

# Los caracoles degenerados<sup>(\*)</sup>

## (Notas sobre chimeneas de equilibrio)

Por LUIS TORRENT

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

*La ecuación que rige las oscilaciones de masa en las chimeneas de equilibrio de centrales hidroeléctricas, representa una familia de curvas de tipo espiral a cuyo estudio se dedica el siguiente artículo, incluyendo conclusiones relativas a acotaciones de la oscilación de masa en maniobras simples, límites de resonancia en maniobras compuestas, período del movimiento oscilatorio, amortiguación de pequeñas oscilaciones, caudal crítico de asintotismo, etc.*

Hace muchos, muchos años, me propusieron un «problema capcioso» en el que se pedía averiguar cuántos días tardaba un caracol en escalar una torre de 20 metros de altura, si por el día subía 5 metros y por la noche bajaba 4. La solución aritmética era elemental; pero como en el enunciado no se explicaban las causas del extraño proceder del caracol, quedaban planteados unos problemas de comportamiento del bicho, realmente difíciles de resolver: ¿Por qué un animalito que vive tan a gusto a ras del suelo abandona su placentero entorno y se pone a escalar el muro inhóspito de una torre? ¿Qué motivaciones le llevan a renunciar, cada noche, al 80 por 100 del baboso camino recorrido el día anterior? No encontrando respuestas satisfactorias a estos enigmas, mi pereza mental se avino a concluir que el protagonista del problema era un caracol degenerado.

Lustros después, al estudiar las oscilaciones de masa en instalaciones hidroeléctricas, utilicé unos diagramas de niveles-velocidades del agua en la galería de presión, con forma de espiral, para calcular resonancias entre ascensos y descensos del plano de agua en la chimenea de equilibrio. El recuerdo del caracol que subía y bajaba por la torre del viejo problema, era inevitable. Por eso, al escribir estas notas que, en gran parte, versan sobre ciertas espirales irregulares, no he podido resistirme a encabezarlas con el título de «Los caracoles degenerados», lo que quizá contribuya, aunque sea por breve tiempo, a atraer la atención del lector.

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de noviembre de 1985.

A este mismo objetivo de engatusar y retener a la parroquia obedecen las rebuscadas subtítulos de los puntos del texto que, en algún caso, llegan a rozar los límites del buen gusto (aunque es evidente que no lo exigía el guión).

### 1. ASINTOTISMO UMBILICAL

De las ecuaciones dinámica y de continuidad que se establecen para el estudio de las oscilaciones de masa en las chimeneas de equilibrio, por eliminación del tiempo, se obtiene la ecuación diferencial.

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{Lf}{fg} \frac{a - \omega}{Z - p\omega \quad |\omega| - p_1 (\omega - a) \quad |\omega - a|} \quad [1]$$

Z = Cota del agua en la chimenea referida al nivel estático, que se supone constante durante el proceso (m).

$\omega$  = Velocidad del agua en el conducto a presión situado entre la chimenea y el embalse (m/seg).

a = Velocidad correspondiente al caudal de régimen (m/seg).

L = Longitud del conducto a presión (m).

f = Sección del conducto (m<sup>2</sup>).

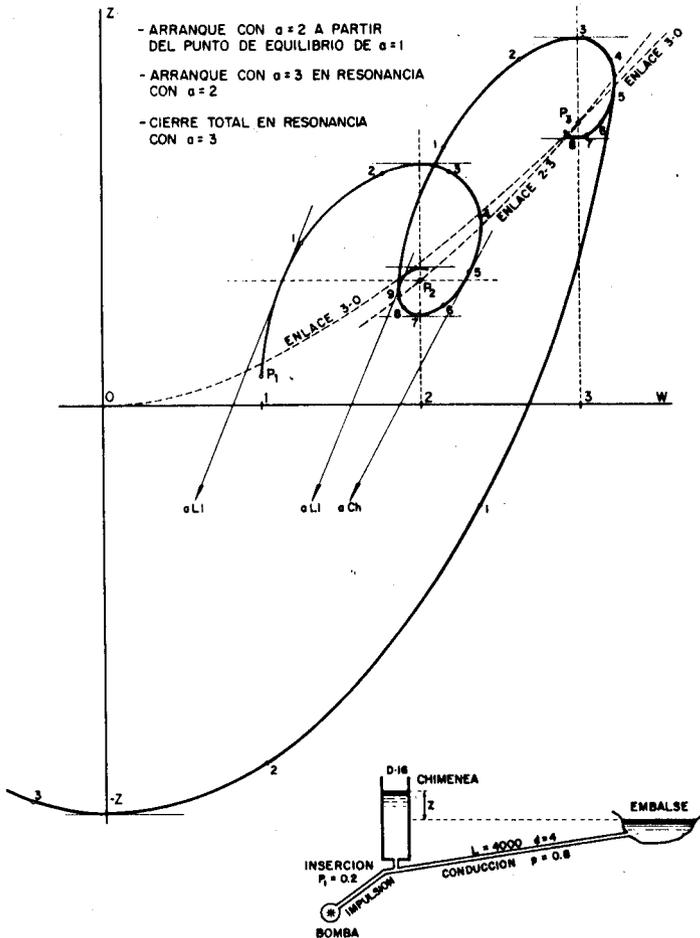
F = Sección horizontal de la chimenea, que puede ser variable (m<sup>2</sup>).

g = Aceleración de la gravedad (m/seg<sup>2</sup>).

p = Pérdida de carga en la conducción para  $\omega = 1$ .

$p_1$  = Pérdida de carga en la inserción de la chimenea para  $\omega - a = 1$ .

ESPIRALES DE OSCILACION DE MASA  
(MANIOBRAS INSTANTANEAS SIN TENER EN CUENTA  
LA CARACTERISCA DE LAS BOMBAS)



Suponiendo que las maniobras son instantáneas y que son constantes los coeficientes de pérdidas, la ecuación representa, para cada valor de  $a$ , una familia de curvas de tipo espiral que se enroscan asintóticamente al punto de equilibrio dinámico  $P(a, pa^2)$  correspondiente al caudal de régimen de la maniobra ejecutada.

Las espirales de una misma familia no tienen más puntos comunes que el de régimen, en cuya abscisa están situados los máximos y mínimos de oscilación.

La velocidad del agua en la conducción alcanza sus valores extremos cuando:

$$Z = p\omega |\omega| + p_1(\omega - a) |\omega - a| \quad [2]$$

El enlace entre maniobras de parada y arranque, de arranques consecutivos o de distinto signo (bombeo y turbinación) que produce ma-

yores elevaciones o descensos en la chimenea, se determina por la condición de tangencia entre las espirales de ambas maniobras. Los puntos de tangencia «envolventes» se encuentran en la parábola.

$$Z = p\omega |\omega| - p_1(\omega - a) (\omega - b) \quad [3]$$

Siendo  $b$  la velocidad de régimen de la segunda maniobra.

Si se adopta  $\omega > 0$  para la circulación desde la chimenea al embalse, el punto de equilibrio  $P$  queda en el primer cuadrante para los casos de bombeo, mientras que las maniobras de turbinación tendrán sus puntos de régimen en el tercero. Las espirales de todas las maniobras serán dextrogiras, con su concavidad dirigida hacia  $P$ . A estas curvas las llamaremos «normales», ya que, como luego se verá, también puede haber pseudo-espirales, con tramos levogiros.

Para simplificar las notaciones, en estas notas designaremos por  $K$  al factor constante, determinado por las características de la instalación.

$$K = \frac{Lf}{gF}$$

## 2. EL PUNTO Ñ

En los puntos de intersección de una familia de curvas normales con su nivel de equilibrio (o con su simétrico), la ecuación [1] se simplifica, resultando:

$$Z = pa^2 \quad \omega > a \dots \frac{dz}{d\omega} = \frac{K}{(p + p_1)\omega + (p - p_1)a}$$

$$0 < \omega < a \dots \frac{dz}{d\omega} = \frac{K}{(p - p_1)\omega + (p + p_1)a}$$

$$Z + pa^2 = 0 \quad \omega < 0 \dots \frac{dz}{d\omega} = \frac{K}{(p + p_1)\omega + (p - p_1)a}$$

$$Z + pa^2 = 0 \quad \omega < 0 \dots \frac{dz}{d\omega} = \frac{K}{(p + p_1)\omega + (p - p_1)a}$$

Cada una de estas ecuaciones define un haz de rectas cuyos respectivos puntos fijos hemos designado con las castizas letras  $Ch$ ,  $L1$  y  $\tilde{N}$  (colmando con ello un deseo que proviene de la época de preparación para el ingreso en la Escuela).

Las coordenadas de estos puntos son:

$$CH \dots \omega = -\frac{p - p_1}{p + p_1} a \quad Z = pa^2 - \frac{K}{p + p_1}$$

$$L1 \dots \omega = -\frac{p + p_1}{p - p_1} a \quad Z = pa^2 - \frac{K}{p - p_1}$$

$$\tilde{N} \dots \omega = -\frac{p - p_1}{p + p_1} a \quad Z = \frac{K}{p + p_1} - pa^2$$

Los dos primeros están alineados con el equilibrio dinámico  $P$ . El punto  $\tilde{N}$  es simétrico de  $Ch$ , respecto a  $Z = 0$ . Todos ellos pueden ser útiles como auxiliares gráficos para el trazado de espirales. Además, el punto  $\tilde{N}$ , al estar situado en la misma zona del plano que su correspondiente segmento de espiral, permite establecer un límite de las curvas normales, pues no podrán pasar por él sin cambiar el signo de su curvatura.

La ecuación de la tangente en  $\tilde{N}$  (recta  $\tilde{n}$ )

$$Z = 2pa\omega + \frac{K + (p - 3p_1) pa^2}{p + p_1}$$

Esta recta será un límite territorial para todas las espirales normales definidas por su velocidad de régimen  $a$ , y determina en la abscisa  $\omega = a$  una sobreelevación  $\Delta$  por encima del punto de equilibrio.

$$\Delta = \frac{K + 2(p - p_1) pa^2}{p + p_1}$$

La acotación es muy amplia; pero señala que, en una determinada instalación, existe un límite de posibles sobreelevaciones, irrebalsable por mucho que se amplifique la oscilación de masas mediante resonancias sucesivas (\*).

\* Algo se rebaja la acotación si se considera la tangente en la intersección del eje  $\omega = 0$  con la recta  $\tilde{n}$ .

### 3. LOS CARACOLES SE DESMADRAN

Las zonas del plano  $(\omega, Z)$  donde las espirales de una familia  $a$  dejan de tener su concavidad dirigida hacia su punto de equilibrio  $P$ , es decir, dejan de ser espirales normales, se determinan mediante la derivada segunda

$$\frac{d^2Z}{d\omega^2} = \frac{K(a - \omega) \frac{d\omega}{dz} + 2(pa\omega - z) - (a - \omega) \frac{dZ}{d\omega}}{[Z - p\omega^2 + p_1(a - \omega)^2]^2}$$

cuya igualación a cero representa una curva

$$Z = pa\omega \pm (a - \omega) \sqrt{[p|\omega| + p_1|a - \omega|]^2 - K} \quad [4]$$

lugar de los posibles puntos de inflexión de las espirales de la familia.

Supuesto, como es habitual,  $p > p_1$ , los puntos de inflexión corresponden a valores de la velocidad cuyos límites son:

para  $\omega < 0 \dots$

$$\omega_1^I \leq \frac{p_1 a - \sqrt{K}}{p + p_1} \quad Z_1^I = pa\omega_1^I$$

para  $0 < \omega < a \dots$

$$\omega_1^{II} \geq \frac{\sqrt{K} - p_1 a}{p - p_1} \quad Z_1^{II} = pa\omega_1^{II}$$

para  $\omega > a \dots$

$$\omega_1^{III} \geq \frac{p_1 a + \sqrt{K}}{p + p_1} \quad Z_1^{III} = pa\omega_1^{III}$$

En el caso  $0 < \omega < a$ , se tiene que verificar

$$p^2 a^2 > K \quad [5]$$

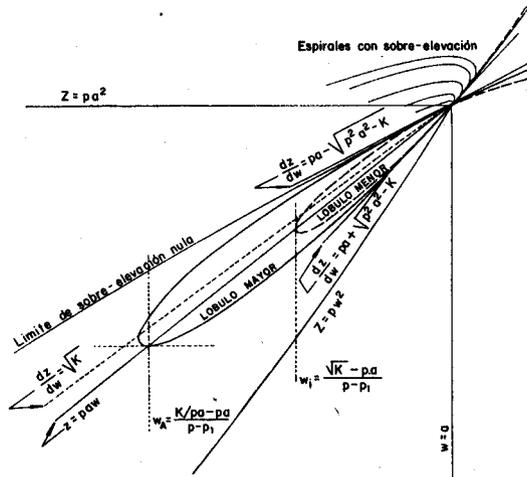
### 4. ASCENSOS QUE NO LLEGAN

Si se cumple la condición (5), la curva de los puntos de inflexión presenta un lóbulo dentro

# LOS CARACOLES DEGENERADOS

## ENTORNO DEL PUNTO DE EQUILIBRIO DINAMICO

$K=56 \quad p=2 \quad p_1=1 \quad a=4$



del intervalo  $0 < \pi < a$ , entre  $\omega''$  y el punto de equilibrio P. Las espirales que arranquen de puntos situados bajo ese lóbulo, no producirán sobre-elevaciones sino que ascenderán asintóticamente hacia el nivel dinámico.

También de (5) resulta  $\omega'' < a$ ; por consiguiente, la curva de los puntos de inflexión divide al semiplano  $\omega > a$  en tres recintos que se juntan en P. Las espirales que hayan sobrepasado el nivel de equilibrio antes de alcanzar el caudal de régimen, no pueden descender por debajo de dicho nivel para un caudal mayor sin cortar a la curva de inflexiones, y se cerrarán asintóticamente en el punto P de equilibrio dinámico.

La condición (5) es, pues, necesaria para que no se produzcan sobre-elevaciones respecto al nivel de régimen; pero no es suficiente, pues puede haber curvas de la familia que sobrepasen dicho nivel. Estas últimas descienden asintóticamente al punto de equilibrio, sin posterior oscilación, si se cumple la citada condición que, en este caso, sí es suficiente.

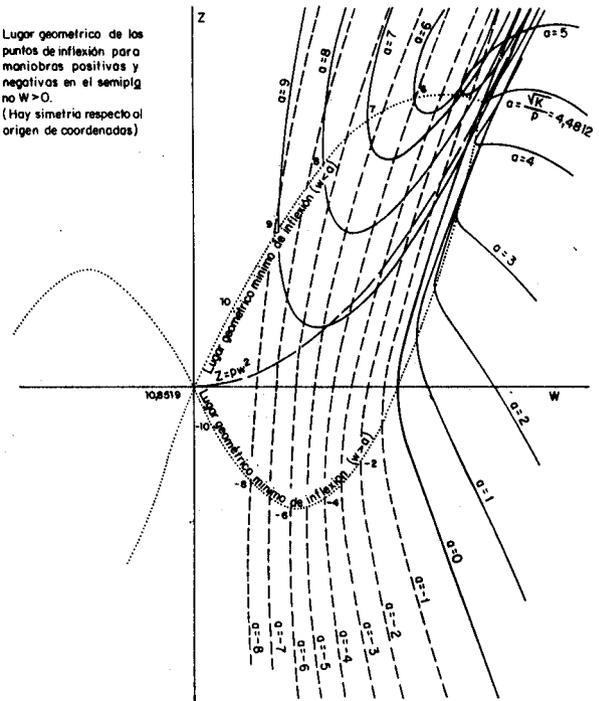
## 5. MANIOBRAS BAJO CUERDA

Las espirales de oscilación que arrancan desde el equilibrio estático ( $\omega = 0, Z = 0$ ), tienen una tangente inicial

$$\left( \frac{dZ}{d\omega} \right)_{0,0} = \frac{K}{p_1 a}$$

## CHIMENEA DE ALTOMIRA

Lugar geométrico de los puntos de inflexión para maniobras positivas y negativas en el semiplano  $\omega > 0$ . (Hay simetría respecto al origen de coordenadas)



Si esta recta tiene menor pendiente que la cuerda  $Z = pa\omega$ , toda la curva quedará por debajo de ella y sólo podrá alcanzar el punto de equilibrio dinámico mediante una inflexión, incompatible con la oscilación en torno a ese punto.

La condición es

$$a^2 > \frac{K}{pp_1}$$

más exigente que la (5).

## 6. EL LOBULO FERROZ

Entre ambas condiciones, es decir si  $\frac{K}{p^2} < a^2 < \frac{K}{pp_1}$ , aunque la espiral haya sobrepasado la cuerda  $Z = pa\omega$ , puede no haber sobre-elevación ni oscilación si accede a un punto tal que su tangente en él pase por P. El lugar geométrico de ese punto viene definido por la ecuación.

$$\frac{Z - pa^2}{a - \omega} = K \frac{a - \omega}{Z - p\omega^2 + p_1 (a - \omega)^2}$$

que, en forma explícita, resulta:

$$Z = p\omega + \frac{p - p_i}{2} (a - \omega)^2 \pm \quad [6]$$

$$\pm (a - \omega) \sqrt{\left[ \frac{p(a + \omega) + p_i(a - \omega)}{2} \right]^2 - K}$$

Dentro del intervalo  $0 < \omega < a$ , la curva (6) presenta un «lóbulo mayor» que envuelve al de los puntos de inflexión.

### 7. LOBULOS CON PENDIENTES

La ecuación (4) puede deducirse del análisis de las líneas isoclinas de cada maniobra

$$Z = p\omega^2 - p_i (a - \omega)^2 + \frac{K}{\lambda} (a - \omega) \quad [7]$$

parábolas que unen los puntos de igual pendiente  $\lambda$  de la familia de espirales definidas por  $a$  (\*).

El lugar de los puntos cuya tangente a la parábola isoclina es igual al parámetro que la define, resulta

$$\omega = \frac{\lambda^2 + K - 2p_i a \lambda}{2(p - p_i) \lambda} \quad [8]$$

$$Z = \frac{\lambda^4 - K^2 + 4p a \lambda (K - p_i a \lambda)}{4(p - p_i) \lambda^2}$$

que corresponde a la ecuación de los puntos de inflexión (lóbulo menor).

### 8. A CAMARA LENTA

La condición (5) no exige dimensiones excepcionales en las instalaciones. En el caso de chimeneas con cámaras, probablemente no se verificará en el «pozo», pero sí puede darse en la cámara superior —caso de bombeo— o en la inferior, si se trata de turbinación.

Expresando las pérdidas de carga de la galería de presión mediante fórmulas del tipo de

\* Vid. «Cálculo de chimeneas de equilibrio» por Miguel Delgado. E.T.S. de I.C.C.P.

$\omega = B d^{0.5}$ , la condición queda

$$p a^2 > \frac{\pi B^2 d^{2+2b}}{4gF}$$

Llamando  $C$  al coeficiente de seguridad respecto a la sección mínima que asegura el amortiguamiento de las oscilaciones pequeñas (sección de Thoma,  $F_{TH}$ ) y  $H_o$  al Salto neto mínimo, se tiene

$$F = C x F_{TH} = C x \frac{\pi B^2 d^{2+2b}}{8gH_o}$$

de donde

$$p a^2 > \frac{2H_o}{C}$$

Si, como es frecuente, se dimensiona el pozo de la chimenea con  $C = 2$ , la condición para que no se produzca en él oscilación equivaldría a suponer que las pérdidas de carga de la conducción son iguales al salto mínimo, siendo así que la estabilidad de regulación exige  $H_o > 2p a^2$ . Pero en las cámaras, el valor de  $C$  suele ser notablemente mayor, por lo que no es difícil que se cumpla la condición (5), como también puede ocurrir en chimeneas de sección constante.

Llamando  $D$  al diámetro equivalente de cámara, la velocidad de régimen de la maniobra que produce la aproximación asintótica a su nivel de equilibrio es:

$$a \geq \frac{B^2 d^{1+2b}}{D \sqrt{gL}} \approx \frac{1000 d^{2.2}}{D \sqrt{gL}}$$

Dicho de otra forma: La sección de cámara para que no haya oscilación es aproximadamente:

$$F \geq 50 \frac{d^{8.4}}{Q^2 L_i^*}$$

Siendo  $Q$  el caudal, en  $m^3/s$  y  $L_i^*$  medida en km.

que, en forma explícita, resulta:

$$Z = pa\omega + \frac{p - p_i}{2} (a - \omega)^2 \pm \quad [6]$$

$$\pm (a - \omega) \sqrt{\left[ \frac{p(a + \omega) + p_i(a - \omega)}{2} \right]^2 - K}$$

Dentro del intervalo  $0 < \omega < a$ , la curva (6) presenta un «lóbulo mayor» que envuelve al de los puntos de inflexión.

### 7. LOBULOS CON PENDIENTES

La ecuación (4) puede deducirse del análisis de las líneas isoclinas de cada maniobra

$$Z = p\omega^2 - p_i(a - \omega)^2 + \frac{K}{\lambda}(a - \omega) \quad [7]$$

parábolas que unen los puntos de igual pendiente  $\lambda$  de la familia de espirales definidas por  $a$  (\*).

El lugar de los puntos cuya tangente a la parábola isoclina es igual al parámetro que la define, resulta

$$\omega = \frac{\lambda^2 + K - 2p_i a \lambda}{2(p - p_i) \lambda} \quad [8]$$

$$Z = \frac{\lambda^4 - K^2 + 4pa\lambda(K - p_i a \lambda)}{4(p - p_i) \lambda^2}$$

que corresponde a la ecuación de los puntos de inflexión (lóbulo menor).

### 8. A CAMARA LENTA

La condición (5) no exige dimensiones excepcionales en las instalaciones. En el caso de chimeneas con cámaras, probablemente no se verificará en el «pozo», pero sí puede darse en la cámara superior —caso de bombeo— o en la inferior, si se trata de turbinación.

Expresando las pérdidas de carga de la galería de presión mediante fórmulas del tipo de

\* Vid. «Cálculo de chimeneas de equilibrio» por Miguel Delgado. E.T.S. de I.C.C.P.

$\omega = Bd^{b_j^{0.5}}$ , la condición queda

$$pa^2 > \frac{\pi B^2 d^{2+2b}}{4gF}$$

Llamando  $C$  al coeficiente de seguridad respecto a la sección mínima que asegura el amortiguamiento de las oscilaciones pequeñas (sección de Thoma,  $F_{TH}$ ) y  $H_o$  al Salto neto mínimo, se tiene

$$F = Cx F_{TH} = Cx \frac{\pi B^2 d^{2+2b}}{8gH_o}$$

de donde

$$pa^2 > \frac{2H_o}{C}$$

Si, como es frecuente, se dimensiona el pozo de la chimenea con  $C = 2$ , la condición para que no se produzca en él oscilación equivaldría a suponer que las pérdidas de carga de la conducción son iguales al salto mínimo, siendo así que la estabilidad de regulación exige  $H_o > 2pa^2$ . Pero en las cámaras, el valor de  $C$  suele ser notablemente mayor, por lo que no es difícil que se cumpla la condición (5), como también puede ocurrir en chimeneas de sección constante.

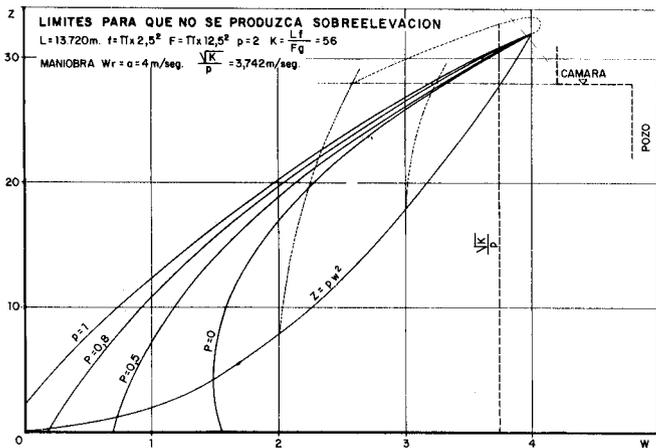
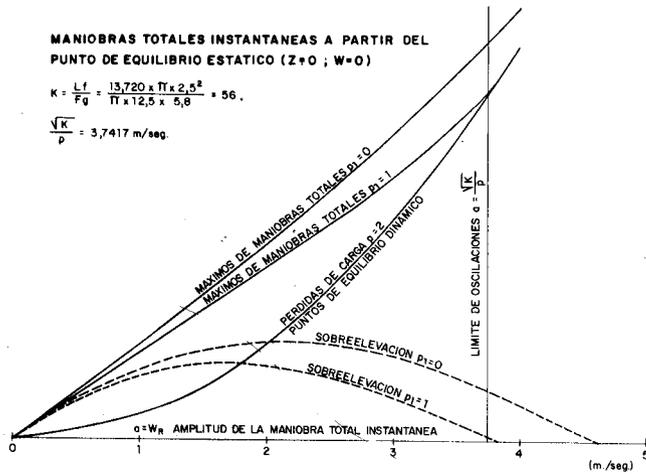
Llamando  $D$  al diámetro equivalente de cámara, la velocidad de régimen de la maniobra que produce la aproximación asintótica a su nivel de equilibrio es:

$$a \geq \frac{B^2 d^{1+2b}}{D \sqrt{gL}} \approx \frac{1000 d^{2.2}}{D \sqrt{gL}}$$

Dicho de otra forma: La sección de cámara para que no haya oscilación es aproximadamente:

$$F \geq 50 \frac{d^{8.4}}{Q^2 L_i^*}$$

Siendo  $Q$  el caudal, en  $m^3/s$  y  $L_i^*$  medida en km.



9. DISCRIMINADOS POR SU LUGAR DE ORIGEN

Una misma maniobra puede ser asintótica o semi-oscilatoria según parta de uno u otro punto del plano. Las que se inician en el origen de coordenadas serán de una u otra clase en función de su amplitud y de los parámetros p-y p<sub>1</sub>. En el gráfico de «Maniobras totales a partir del origen» se aprecia cómo influyen estos factores en una instalación de determinadas características. En otro gráfico se señala también cuáles son los límites para que no se produzca sobreelevación, en la misma instalación, en función de p<sub>1</sub>, para una maniobra fija que verifique la condición (5).

Ambos gráficos corresponden a una chimenea de sección constante F. Si tuviera un pozo de menor sección, serían válidos a partir del momento en que el agua llega al umbral de la

cámara. Si la curva de ascenso en el pozo rebasara el límite señalado antes de alcanzar el nivel del umbral, no quedaría acotada la sobreelevación, aunque sí habría descenso asintótico, si el umbral estuviera por debajo del punto de equilibrio dinámico.

Por ejemplo: Si el diámetro del pozo es la mitad del de la cámara, la maniobra a = 4 a partir del equilibrio de a = 2, corta a la curva limitativa (p<sub>1</sub> = 1) en Z = 22,7. Si el umbral de la cámara está por encima de esa cota, habrá sobreelevación, tanto mayor cuanto más alto esté. Pero si la maniobra parte del punto de equilibrio a = 3, corta en Z = 28,5 y no habrá oscilación ni sobreelevación, pues el umbral debe estar más bajo. Naturalmente, estamos simplificando mucho los esquemas, pues suele haber transiciones de pozo a cámara que invalidarían este planteamiento tan estricto.

10. LOS CARACOLES DEGENERADOS

Hemos visto anteriormente que puede haber «espirales degeneradas» porque, en su trayectoria hacia el punto de equilibrio, tropiezan con lóbulos mayores o menores. También se ha señalado que las características de cada instalación condicionan las áreas del plano (ω, Z) accesibles a las espirales normales y que hay zonas donde no pueden llegar, ni siquiera como consecuencia de combinaciones de maniobra de uno y otro signo, amplificadas en resonancia.

Las espirales de una familia no atravesarán su línea de inflexiones por mucho que se incremente la oscilación; lo que sí puede ocurrir, en maniobras combinadas es que la espiral de una de ellas sobrepase la curva de inflexiones de la otra, de modo que la segunda espiral será «degenerada», arrancando con un tramo convexo respecto a su punto de equilibrio, hasta que corte a su propia línea de inflexiones, a partir de la cual recobrará su concavidad y no la volverá a perder.

En maniobras de cierre, la ecuación (4) tiene sus mínimos sobre el eje ω = 0 en ω<sub>i</sub> = ±  $\frac{\sqrt{K}}{p + p_1}$ , siendo el coeficiente tangencial en esos puntos ±  $\sqrt{K}$ . Las coordenadas del pun-

to  $\dot{N}$  de cierre son  $\omega = 0$   $Z = \pm \frac{K}{p + p_1}$ , y la tangente horizontal. Estos puntos y rectas determinan un recinto —«nasa de cierre»— de donde no pueden volver a salir los caracoles de cierre de bombas o turbinas que entran en él.

### 11. LA BARBILLA DEL EXTRATERRESTRE

Desde un punto de vista estético, el calificativo de «degenerados» se debería aplicar a los caracoles normales con elevado valor de la velocidad de régimen, pues semejan perfiles de seres extraterrestres, de gran frente abombada y mínimo mentón (La amplitud de este mentón, es decir, el primer descenso tras un máximo de oscilación, es:

$$\Delta < \left( \frac{K}{p + p_1} \frac{(\sqrt{K} - pa)^2}{K + p^2a^2} \right)$$

Sin embargo, hemos llamado espirales degeneradas solamente a las que tienen tramos convexos, para las cuales no son válidas las limitaciones del punto  $\dot{N}$ , ya que pueden alcanzarlo y sobrepasarlo. Estas curvas, como se señala previamente, arrancan de puntos adonde les habrá llevado la oscilación de una maniobra precedente. Por sucesivas resonancias, se podrán amplificar las oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio de ambas curvas; pero la amplificación tiene un límite que se alcanza tanto más rápidamente cuanto mayores sean las velocidades de régimen de las maniobras resonantes.

Los puntos de enlace osculador entre estas espirales están situados sobre la parábola (3).

Si se tratara de dos maniobras iguales y de signo contrario, como puede darse en una instalación reversible, la curva de enlaces resonantes es:

$$Z = (p - p_1) \omega^2 + p_1 a^2 \quad [9]$$

La amplificación de las oscilaciones que se produce por resonancia entre maniobras simétricas es, en nuestra opinión, inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad de régimen  $a$ ; de forma que, para caudales muy pequeños, la amplificación es enorme, y decre-

ce rápidamente hasta anularse, para un cierto valor de  $a$ .

$$a_5 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{p_1(p - p_1)}}$$

En las resonancias que dan lugar a espirales degeneradas, la diferencia de las velocidades de régimen de las maniobras ha de ser importante, para que puedan alcanzar la zona de inflexión contraria; por ello, la amplificación de oscilaciones no será muy grande. Las ampliificaciones notables se producirán entre espirales normales, por la misma causa, y serán aplicables las limitaciones ya señaladas.

### 12. RESONANCIAS AJAMONADAS

En el enlace entre una maniobra de apertura y el cierre total, deja de producirse amplificación por resonancia cuando la velocidad de la maniobra es igual a:

$$a_5^1 = \pm \sqrt{\frac{K}{p_1(2p - p_1)}}$$

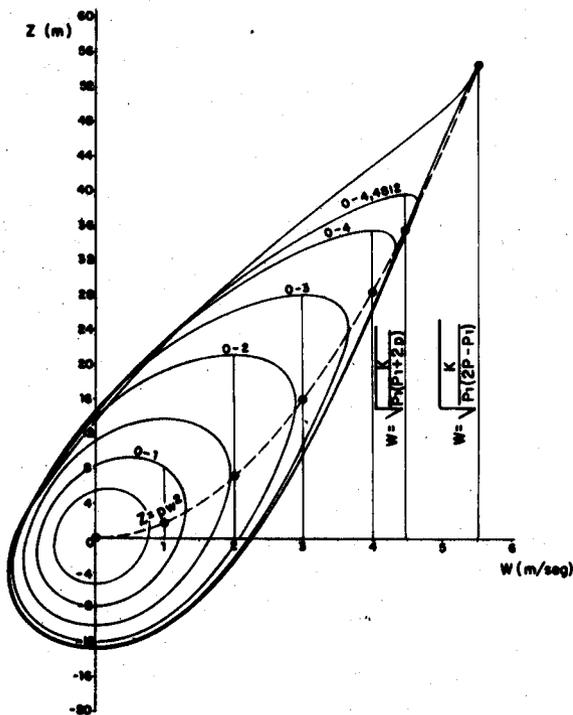
pues la parábola de enlace cierre-apertura correspondiente, sólo corta a la espiral en el punto de equilibrio. Los mayores descensos posibles (o ascensos, si es un cierre de turbinas) se producen para valores de  $a$  menores que  $a_5^1$ . Si el cierre se efectúa a partir del equilibrio dinámico, los máximos se obtienen para:

$$a_m = \pm \sqrt{\frac{K}{2pp_1}}$$

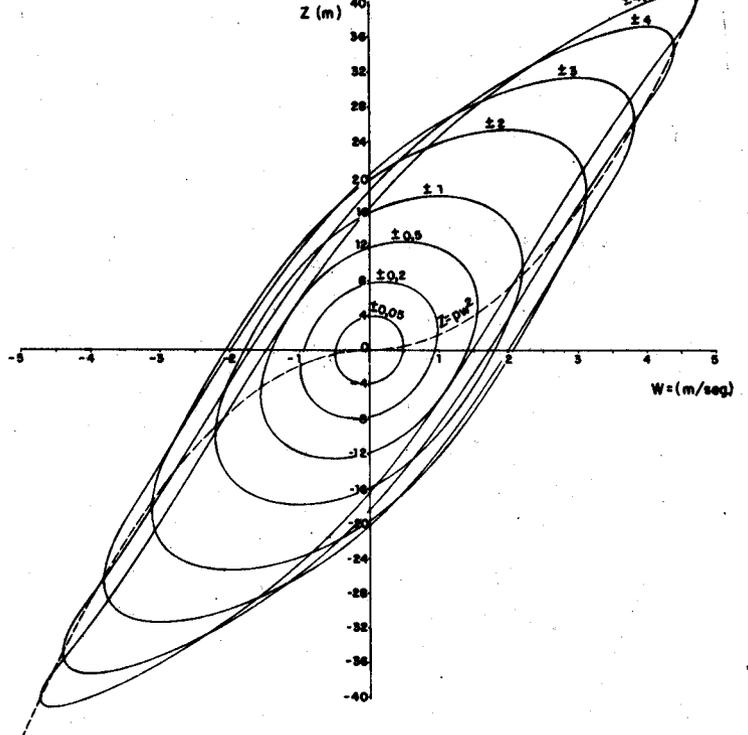
pues desde cualquier punto de régimen mayor, la curva de cierre arranca hacia dentro de la parábola dinámica  $Z = p\omega^2$ , y vuelve a salir cortándola con una abscisa menor que  $a_m$ . Pero esta maniobra no marca el máximo-maximorum, pues puede haber otra que cree mayor desnivel, que no arranque de un punto de equilibrio, sino de una curva de apertura. Un límite irrebalsable (e inalcanzable) lo da la espiral que parte del punto:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{K}{4pp_1}} \quad Z = \frac{p - p_1}{4pp_1} K$$

LIMITES DE RESONANCIAS ENTRE MANIOBRAS DE CIERRE Y APERTURA



LIMITES DE RESONANCIAS ENTRE MANIOBRAS SIMETRICAS



intersección de la curva (4) de cierre con la parábola de enlace (O-o) (apertura O-cierre)\*.

ción de las oscilaciones sería mayor que la que produce el enlace directo.

### 13. EL INQUIETANTE CONTONEO

Las condiciones para que se produzcan resonancias entre maniobras de signo contrario son más exigentes que las de cierre-apertura, llevando a espirales degeneradas para valores de las velocidades de régimen + a, - b, relativamente bajo. Al ir aumentando estos valores, la curva límite de resonancia se va alargando y estrechando, adoptando una silueta de letra S cada vez más fina. Si  $a = -b = \frac{\sqrt{K}}{p_1}$ , la curva queda reducida a una línea.

Este enlace directo entre maniobras de signo contrario no es una abstracción teórica, pues en las instalaciones reversibles de acumulación se tiende a reducir todo lo posible el tiempo que media entre bombeo y generación, para que la central pueda dar una respuesta rápida a una eventualidad producida en horas de valle. Concretamente, en la central reversible de Altamira estaba previsto el paso de bombas a turbinas en 100 segundos, tiempo que, comparado con los 19 minutos del período de oscilación del circuito hidráulico, es casi equivalente a una maniobra instantánea, como las que se analizan en estas notas.

Si el cambio de signo de las maniobras se realizase a través de un cierre intermedio convenientemente temporizado, los enlaces se efectuarían en la «panza» del cierre y la amplifica-

Los problemas mecánicos que planteaba esta rápida inversión de régimen, aconsejaron consistir de ella, realizandola a través de la parada normal y sucesivo arranque de los grupos. Puede parecer que con ello se suavizaban las condiciones de oscilación en la chimenea de equilibrio; lo cual es cierto si el cambio de régimen se hace con lentitud o escalonando grupos; pero los tiempos mínimos de parada de bomba y arranque en turbina son tales que, de realizar-

\* No hemos podido acotar la magnitud del ascenso o descenso que este cierre produce. Señalaremos, a cambio, una limitación algo más amplia, que proviene del punto de inflexión, sobre Z = 0. La acotación, irrefragable en cualquier cierre de turbinas o bombas, es:

$$Z = 0,6392 \frac{K}{p + p_1}$$

se simultáneamente la maniobra con tres o cuatro grupos, se habría producido mayor oscilación que con el cambio rápido de régimen.

#### 14. PERIODOS ESCABROSOS

En una instalación con chimenea de equilibrio, el período de oscilación, si no hubiera rozamiento en la conducción, sería:

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{LF}{fg}} = 2\pi \frac{F}{f} \sqrt{K} \quad [10]$$

Las pérdidas de carga alargan el período, tanto más cuanto más próxima esté la velocidad de régimen a la velocidad crítica.

$$a_k = \frac{\sqrt{K}}{p}$$

para la que, teóricamente, el período sería infinito, puesto que el nivel de equilibrio se alcanza asintóticamente. Para cualquier otra velocidad de régimen  $a$ , el período de oscilación, teniendo en cuenta las pérdidas de carga del conducto, definidas por su coeficiente  $p$ , es, según nuestros cálculos:

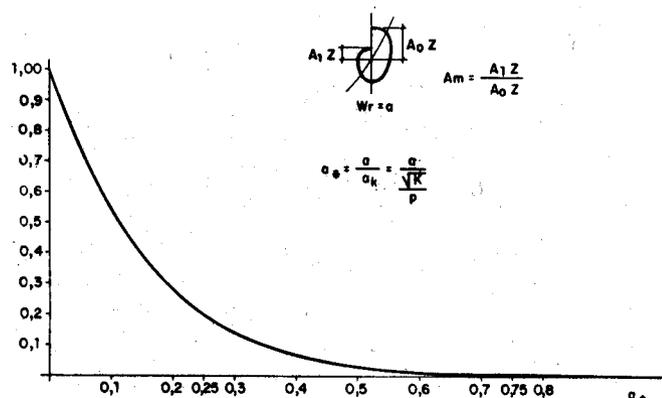
$$T_a = \frac{2\pi L}{g\sqrt{K - p^2 a^2}} \text{ (seg.)} \quad [11]$$

Cuando el período se alarga, es decir para valores crecientes de  $a$ , las oscilaciones van siendo de menor amplitud y más irregulares: aumenta el tiempo de descenso desde el máximo de velocidad hasta el nivel de régimen — y de ascenso desde el mínimo hasta dicho nivel — y por el contrario, disminuye el tiempo empleado en el resto del recorrido, aunque en proporción mucho menor. Al mismo tiempo que esto sucede, también aumenta el amortiguamiento de las oscilaciones, por lo que estas irregularidades son apenas perceptibles.

Para las pequeñas oscilaciones, el amortiguamiento depende fundamentalmente de la magnitud  $a$  — velocidad en régimen de la maniobra — en relación con la velocidad crítica de la instalación  $a_k$ . Si se consideran «velocidades relativas».

$$a_* = \frac{a}{a_k} = \frac{pa}{\sqrt{K}}$$

AMORTIGUAMIENTO DE LAS PEQUEÑAS OSCILACIONES EN TORNO AL NIVEL DE EQUILIBRIO CORRESPONDIENTE A LA VELOCIDAD DE RÉGIMEN  $a$



el amortiguamiento de las pequeñas oscilaciones en torno al nivel de equilibrio dinámico es el que se señala en el gráfico adjunto. Para oscilaciones de mayor entidad, también el amortiguamiento varía con la velocidad de régimen, pero en menor proporción relativa.

#### 15. PUNTOS SINGULARES Y PUNTO FINAL

El cálculo de oscilaciones de masa por diferencias finitas se suele simplificar sustituyendo el punto medio de la parábola de pérdidas de carga por la intersección de su tangente en el origen del intervalo con la ordenada media. La ecuación diferencial de la espiral, obtenida por eliminación del tiempo entre las ecuaciones dinámica y de continuidad, no se corresponderá exactamente con la que resulta de la simplificación citada. La discrepancia es irrelevante, si se utilizan breves incrementos de tiempo, para el estudio de máximos, mínimos y enlaces de maniobras; pero en las proximidades de puntos singulares, la simplificación puede introducir errores que invaliden los resultados teóricos.

En los entornos del origen y de los puntos de equilibrio dinámico, para leves variaciones del caudal o cuando la velocidad del agua en la galería es muy pequeña, el régimen hidráulico en la conducción o en la inserción deja de ser turbulento, por lo que tampoco parece adecuado mantener los coeficientes de pérdidas de car-

ga correspondientes  $p$  y  $p_i$ , establecidos para regímenes en que puede admitirse que la pendiente es proporcional al cuadrado de la velocidad. Suponer constante y perfectamente simétrico el coeficiente de la inserción es otra simplificación absolutamente teórica.

Pero la hipótesis que mayores discrepancias produce con la realidad es la de admitir que los caudales de régimen se establecen instantáneamente al comienzo de cada maniobra, sobre todo, en el caso de bombas con característica muy aplanada.

Los máximos y mínimos de oscilación no quedan situados sobre la abscisa correspondiente a la velocidad de régimen, sino que están desplazados a la curva que resulta de restar las pérdidas de carga de las tuberías de impulsión a la característica de las bombas: el máximo de oscilación se obtiene antes de que el agua alcance en la conducción la velocidad de régimen, mientras que el mínimo se produce con caudal superior al del equilibrio final. Como consecuencia, el acceso a los puntos de régimen no se realiza con el asintotismo exacto que se ha deducido matemáticamente (\*). En el caso de turbinas, con regulación a potencia constante, los desplazamientos de los máximos y mínimos de oscilación son en sentido contrario a los anteriores, modificando desfavorablemente los supuestos del cálculo teórico. Las maniobras en resonancia de bombeo y turbinación, alteradas ambas por los desplazamientos señalados, no cumplirán con exactitud los condicionamientos que previamente se han establecido.

A pesar de todas estas discrepancias, las conclusiones deducidas, tanto en lo que se refiere a las acotaciones de la oscilación de masa subsiguiente a una maniobra simple, como a los límites de resonancia entre maniobras compuestas, período del movimiento oscilatorio, amortiguación de pequeñas oscilaciones y caudal crítico de asintotismo, son válidas, aunque no se produzcan con el rigor milimétrico con que se han obtenido partiendo de los supuestos teóricos en que se fundamentan estas notas.

---

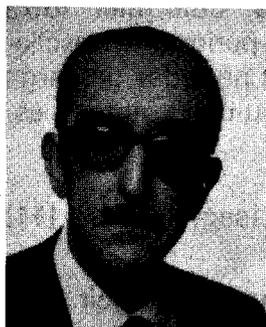
\* La velocidad crítica  $a_c$ , a partir de la cual se producen las «maniobras asintóticas», es, si se tiene en cuenta la característica de las bombas, mayor que en la hipótesis de caudal instantáneo, y tanto más cuanto menos escarpada sea la mencionada curva característica.

## DEDICATORIA

Una gran parte de los puntos que se tocan en este trabajo, fue objeto de largas pláticas con nuestro inolvidable compañero Miguel Delgado, en visitas dominicales a su casa de la calle de Marcenado. Nuestras conversaciones, a los pocos minutos, derivaban invariablemente hacia los temas de amortiguamiento del golpe de ariete: El me hablaba de sus cálculos de calderines y yo le contaba de los míos de chimeneas, mientras su esposa, Consuelo, soportaba estoicamente los interminables debates hidráulicos. Por ello, parece de justicia dedicar este artículo a la memoria de Miguel y a la paciencia de Consuelo.

---

Luis Torrent Rodríguez



Doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, promoción 1950, es actualmente jefe del Servicio de Vigilancia de Presas de la Dirección General de Obras Hidráulicas.

Ha colaborado en numerosos proyectos hidroeléctricos del INI (chimenea de San Sebastián, presa de Pías, diques de Cubillos, embalse de Aumedrá, saltos del Cinca, central de Grado I, etc.

En el MOPU desde 1965, intervino en el proyecto de abastecimiento a Madrid por bombeo desde el Alberche (A.M.S.O.) y dirigió las obras de la elevación reversible de Altomira (Trasvase Tajo-Segura). Ha colaborado también en algunos proyectos para el extranjero (Valdeia, R. Dominicana; Acueducto de Santa Elena, Ecuador).

Asiduo colaborador de esta Revista, sus publicaciones versan sobre hidráulica de conducciones, chimeneas de equilibrio, instalaciones de bombeo, etc., con esporádicas incursiones de «divertimento» en otros campos.

---