REVISTA DE OBRAS PUBLICAS, Noviembre 1984. Págs. 855 a 858

Obtención de las líneas isobaras en un problema de filtración, a través de un medio poroso, mediante la resolución de un problema de contorno equivalente (*)

Por EDUARDO SALETE DIAZ
Doctor Ingeniero de Caminos,
Licenciado en Ciencias Matemáticas
CARLOS ARIAS CUESTA
Ingeniero Industrial

Se presenta un método para el cálculo de la distribución de presiones intersticiales debidas a la filtración a través de presas de materiales sueltos, necesaria para el cálculo de la estabilidad de taludes en las distintas fases de construcción y explotación de aquéllas.

INTRODUCCION

En el diseño y comprobación de presas de materiales sueltos, uno de los principales problemas que encuentra el ingeniero consiste en el estudio de la estabilidad de los taludes en las hipótesis de embalse lleno, desembalse rápido y distintas fases de la construcción.

En los dos primeros casos es necesario conocer la distribución de presiones intersticiales debida a la filtración a través de la presa.

Un método usual para conocer esta distribución, o red de líneas isobaras, consiste en calcular el potencial en cada punto (normalmente con un programa de ordenador que resuelva la ecuación de Laplace, con unas condiciones de contorno fijadas, lo que supone implícitamente conocer *a priori* la línea de saturación) y, posteriormente, obtener de forma manual la presión intersticial en cada punto, obteniéndose una red a la que se ajustan a estima las líneas isobaras.

El objeto de este trabajo es dar un procedimiento que evite la intervención manual citada, permitiendo obtener de forma prácticamente simultánea los valores del potencial hidráulico y la presión intersticial en cada punto, mediante la resolución de un problema equivalente que mantenga la geometría y coeficientes de permeabilidad del problema inicial.

Es, en definitiva, añadir un nuevo «estado de carga» al problema inicial, por lo que no supone un aumento de coste notable sobre el total de la resolución del problema en un ordenador.

EXPOSICION DEL METODO

La ecuación que rige el fenómeno de la filtración a través de un medio poroso tiene la conocida expresión:

$$k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \qquad [1]$$

En donde k_x y k_y son los coeficientes de permeabilidad, y H el potencial hidráulico en cada punto.

Esta ecuación se completa con unas condiciones de contorno que pueden ser de tipo Dirichlecht (potencial hidráulico H fijado en un punto), Neumann (caudal de agua nulo o, en general, conocido) o Mixtas (en que se combinan condiciones de los dos tipos anteriores en zonas disjuntas del contorno).

Despreciando el término cinético $V^2/2$ g. por ser su magnitud totalmente inapreciable, el po-

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de enero de 1985.

Los autores agradecen a don Alfonso Alvarez (Catedrático de Presas de la Escuela de Madrid) su labor de corrección y el impulso que les dio para realizar este artículo.

tencial hidráulico en un punto del medio poroso, tiene por expresión:

$$H = y + \frac{P}{\gamma} \qquad [2]$$

siendo y la cota del punto respecto de un determinado sistema de referencia y P/γ la presión intersticial.

Representando por Δ el operador:

$$\Delta = k_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad [3]$$

de la ecuación [1] se deduce que:

$$\Delta H = \Delta y + \Delta\left(\frac{P}{\gamma}\right) = 0 \qquad [4]$$

y por tanto:

$$\Delta\left(\frac{P}{\gamma}\right) = 0$$

ya que evidentemente es $\Delta y = 0$.

Esta conclusión permite asegurar que P/γ es solución, en el medio poroso a través del cual se realiza la filtración, de un problema de contorno, quedando por determinar precisamente las condiciones de contorno que debe de satisfacer.

Para ello bastará partir a la inversa; es decir, de la relación P/γ y H y de las condiciones de contorno de esta última magnitud, para hallar las que debe de verificar P/γ, pues se sabe que el problema sometido a una combinación de condiciones de tipos Dirichlecht y Neumann tiene solución única (siempre que haya, al menos en un punto, una condición de tipo Dirichlecht).

Así pues, considerando como ejemplo la presa esquematizada en la figura 1, se tiene:

a) Recinto de definición del problema:
La zona limitada por los taludes de la presa, el substrato impermeable y la línea de saturación que se supone conocida (Zona A, B, C, D).

b) Condiciones de contorno para la obtención del potencial hidráulico:

AB : H = h constante

BC : $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ (filtración nula a su través) (*)

CD : $H = y \left(\text{pues } \frac{P}{\gamma} = 0\right)$

AD : $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$

(*) Con la notación $\frac{\partial H}{\partial n}$ se expresa la derivada direccional del potencial hidráulico, en un punto de contorno, en la dirección de la normal exterior a dicho punto.

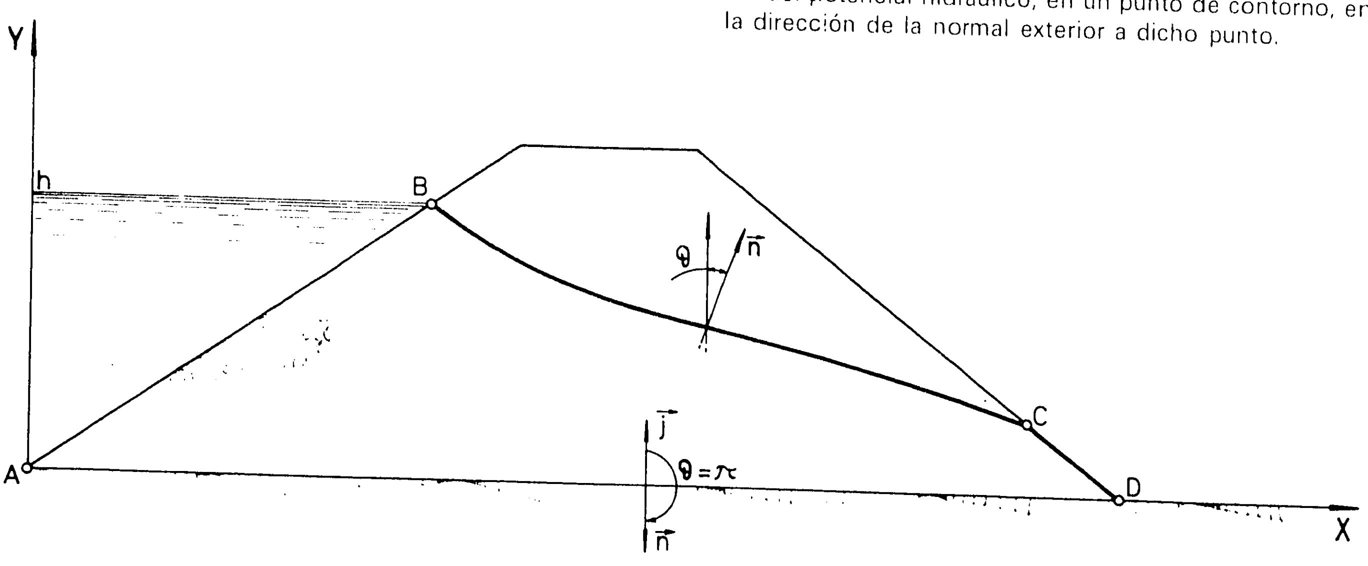


Figura 1.

c) Condiciones de contorno para la obtención de la presión intersticial.

De la relación [2]:

$$\frac{P}{\gamma} = H - y$$

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{\gamma}\right)}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial n} - \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial n} - \cos\theta$$

pues $\frac{y}{n} = \bar{n} \cdot \text{grad } y = \bar{n} \cdot j = \cos\theta$

En consecuencia:

En AB : $\frac{P}{\gamma} = h - y$

BC : $\frac{\partial\left(\frac{P}{\gamma}\right)}{\partial n} = \cos\theta$

CD : $\frac{P}{\gamma} = 0$

AD : $\frac{\partial\left(\frac{P}{\gamma}\right)}{\partial n} = 1$ (pues $\cos\theta = -1$ en esta zona)

El problema equivalente tienen el mismo tipo de condiciones de contorno que el inicial y la existencia y unicidad de su solución están garantizadas.

EJEMPLO

A continuación se expone un ejemplo de obtención de las líneas equipotenciales e isobaras de un problema de filtración a través de una presa homogénea.

Es importante destacar en este ejemplo que, habiendo supuesto materiales distintos para la presa y para el cimiento, la solución que se obtiene no es de clase C^{∞}, y, por ello, a la hora de calcular el estado auxiliar, cuyo resultado es la función $f(x, y) = y$, es necesario dar valores de contorno tipo Dirichlecht en la superficie frontera de los dos materiales.

El cálculo se ha llevado a cabo por el método de elementos finitos, utilizando el programa ANSYS a través de una analogía térmica.

Además, de las líneas equipotenciales e isobaras se adjunta la solución del estado auxiliar $f(x, y) = y$, que sirve como comprobación.

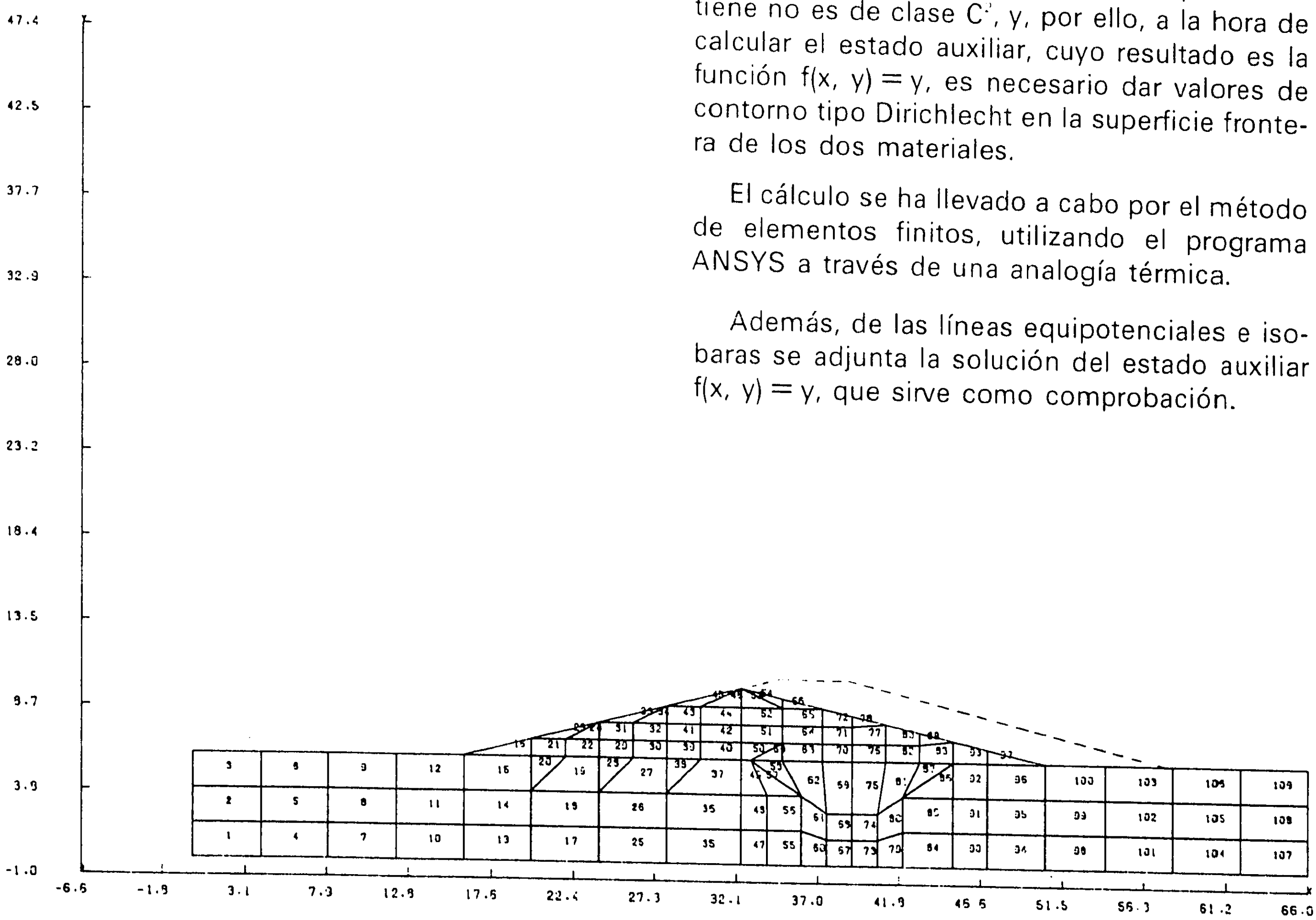


Fig. 2.—Discretización en elementos finitos.

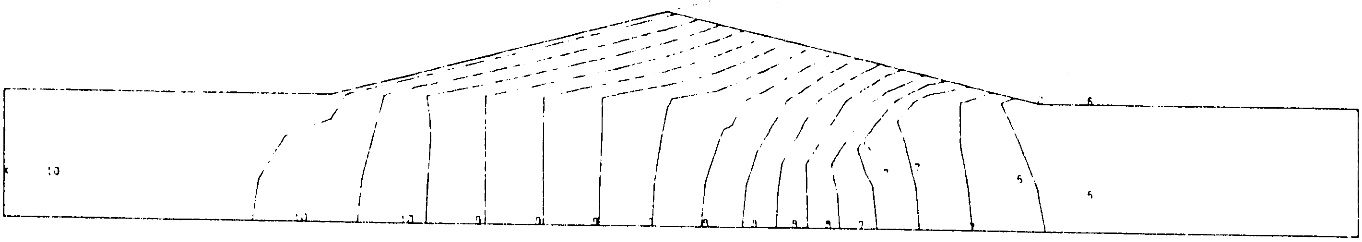


Fig. 3.—Líneas equipotenciales.

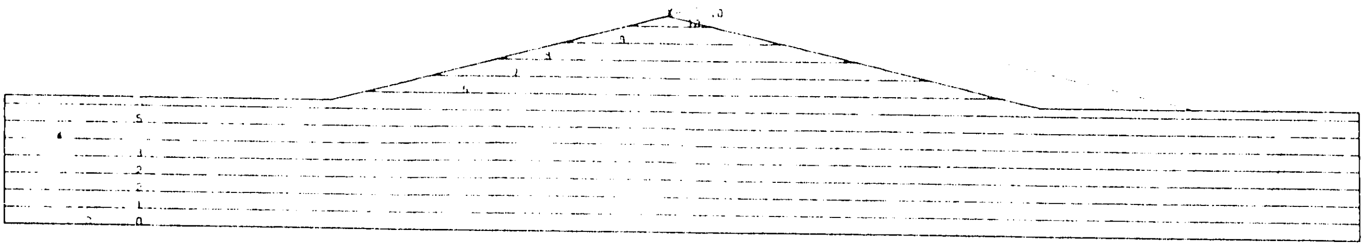


Fig. 4.—Estado auxiliar f (x, y) = y.

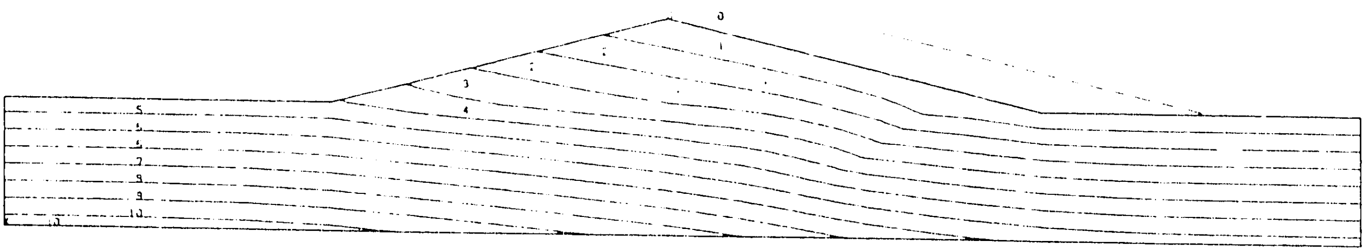
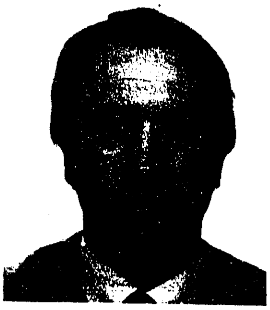


Fig. 5.—Líneas isobaras.

CONCLUSION

El método expuesto es sencillo de mecanizar y emplear y permite el cálculo de la red de líneas isobaras con muy poco coste adicional, ya que se trata simplemente de un nuevo estado de carga para el mismo problema, y no precisa por ello la inversión de una nueva matríz.

Don Eduardo Salete Díaz



Es doctor ingeniero de Caminos y licenciado en Ciencias Matemáticas. Desde 1974 realiza su labor docente en la ETS de Ingenieros de Caminos, en donde es profesor adjunto numerario y desde 1976 comparte esta actividad con colaboraciones en diversas empresas de ingeniería.

Don Carlos Arias Cuesta

Ingeniero Industrial por la Escuela de Madrid (1965).

Actualmente realiza su trabajo en la empresa INITEC, en la División de Informática, llevando a cabo el desarrollo de programas y aplicaciones técnicas.