los tres simuladores que decrecen al aumentar el número de componentes ( $M$ ) y la duración del registro  $N \Delta t$ . Estas diferencias se hacen especialmente apreciables respecto del parámetro  $H_{\max}, M$  que resulta en general menor que el correspondiente a f.d.d. de Rayleigh e independencia entre alturas de ola, como ya ha sido observado en

registros reales y simulados muy diversos (9, 10, 11).

Dadas las buenas características que presentaba el simulador FFT y la existencia de una única variante de simulación para cada longitud de registro, se realizó un estudio de parámetros de oleaje simulado tomando  $\Delta t$  variable:  $\Delta t = 0,5; 0,75; 1,0$  y  $1,5$  seg. con frecuencias máximas respectivas  $f_{\max} = 7,9; 5,3; 3,9$  y  $2,6$  veces la frecuencia de pico  $f_p = 0,0635$  hz. Algunos resultados pueden verse en las tablas 7, 8, 9 y 10 donde el parámetros  $H_{\max}, \dot{M}$  se muestra creciente con la duración del registro de forma significativa, aunque siempre por debajo del teórico de referencia:  $(H_{\max}, \dot{M})_{\text{teor.}} = 2 \sqrt{2 m_0}$   
 $\left( \sqrt{I_n \dot{M}} + \frac{0,5772}{2 \sqrt{I_n \dot{M}}} \right)$  donde  $\dot{M}$  es el número de olas  $\dot{M} = N \Delta t \sqrt{m_0^2 / m_2}$ ; se observa también una menor dispersión del parámetro  $H_{\max}, \dot{M}$  que el esperado para  $\varepsilon = 0$  e independencia estadística entre olas:  $\sigma(H_{\max}, \dot{M})_{\text{teor.}} = 2 \sqrt{2 m_0} \left( \frac{\pi}{2 \sqrt{6 I_n \dot{M}}} \right)$

Por otro lado, estudiando series normalizadas asociadas a las de alturas y períodos al cuadrado de ola, se llegó a determinar una correlación entre  $H$  y  $T^2$ , significativa para olas consecutivas y no significativas entre no consecutivas, resultado que se encuentra en la línea de las observaciones de Rye (25) sobre registros reales de una potencia aproximada a la simulada por nosotros. Los estimadores de correlación normalizada dieron valores del orden de 0,6 entre alturas y períodos al cuadrado de la misma ola, de 0,3 entre alturas de ola consecutivas y de 0,2 entre alturas y períodos al cuadrado de olas consecutivas.

En cuanto a los análisis espectrales realizados sobre la secuencia total en registros simulados vía FFT y las correspondientes a simulaciones de  $B1$  y  $B2$ , los resultados se ajustan a lo señalado respecto a la pérdida de información debida a la estructura del modelo.

Los espectros medios de las simulaciones FFT se justan al teórico con precisión, dado el carácter recíproco de la transformación. Los espectros medios de registros simulados con los métodos B presentan claras acumulaciones de potencia en frecuencias concre-

tas dependientes del número de componentes y método elegido. Es evidente la dependencia entre las señales simuladas vistas en el dominio de la frecuencia y la estructura específica del simulador empleado.

## 5. CONCLUSIONES

Del estudio realizado (20) se desprenden ideas relativas a las técnicas, aplicación y limitaciones de los simuladores numéricos de oleaje irregular, unidireccional, lineal y que vamos a sintetizar en los siguientes puntos.

1. Si se admite que el oleaje puede ser modelado satisfactoriamente como un proceso estocástico, estacionario (o cuasiestacionario) y normal, el fenómeno queda definido totalmente por su nivel medio y espectro de potencia. Con este modelo, ni pueden definirse espectros teóricos de oleaje con algún momento infinito, ni se deben admitir aquellos cuyos momentos de orden 4 se aproxime al valor  $g^2/(2\pi)^4$  ya que ello implicaría la presencia de fenómenos no lineales no previstos en el propio modelo. Así pues, espectros con rama potencial  $kf^{-5}$  del tipo PMK O JONSWAP, deberán cortarse o modificarse a partir de frecuencias donde es evidente la presencia de fenómenos no lineales.

2. Es admisible establecer en simulaciones de oleaje con carácter general, frecuencias de corte  $f_{max}$  próximas a 0,5 hz. a partir de las cuales  $S(f) = 0$  ( $\forall f/f > f_{max}$ ) ya que es esa la frecuencia máxima de resolución de muchos de los registradores empleadores en la actualidad. Por otro lado, no existe una teoría coherente y suficientemente contrastada que permita determinar la forma espectral a altas frecuencias ni se ha puesto de manifiesto la necesidad de ello en aplicaciones de Ingeniería Civil.

3. Aunque pueden verse en la actualidad publicaciones de alto nivel que no consideran la simulación FFT una técnica a tener en cuenta frente a las dos clásicas, en este estudio se han puesto de manifiesto algunas de sus virtudes:

- Simplicidad conceptual y de cálculo que permite analizar los resultados con facilidad tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.
- Facilidad de reproducción de cualquier forma espectral.

- Comodidad de análisis tanto de las amplitudes como de las fases componentes de los registros.
- Velocidad de cálculo, ya que un simulador FFT es capaz de generar registros muy extensos con una gran economía de recursos.
- Coherencia interna en el caso de tener que realizar simulaciones múltiples de procesos derivados simultáneamente.

4. Del estudio estadístico de los parámetros de oleaje correspondientes a registros simulados, se han observado características que en general están en la línea de investigaciones realizadas por diversos autores tanto en análisis de oleaje real como en registros simulados por diferentes procedimientos:

- Tomando  $\Delta t < 1/4 f_{max}$ , el parámetro  $\bar{T}$  no queda afectado sensiblemente.
- Para un número de componentes del simulador reducido ( $M < 250$ ) los procedimientos de series senoides B1 y B2 dan valores significativos de  $T$  superiores e inferiores respectivamente de los obtenidos con simulación FFT. Esto parece indicar que la elección adecuada de la frecuencia representante de banda en un método de series de senoides deberá estar comprendida entre la media del recorrido frecuencial y la mediana energética.
- Los parámetros estadísticos  $H_m$ ,  $H_{1/3}$ ,  $H_{0.8}$ ,  $H_{0.5}$  y  $H_{0.2}$  resultan en general menores que los correspondientes a la distribución de Rayleigh teórica. Según los diferentes parámetros la reducción oscila del 2 al 8 %.
- Para todos los simuladores y duraciones de registro, se han obtenido distribuciones de altura de ola máxima de registro inferiores a las teóricamente esperadas, considerando f.d.d. de Rayleigh para las alturas de ola e independencia estadística entre ellas.
- El estimador de la bondad del ajuste a la f.f.f. de Rayleigh tanto de la distribución de alturas como de períodos al cuadrado de ola, indica que ninguna de las dos puede considerarse satisfactoria, aunque resulta evidente que los períodos al cuadrado se ajustan mucho peor.
- Se han observado correlaciones significativas de las variables  $H$  y  $T^2$  corres-

pendientes a olas consecutivas del mismo registro y no significativas si las olas no son consecutivas.

5. Del contraste de resultados entre simuladores se deduce:

- La simulación por serie de senoides no armónicas es incapaz de generar registros sintéticos cuyo espectro medio no difiera significativamente del teórico en algunos tramos del rango de frecuencias.
- Los resultados relativos a parámetros estadísticos  $H_{1/3}$ ;  $H_m$ ;  $H_{0.8}$ ;  $H_{0.5}$ ;  $H_{0.2}$  se aproximan para todos los simuladores empleados si el número de componentes  $M$  es elevado y la duración  $N \Delta t$  también lo es. Estos resultados difieren entre ellos si el número de componentes y la duración de registro es reducida.
- Se ha observado que el parámetro altura de ola máxima de registro  $H_{max}$ ,  $M$  es especialmente sensible al tipo de simulador empleado. Aunque para todos resulta por término medio inferior, con menor dispersión que el de referencia y creciente con la duración; se observan fuertes divergencias entre los resultados obtenidos por simulación FFT y los de series de senoides por un lado y entre las diferentes variantes de estos por otro.
- En contra de la opinión de algunos autores, puede afirmarse que la f.d.d. de alturas de ola máxima de oleaje simulado no es constante a partir de  $N \Delta t = 20$  minutos, sino que es creciente con la duración aunque por debajo del nivel correspondiente a considerar f.d.d. de Rayleigh para las alturas de ola e independencia estadística entre las mismas.

6. Un modelo de simulación de oleaje irregular unidireccional lineal basado en series de senoides de frecuencias no armónicas y número de componentes arbitrario, no será en general aplicable directamente para el estudio de cualquier estadístico de oleaje. La simulación FFT, resulta fácil de manejar tanto a nivel teórico como numérico, es mucho más rápida y no presenta el gran número de variantes de los simuladores clásicos de series trigonométricas.

7. Respecto del diseño óptimo de obras

marítimas, hay que señalar que el problema grave sigue centrado en la escasez de datos que permitan describir correctamente el clima marítimo de la zona. Dada la dependencia observada de la altura de ola máxima de registro respecto de su duración, deberán programarse las campañas de toma de datos con el objetivo principal de determinar la probabilidad de presentación de un cierto nivel de potencia de oleaje y después para establecer la duración probable asociado a dicho nivel. En todo caso hay que rechazar la idea de que es inútil obtener registros de oleaje de longitud superior a los 20 minutos.

## REFERENCIAS

1. BLACKMAN, R. B. and TUKEY, J. W.: «The Measurement of Power Spectra» Dover Publ. 1958.
2. BORGMAN, L. E.: «Ocean Wave Simulation for Engineering Design». J. Water. and Harbors Div., Proc. ASCE, Vol. 95 No WW4 pp. 557-583. 1969.
3. BOX, G. E. and JENKINS, G. M.: «Time Series Analysis: Forecasting and Control». Holden Day. 1976.
4. COOLEY, J. M. and TUKEY, J. W.: «An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Serie». Math. Comp. Vol. 19, Ap. 1965 pp. 297-301.
5. CORNIERO, M. A.: «Análisis Estadístico de Fenómenos Naturales Cuasi-Estacionarios mediante simulación numérica. Distribución de máximas alturas de ola». Tesis-ETSICCP Santander. 1981.
6. DENIS, M. S.: «Some Coments on Certain Idealized Variance Spectra of the Seaway Currently in Fashion». Dpto. Ptos. ETSICCP Santander. 1980.
7. FUNKE, R.: «Random Wave Signal Generation by Minicomputer». Coastal Eng. 1974. ASCE.
8. GARRET, J.: «Some New Observations on the Equilibrium Region of the Wind-wave Spectrum». Journal of Marine Research, Vol. 27 n.º 3.
9. GODA, Y.: «Wave Simulation for the Examination of Directional Resolution». Int. Symp. Directional Wave Spectra Application's 81. Berkeley. California-USA. Sep. 1981.
10. GODA, Y.: «Numerical Experiments on Statistical Variability of Ocean Waves», Rep. of. the Port and Harbour Res. Inst, Vol. 16 No 2. June 1977.
11. GODA, Y.: «Numerical Experiments on Wave Statistics Spectral Simulation». Rep. of the Port and Harbour Re. Inst. Vol. 9 No 3. Sep. 1970.
12. HARRIS, F. J.: «On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform». Proc. IEEE, Vol. 66 No 1. Jan. 1978 pp. 51-83.
13. HEWLETT PACKARD: «Fourier Analyzer Training Manual». Application. Note 140-0 H.P.
14. HOLM, S. and HOVEN, J. M.: «Estimation of Scalar Ocean Wave Spectra by the maximum Entropy Method». IEEE Journal of Oceanic Engineering, Vol. OE-4, No 3. July 1979.
15. H.R.S.: «HRS Wave Spectrum Synthesizer». Instru-ment Manual, Jan 1977. MRS, Wallingford U.K.
16. HUDSPETH, R. T.: and MIN-CHU-CHEN: «Digital Simulation of Non Linear Random Waver». Jour.

- Waterways Port Coastal and Ocean Div. WW1, Feb. 1979. ASCE.
17. HUDSPETH, R. T. and BORGMAN, L. E.: «Efficient FFT Simulation of Digital Time Sequences». Journal of the Engineering Mechanics Division. Vol. 105, No EMZ, April, 1979. ASCE.
  18. KAY, S. M. and MARPLE, S. L.: «Spectrum Analysis. A Modern Perspective». Procc. of the IEEE, Vol. 69, no 11, Nov. 1981 pp.1.380-1.419.
  19. LOSADA, M. A. y CORNIERO, M. A.: «Una Nueva Aproximación a la Función de Distribución de la Altura de Ola Máxima». R.O.P. Ene. 1982 pags. 871-878.
  20. MEDINA, J. R.: «Estudio del Modelo Estadístico-Espectral del Oleaje y su Relación con las Técnicas de Simulación Numérica. Análisis Espectral y Estadístico de Registros». Tesis ETSICCP-Valencia 1982.
  21. OTNES, R. K. and ENOCHSON, L.: «Digital Time Series Analysis». John Wiley. 1972.
  22. PAPOULIS, A.: «Sistemas Digitales y Analógicos. Transformadas de Fourier, Estimación espectral». Marcombo, S. A. 1978.
  23. PIERSON, W. J. and MOSKOWITZ, L.: «A Proposed Spectral from for Fully Developed Wind Seas Based on the Similarity Theory of S. A. Kitaigorodskii». Dep. of Meteorology and Oceanography. New York. Univ. Bronx, N. Y. 1964.
  24. RABINER, L. R. and GOLD, B.: «Theory and application of Digital Signal Processing». Rentice. Hall. 1975.
  25. RYE, M.: «Wave Group Formation Among». Coastal Engineering 1974 ASCE.
  26. WEBBER, N. B.: «A Programmable Irregular Wave Generator». Coastal Engineering 1974, ASCE.

**TABLA I. Influencia de la frecuencia de corte sobre los parámetros teóricos  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_v^2$ ,  $\sigma_a^2$ ,  $\epsilon$  y  $T$**

PMK ( $f_p = 0,0635$ Hz)									
$f_{min}$ Hz	0,125	0,200	0,250	0,333	0,400	0,500	1,00	2,00	4,00
$\sigma_x^2$ ( $m^2$ )	5,689	6,108	6,156	6,178	6,183	6,186	6,188	6,188	6,188
$\sigma_v^2$ ( $m/s$ ) <sup>2</sup>	1,327	1,697	1,788	1,857	1,884	1,907	1,936	1,944	1,945
$\sigma_a^2$ ( $m/s^2$ ) <sup>2</sup>	0,386	0,737	0,913	1,136	1,278	1,453	1,993	2,533	3,038
$\epsilon$ ( $\frac{-}{-}$ )	0,445	0,600	0,657	0,713	0,742	0,772	0,834	0,871	0,895
$\bar{T}$ (seg)	13,01	11,92	11,66	11,46	11,38	11,32	11,23	11,21	11,21

**TABLA II. Percentiles 20-50-80 del parámetro  $\bar{T}/\bar{T}_0$  respecto del intervalo temporal elegido para distintas duraciones**

$\bar{T}_0 = \sqrt{m_0/m_2}$						$m_n = \int_0^\infty f^n S(f) df$
$\Delta t$ (seg) N $\Delta t$ (seg)	1.000	0,500	0,250	0,125	$F_{max}$ (Hz)	$\bar{T}_0$ (seg)
1024		1,042	1,036	1,036		
		1,007	0,996	0,991		
		0,980	0,975	0,970	1	11,23
1024	1,065	1,040	1,040	1,040		
	1,017	1,006	0,999	0,999	0,5	11,32
	0,978	0,973	0,973	0,973		
2048	1,036	1,028	1,025			
	1,022	1,011	1,008			
	0,999	0,986	0,973		0,5	11,32
4096	1,043	1,028				
	1,022	1,011				
	1,009	0,994			0,5	11,32

TABLA III

Estimación de los valores de  $a_1$  y  $\sigma(a_1)$  para diferentes modelos de simulación.

$\bar{T} = \frac{N \Delta t}{n.^{\circ} \text{ de Olas}}$	$\bar{T}_o = \sqrt{m_o/m_2}$	$a_1 = \bar{T}/\bar{T}_o$	$M_o = N \Delta t \sqrt{m_2/m_o}$	
N .....	1024	2048	4096	8192
Mo.....	45,2	90,5	181,0	361,9
(0,35/ $\sqrt{M_o}$ ).....	(0,052)	(0,037)	(0,026)	(0,018)
FFT.....	1,004	1,007	1,009	1,010
	(0,052)	(0,036)	(0,023)	(0,019)
BORM1- 32.....	1,025	1,022	1,021	1,027
	(0,070)	(0,032)	(0,020)	(0,011)
64.....	1,037	1,030	1,029	1,017
	(0,050)	(0,030)	(0,027)	(0,017)
128.....	1,008	1,001	1,015	1,020
	(0,049)	(0,024)	(0,018)	(0,015)
256.....	0,991	1,000	1,005	1,003
	(0,041)	(0,027)	(0,024)	(0,021)
512.....	1,036	1,023	1,013	1,012
	(0,068)	(0,044)	(0,032)	(0,025)
BORM2- 32.....	0,905	0,909	0,890	
	(0,066)	(0,041)	(0,046)	
64.....	0,968	0,956	0,957	0,962
	(0,068)	(0,027)	(0,023)	(0,016)
128.....	0,983	0,975	0,983	0,991
	(0,048)	(0,036)	(0,023)	(0,015)
256.....	0,996	0,992	0,991	0,988
	(0,042)	(0,024)	(0,018)	(0,010)
512.....	1,040	1,020	1,009	1,012
	(0,070)	(0,038)	(0,026)	(0,020)
PMK (fp = 0,0635 Hz), $\Delta t = 0,5$ seg, $F_{max} = 0,5$ Hz, $c = 0,772$ , $\bar{T}_o = 11,3179$ seg.				
$a_1$ - Relación entre periodos medios simulados $\bar{T}$ y de referencia $\bar{T}_o$ .				



TABLA IV

Estimación de los valores de  $\bar{a}_2$  y  $\sigma(a_2)$  para diferentes modelos de simulación

$$H_m = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M H_i^2}, (H_m)_0 = 2 \sqrt{2 m_0}, a_2 = \frac{H_m}{(H_m)_0}$$

N .....	1024	2048	4096	8192
Mo.....	45,2	90,5	181,0	361,9
(0,185/ $\sqrt{M}$ ) .....	(0,028)	(0,019)	(0,014)	(0,010)
FFT .....	0,955	0,960	0,962	0,962
	(0,027)	(0,017)	(0,014)	(0,011)
BORM1- 32 .....	0,972	0,960	0,964	0,965
	(0,057)	(0,026)	(0,013)	(0,009)
64 .....	0,988	0,971	0,969	0,959
	(0,071)	(0,024)	(0,028)	(0,011)
128 .....	0,972	0,955	0,961	0,967
	(0,055)	(0,044)	(0,016)	(0,012)
256 .....	0,957	0,972	0,964	0,960
	(0,061)	(0,037)	(0,031)	(0,017)
512 .....	1,012	1,013	0,979	0,961
	(0,085)	(0,059)	(0,030)	(0,021)
BORM2- 32 .....	0,951	0,938	0,938	
	(0,053)	(0,030)	(0,028)	
64 .....	0,972	0,951	0,951	0,950
	(0,085)	(0,022)	(0,026)	(0,009)
128 .....	0,968	0,944	0,953	0,960
	(0,052)	(0,045)	(0,016)	(0,011)
256 .....	0,962	0,974	0,964	0,957
	(0,055)	(0,034)	(0,029)	(0,012)
512 .....	1,013	1,011	0,977	0,961
	(0,084)	(0,056)	(0,026)	(0,021)

$a_2$  - Relación entre alturas de ola media cuadrática simulada  $H_m$  y de referencia  $(H_m)_0$ .

**TABLA V**  
Estimación de los valores de  $\bar{a}_3$  y  $\sigma(a_3)$

$H_{0,5}$ - mediana de $\{H_i\}$ , $(H_{0,5})_o = 2 \sqrt{2 m_o} \sqrt{-\ln(0,5)}$ , $a_3 = \frac{H_{0,5}}{(H_{0,5})_o}$				
N .....	1024	2048	4096	8192
Mo.....	45,2	90,5	181,0	361,9
(0,64/ $\sqrt{M}$ ).....	(0,095)	(0,067)	(0,048)	(0,034)
FFT.....	0,946	0,989	0,982	0,995
	(0,091)	(0,072)	(0,038)	(0,039)
BORM1- 32.....	0,958	0,963	0,980	0,999
	(0,130)	(0,056)	(0,051)	(0,029)
64.....	0,983	1,004	0,999	0,984
	(0,097)	(0,055)	(0,060)	(0,034)
128.....	0,977	0,982	1,007	1,011
	(0,097)	(0,068)	(0,038)	(0,020)
256.....	0,936	0,994	0,989	0,983
	(0,106)	(0,058)	(0,046)	(0,041)
512.....	1,048	1,026	1,000	0,997
	(0,176)	(0,099)	(0,068)	(0,025)
BORM2- 32.....	0,932	0,931	0,931	
	(0,125)	(0,068)	(0,072)	
64.....	0,975	0,970	0,973	0,977
	(0,090)	(0,065)	(0,068)	(0,035)
128.....	0,977	0,970	0,992	1,004
	(0,090)	(0,067)	(0,041)	(0,022)
256.....	0,951	0,989	0,990	0,972
	(0,088)	(0,098)	(0,044)	(0,031)
512.....	1,048	1,016	0,999	0,995
	(0,164)	(0,096)	(0,056)	(0,025)

$a_3$  - Relación entre altura de ola mediana simulada  $H_{0,5}$  y de referencia  $(H_{0,5})_o$ .

TABLA VI

Estimación de valores  $\bar{a}_4$  y  $\sigma(a_4)$  para diferentes modelos de simulación

$H_{m\grave{a}x}$  - Altura de ola máxima de registro,  $(\overline{H_{m\grave{a}x}}, \dot{M}_o)_o = 2 \sqrt{2 m_o} \left( \sqrt{\ln \dot{M}_o} + \frac{\gamma}{2 \sqrt{\ln \dot{M}_o}} \right)$

$\sigma(H_{m\grave{a}x}, \dot{M}_o) = \frac{\pi}{2 \sqrt{6 \ln \dot{M}_o}} 2 \sqrt{2 m_o}, a_4 = \frac{H_{m\grave{a}x}}{(\overline{H_{m\grave{a}x}}, \dot{M}_o)_o} \quad \gamma = 0,5772...$

N .....	1024	2048	4096	8192
$\dot{M}_o$ .....	45,2	90,5	181,0	361,9
$(\overline{H_{m\grave{a}x}}, \dot{M}_o)_o$ .....	14,77	15,89	16,93	17,91
$\sigma (\overline{H_{m\grave{a}x}}, \dot{M}_o)_o$ .....	(0,156)	(0,134)	(0,117)	(0,104)
$\frac{\sigma (\overline{H_{m\grave{a}x}}, \dot{M}_o)_o}{(\overline{H_{m\grave{a}x}}, \dot{M}_o)_o}$				
FFT .....	0,946 (0,089)	0,905 (0,072)	0,875 (0,074)	0,888 (0,052)
BORM1- 32 .....	1,026 (0,161)	0,965 (0,137)	0,998 (0,084)	0,888 (0,073)
64 .....	0,193 (0,110)	0,882 (0,094)	0,892 (0,067)	0,915 (0,054)
128 .....	0,935 (0,133)	0,928 (0,075)	0,903 (0,079)	0,883 (0,054)
256 .....	0,917 (0,064)	0,885 (0,053)	0,876 (0,062)	0,888 (0,059)
512 .....	0,940 (0,108)	0,963 (0,111)	0,929 (0,102)	0,937 (0,081)
BORM2- 32 .....	1,034 (0,155)	0,975 (0,121)	0,958 (0,081)	
64 .....	0,913 (0,096)	0,881 (0,071)	0,897 (0,071)	0,894 (0,057)
128 .....	0,942 (0,116)	0,928 (0,091)	0,892 (0,074)	0,889 (0,051)
256 .....	0,916 (0,059)	0,889 (0,051)	0,867 (0,055)	0,874 (0,058)
512 .....	0,942 (0,111)	0,959 (0,108)	0,930 (0,100)	0,941 (0,076)

$a_4$  - Relación entre altura de ola máxima de registro  $H_{m\grave{a}x}$  y la máxima media de referencia.

TABLAS VII-VIII-IX

Estimación de los valores de  $\bar{a}'_5 - \sigma(a'_5)$ ,  $a''_5 - \sigma(a''_5)$  y  $\bar{a}_5 - \sigma(a''_5)$ .

$$T = \frac{N \Delta t}{n.º \text{ olas}}, \bar{T}_o = \sqrt{m_o/m_2}, a'_5 = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_o}$$

$$H_m = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M H_{bi}^2 (H_{ma})_o} = 2 \sqrt{2m_o}, a''_5 = \frac{H_m}{(H_m)_o}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}'_5 \\ \sigma(a'_5) \\ \bar{a}''_5 \\ \sigma(a''_5) \\ \bar{a}_5 \\ \sigma(a''_5) \end{array} \right\}$$

$$H_{0,5} - \text{mediana de } \{H_i\}, (H_{0,5})_o = 2 \sqrt{2m_o} \sqrt{-\ln(0,5)}, a'''_5 = \frac{H_{0,5}}{(H_{0,5})_o}$$

— Espectro PMK con  $f_{pico} = 0,0635$  Hz.

Espectro FMR con $\nu_{\text{pico}} = 0,0635 \text{ Hz}$ .				1024	2048	4096	8192	
N	$\varepsilon$ (-)	$F_{\text{máx}}$ (Hz)	$\Delta t$ (seg)	$(\bar{T})_o$ (seg)				
	0,548	0,16	1,50	12,22	1,000 (0,031)	1,020 (0,021)	1,007 (0,008)	1,006 (0,010)
					0,942 (0,017)	0,952 (0,010)	0,946 (0,004)	0,945 (0,004)
					0,934 (0,064)	0,994 (0,021)	0,988 (0,024)	0,969 (0,016)
0,657	0,250	1,00	11,66		1,019 (0,034)	1,010 (0,024)	1,015 (0,018)	1,012 (0,015)
					0,959 (0,016)	0,956 (0,014)	0,958 (0,010)	0,957 (0,008)
					0,996 (0,072)	0,986 (0,031)	0,989 (0,034)	0,981 (0,027)
0,714	0,333	0,75	11,46		1,019 (0,024)	0,995 (0,030)	1,020 (0,022)	1,004 (0,010)
					0,963 (0,014)	0,950 (0,017)	0,964 (0,011)	0,956 (0,005)
					0,974 (0,060)	0,960 (0,067)	1,003 (0,027)	0,987 (0,022)
0,772	0,500	0,50	11,32		1,004 (0,052)	1,007 (0,036)	1,009 (0,023)	1,010 (0,019)
					0,995 (0,027)	0,960 (0,017)	0,962 (0,014)	0,962 (0,011)

$a'_5, a''_5, a'''_5$  - Relaciones entre períodos  $\bar{T}$ , alturas media cuadrática  $H_m$  y mediana  $H_{0,5}$  de olas simuladas y de referencia.

TABLA X

Estimación de los valores  $\bar{a}_6$  y  $\sigma(\bar{a}_6)$  para diferentes supuestos y duraciones de simulación FFT y espectro PMK ( $f_p = 0,0655$  Hz)

$$H_{\max} - \text{Altura de ola máxima de registro, } (\overline{H_{\max}}, \dot{M}_0) = 2 \sqrt{2 m_0} \left( \sqrt{\ln \dot{M}_0} + \frac{\gamma}{2 \sqrt{\ln \dot{M}_0}} \right)$$

$$\sigma_r(H_{\max}, \dot{M}_0) = \frac{\pi}{2 \sqrt{6 \ln \dot{M}_0}} \frac{2 \sqrt{2 m_0}}{(\overline{H_{\max}}, \dot{M}_0)}, \bar{a}_6 = \frac{H_{\max}}{(\overline{H_{\max}}, \dot{M}_0)_0}$$

$(\overline{H_{\max}}, \dot{M}_0)$ $\sigma_r(H_{\max}, \dot{M}_0)$ (mts)	$(\bar{T})_0$ (seg)	$\Delta t$	$F_{\max}$	N N $\Delta t$ (seg)	$\dot{M}_0$ (-)	1024	2048	4096	8192
19,02 (0,089)	12,22	1,50	0,167	12288	1005,6				0,962 (0,074)
18,95 (0,091)	11,91	1,25	0,200	10240	859,7				0,961 (0,080)
18,79 (0,094)	11,66	1,00	0,250	8192	702,6				0,912 (0,076)
18,44 (0,098)	11,46	0,75	0,333		536,1				0,913 (0,099)
18,12 (0,099)	12,22	1,50	0,167	6144	502,8			0,900 (0,102)	
17,91 (0,104)	11,32	0,50	0,500		361,9				0,888 (0,052)
17,83 (0,104)	11,66	1,00	0,250	4096	351,3			0,883 (0,055)	
17,48 (0,109)	11,46	0,75	0,333		268,0			0,887 (0,064)	
17,18 (0,110)	12,22	1,50	0,167	3072	251,4		0,880 (0,059)		
16,93 (0,117)	11,32	0,50	0,500		181,0			0,875 (0,074)	
16,84 (0,118)	11,66	1,00	0,250	2048	175,6		0,866 (0,077)		
16,48 (0,124)	11,46	0,75	0,333		134,0		0,929 (0,076)		
16,18 (0,125)	12,22	1,50	0,167	1536	125,7	0,934 (0,063)			
15,89 (0,134)	11,32	0,50	0,500		90,5		0,905 (0,072)		
15,80 (0,135)	11,66	1,00	0,250	1024	87,8	0,899 (0,073)			
15,41 (0,143)	11,46	0,75	0,333	768	67,0	0,914 (0,061)			
14,77 (0,156)	11,32	0,50	0,500	512	45,2	0,946 (0,089)			

$\bar{a}_6$  - Relación entre altura de ola máxima simulada  $H_{\max}$  y media de referencia  $\overline{H_{\max}}, \dot{M}_0$ .