

Discretización automática de presas bóveda^(*)

Por **EDUARDO SALETE**
CARLOS ARIAS

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (U.P.M.)
y **EMILIO MARIN**
INITEC

El objeto de este artículo es pasar revista a la problemática que plantea la realización de un modelo geométrico, para el cálculo de una presa bóveda por el método de los Elementos Finitos.

Se discuten las características genéricas o especificaciones a que debería adaptarse un «autómata» que realizase la modelización y se exponen soluciones, que los autores consideran adecuadas, como fruto de su experiencia.

Por ser las de uso más extendido en la actualidad, se partirá de una presa bóveda de doble curvatura cuyas secciones horizontales sean arcos circulares de tres centros en ambos paramentos.

CRITERIOS GENERALES

A la hora de diseñar un generador automático, deben contemplarse tres facetas diferentes y complementarias (que se refieren respectivamente a los datos de entrada, a la adecuación del modelo a la realidad que pretende simular y a la presentación de los resultados):

- El sistema debe estar diseñado para su uso por personas que no sean necesariamente informáticos. Debe estar preparado para entender datos escritos en el mismo «lenguaje» que el proyectista emplea en el resto de sus actividades.
- El modelo debe adaptarse lo más fielmente posible al proyecto original y el sistema deberá además tener previstos controles de salvaguardia que eviten (dentro de lo posible) la obtención de modelos mal condicionados (ángulos muy agudos, longitudes nulas, etc.)
- Finalmente es necesario evitar la obtención de informes grandes y repletos de números de difícil comprobación. En este sentido conviene fomentar la representación gráfica, complementada con listados alfanuméricos que permiten identificar fácilmente un determinado nudo, elemento, zona, ménsula, etc., en el modelo.

DATOS DE ENTRADA

El sistema debe utilizar, como datos de partida, valores directamente obtenibles del proyecto:

- Distancia entre juntas, a lo largo del arco de coronación.
- Cotas de las distintas secciones horizontales o arcos que se van a emplear en el modelo.
- Para cada cota:
 - Radios centros y ángulos centrales de los arcos que definen ambos paramentos.
 - Angulo que, en cada paramento, forma la línea de nivel del terreno con el arco incidente.
- Si la presa tiene algún estribo de gravedad en su unión con el terreno, se definirá éste por la directriz en planta y los taludes correspondientes.
- Espesores de terreno en vertical (cimientos) y horizontal (aguas arriba y aguas abajo).

MODELIZACION DEL CUERPO DE PRESA

Para construir la presa se emplean elementos paralelepípedicos, isoparamétricos de ocho o veinte nudos en el interior y elementos tetraédricos de cuatro nudos en la unión con el terreno.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de marzo de 1987.

Los nudos quedan definidos por intersección de arcos y ménsulas, siendo horizontales los planos limítrofes de los arcos y verticales los de las ménsulas. En la zona de unión presa terreno, se presenta un problema debido a que sus nudos, separan simultáneamente arco, ménsula y material, por lo que caben dos posibilidades para definirlos:

- Respetar arcos y ménsulas, modificando la frontera del terreno.
- Respetar la frontera del terreno y bien el arco o bien la ménsula (pero solo uno).

Consideramos que el segundo método es el más apropiado, pues permite representar fielmente el terreno (hay que tomar precauciones para evitar la formación de triángulos de lados muy desproporcionados).

Conviene además respetar la verticalidad de la ménsula, en detrimento de la horizontalidad del arco, pues así se obtiene un modelo apropiado para su posterior cálculo a peso propio con juntas sin inyectar.

ESTRIBOS

Es frecuente en una presa arco resolver la unión con el terreno mediante la construcción de un estribo de gravedad.

La definición del estribo se realiza mediante una poligonal que define su eje en coronación.

Se sigue manteniendo el concepto de ménsula, debiendo darse la ley de espesores y la variación de taludes, en aquellos puntos en que sea necesario, para una correcta definición.

El estribo quedará dividido en arcos, prolongación de los definidos en el cuerpo de presa.

TERRENO

Queda definido como una capa sobre la que se apoya la estructura. Es necesario dar los valores que definen su espesor en vertical y sus extensiones en horizontal (en los sentidos paralelo y perpendicular al eje de la presa). La división de elementos se consigue con planos proyectantes verticales cuya directriz es la línea de nivel con que aflora en superficie.

FORMULACIONES

Coordenadas de los nudos en el cuerpo de presa

Antes de comenzar con el desarrollo de la formulación, conviene fijarse en un conjunto de puntos, que llamaremos «notables», en los que se apoya el proceso:

- Puntos extremos de los arcos laterales EII, EIE, EDI, EDE.
- Puntos de tangencia y transición de los arcos centrales con los respectivos laterales TII, TIE, TDI, TDE.
- Centros de los arcos laterales CII, CIE, CDI, CDE.

La secuencia que se sigue en el cálculo de las coordenadas de los nudos de la bóveda es la siguiente: (figura 1)

- Cálculo de los argumentos γ_i , γ_c , γ_d .
- Determinación de los puntos notables en el paramento de aguas abajo.

SECCION HORIZONTAL TIPICA DEL CUERPO DE BOVEDA

NOTA.— Todos los parámetros indicados en la figura varían con la cota Z, a excepción de las coordenadas X_p, Y_p del punto V_p , desde donde se proyectan los radios, que permanecen fijos para todos los niveles.

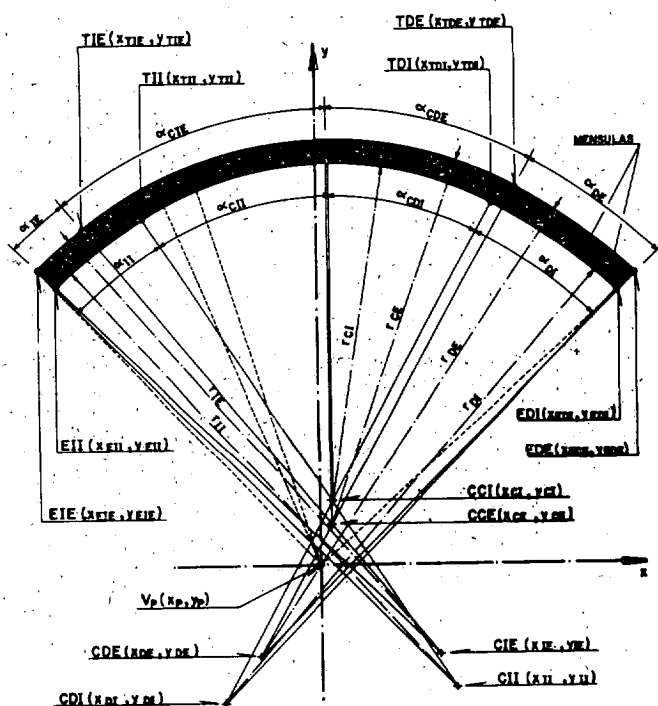


Figura 1.

- Determinación de los nudos en la coronación del paramento de aguas abajo.
- Determinación de los nudos de contacto bóveda-terreno en el paramento de aguas abajo.
- Determinación de puntos notables, nudos de coronación y de contacto bóveda-terreno en el paramento de aguas arriba.
- Determinación de los nudos de la coronación en los estribos de gravedad artificiales.
- Generación de los elementos.

Cálculo de los argumentos γ_i , γ_c , γ_d .

$$\gamma_{i1} = 0.$$

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ik-1} + \frac{dp_k}{r_{i1}} \quad (0 \leq \gamma_{ik} \leq \alpha_{ii1})$$

$$\gamma_{cj} = \gamma_{cj-1} + \frac{dp_k}{r_{ci1}} \quad (-\alpha_{cii1} \leq \gamma_{cj} \leq \alpha_{cdi1})$$

siendo

$$\gamma_1 = \frac{\sum_1^n dp_k - \alpha_{ii1} \cdot r_{ii1}}{r_{ci1}} - \alpha_{ii1}$$

y N el menor valor que hace a γ_{c1} estar en el rango indicado.

$$\gamma_{de} = \gamma_{de-1} + \frac{dp_k}{r_{di1}} \quad (0 \leq \gamma_{de} \leq \gamma_{di1})$$

siendo

$$d_1 = \frac{\sum_1^N dp_k - \alpha_{ii1} \cdot r_{ii1} - (\alpha_{ci1} + \alpha_{cdi1}) \cdot r_{ci}}{r_{di1}}$$

y N el menor valor que hace a γ_{d1} estar dentro del rango indicado.

Se ha representado por dp_k ($k = 1$, n.º de ménsulas) la anchura de las ménsulas, medida en la coronación del paramento de aguas abajo.

Cálculo de los puntos notables

Un punto cualquiera p (x, y) de la bóveda en el paramento de aguas abajo, se obtiene con-

siderando que pertenece a un arco del que conocemos su centro C (X_o , Y_o) y el radio vector \bar{R} (r, \emptyset).

$$\bar{P} = \bar{C} + \bar{R}$$

en coordenadas cartesianas

$$x = x_o + r \cos \emptyset$$

$$y = y_o + r \sin \emptyset$$

El vector \bar{C} y el valor de r varían, además de con el nivel, con el paso desde el arco lateral izquierdo al arco central y desde éste al lateral derecho.

Los puntos de cambio son los de transición. Su cálculo, que ha de ser previo, se realiza mediante las expresiones:

$$TII = CCI + r_{ci} (\pi / 2 + \alpha_{cii})$$

$$TDI = CII + r_{ci} (\pi / 2 - \alpha_{cdi})$$

Los puntos extremos y centros de los arcos se calculan de un modo análogo

$$CII = CCI + r_{vi} (\emptyset_i)$$

$$CDI = CCI + r_{vd} (\emptyset_d)$$

siendo

$$r_{vi} = r_{ii} - r_{ci}$$

$$\emptyset_i = \pi / 2 - \alpha_{cii}$$

$$r_{vd} = r_{di} - r_{ci}$$

$$\emptyset_d = -\pi / 2 - \alpha_{cdi}$$

$$EII = CII + r_{ii} (\pi / 2 + \alpha_{cii} + \alpha_{ii})$$

$$EDI = CDI + r_{di} (\pi / 2 - \alpha_{cdi} - \alpha_{di})$$

Una vez determinados los puntos notables se obtienen los nudos del paramento de aguas abajo, en la coronación de la bóveda.

El contorno terreno bóveda se resuelve en dos etapas: En la primera se asimila a la poligonal determinada por la sucesión de puntos extre-

mos del lado izquierdo, los puntos del arco inferior, y los puntos extremos del lado derecho.

A continuación se obtiene la intersección de los planos proyectantes de las ménsulas con esta poligonal. Siendo los puntos así obtenidos los vértices definitivos del contacto bóveda-terreno.

PARAMENTO DE AGUAS ARRIBA

Los puntos notables, en el paramento de aguas arriba, se obtienen del mismo modo substituyendo los parámetros de partida: centros, ángulos, radios del paramento de aguas abajo por los correspondientes al de aguas arriba, con una salvedad: Los puntos extremos se obtienen por proyección de los correspondientes del paramento de agua abajo, desde la vertical de proyección de ménsulas.

Los nudos del paramento de aguas arriba en la coronación y en el pie de presa (arco inferior), se obtienen por proyección de ménsulas, de los correspondientes nudos del paramento de aguas abajo.

El proceso de proyección de un punto del paramento de aguas abajo sobre el de aguas arriba, que hemos mencionado en repetidas ocasiones se realiza siempre:

- Desde la vertical de proyección de ménsulas.
- Sobre una superficie cilíndrica.
- Manteniendo la cota.

Con estas condiciones se tiene

$$(\bar{V}_p - \bar{V}_q) \lambda = \bar{V}_q - \bar{V}_0$$

Siendo

$\bar{V}_p(x,y)$ el punto que se proyecta,

$\bar{V}_g(x,y)$ el punto resultante,

$\bar{V}_0(0,0)$ el punto de proyección

$$\lambda = [XX_c + YY_c + \sqrt{R^2(x^2 + y^2) - (x_k - yx_c)^2}] / (x^2 + y^2)$$

OBTENCION DE LAS COORDENADAS DE LOS NUDOS DEL TERRENO Y ESTRIBOS

El terreno bajo la presa se discretiza tal como se indica en la figura a y b donde se puede ver la planta de la superficie de contacto presa-terreno y una sección vertical típica.

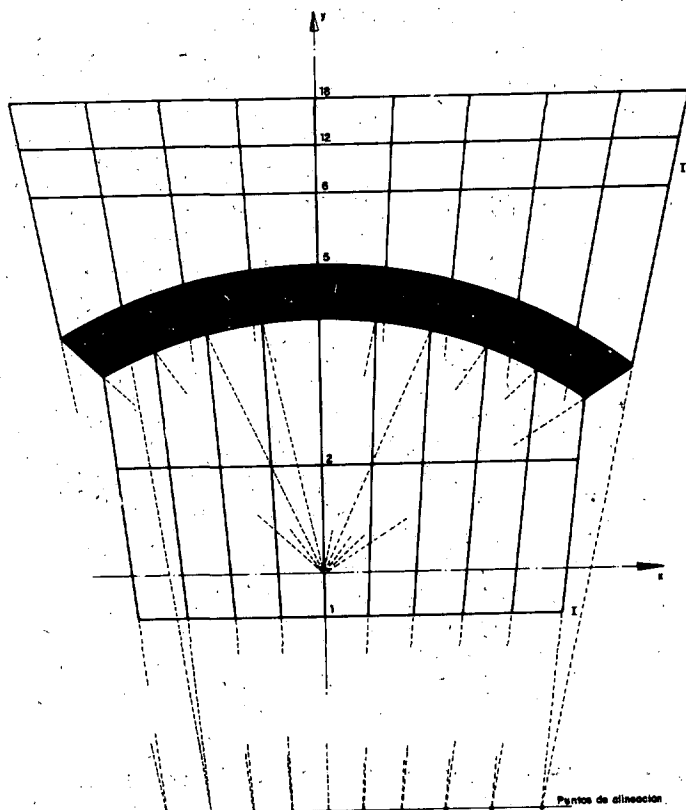


Figura 2-a.

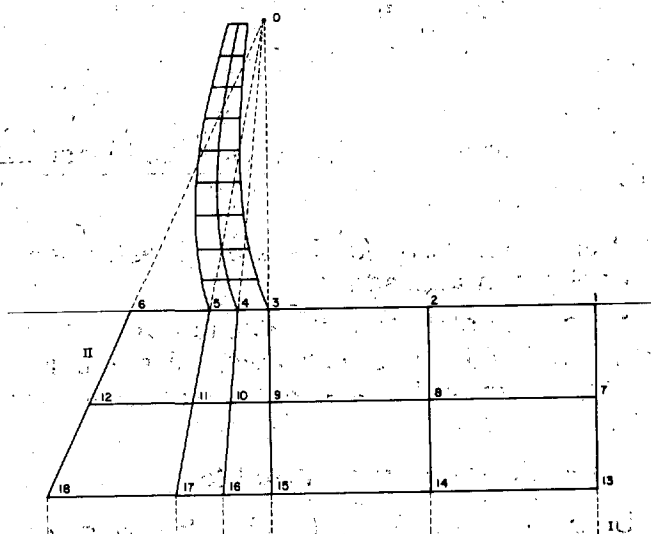


Figura 2-b.

El terreno está limitado, aguas abajo, por el plano vertical I y aguas arriba por el II.

Los cortes 3-15, 4-16, 5-17 y 6-18 son concurrentes en una arista perpendicular al eje de la presa, que se proyecta en O.

La discretización en planta se resuelve mediante los puntos de alineación. (Uniendo estos puntos, uno por cada sección, con los puntos 3 y 5 de cada una de ellas se obtiene la traza en el terreno).

COORDENADAS DE LOS NUDOS DE LOS ESTRIBOS

Los puntos de la coronación de los estribos de gravedad se obtienen recursivamente mediante la ley:

$$\bar{C}_k = \bar{C}_{k-1} + \bar{D}_k \quad (k = 1 \text{ al } n.^{\circ} \text{ de secciones del estribo}).$$

En donde \bar{C}_k es un punto genérico y \bar{D}_k un vector de desplazamiento. El punto \bar{C}_0 , inicial del proceso, depende del estribo y paramento considerados, coincidiendo siempre con uno de los cuatro puntos notables EII, EIE, EDI, EDE.

El vector \bar{D}_k también depende la situación del nudo tomando los siguientes valores, según el caso:

Estribo	Paramentos	
	aguas abajo	aguas arriba
Izquierdo	(d_{iik}, β_{iik})	$(d_{dik}, -\beta_{dik})$
Derecho	$(d_{dik}, -\beta_{dik})$	$(d_{dek}, -\beta_{dek})$

verificándose las relaciones

$$\beta_{iik} = \beta_{iik-1} + \omega_{iik}$$

$$\beta_{iek} = \beta_{iek-1} + \omega_{iek}$$

$$\beta_{dik} = \beta_{dik-1} + \omega_{dik}$$

$$\beta_{dek} = \beta_{dek-1} + \omega_{dek}$$

con

$$\beta_{iio} = \pi + \alpha C_{ii1} + \alpha_{ii1}$$

$$\beta_{ieo} = \pi + \alpha C_{ie1} + \alpha_{ie1}$$

$$\beta_{dio} = -\alpha C_{di1} - \alpha_{di1}$$

$$\beta_{deo} = -\alpha C_{de1} - \alpha_{de1}$$

Los restantes nudos del estribo se obtienen a partir de los de coronación por la expresión:

$$\bar{G} = \bar{C} + h \cdot \bar{D}$$

en donde \bar{G} es el nudo del estribo, \bar{C} es el nudo de coronación que está situado en la misma sección y paramento y h es la diferencia de cotas entre \bar{C} y \bar{G} .

El vector \bar{D} , que tiene por componentes

$$\bar{D} = (-\operatorname{tg} \delta l \cdot \cos \beta, -\operatorname{tg} \delta l \cdot \operatorname{sen} \beta, -1)$$

ESTRIBO DE GRAVEDAD

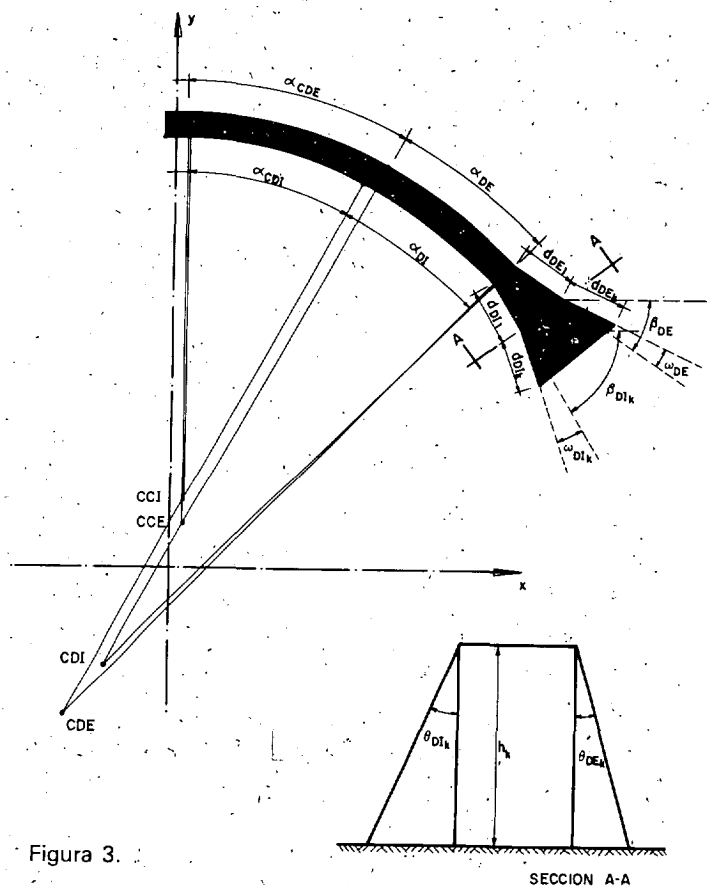


Figura 3.

en el paramento de aguas abajo y

$$\bar{D} = (\operatorname{tg} \delta E \cdot \cos \beta, \operatorname{tg} \delta E \cdot \operatorname{sen} \beta, -1)$$

en el de aguas arriba, representa un descenso en cota de una unidad, a lo largo del paramento correspondiente, sin valor de la sección.

Los nudos correspondientes al contacto estribo-terreno, se obtienen automáticamente, identificando h con la altura de la coronación respecto del terreno.

La poligonal de contacto presa-terreno, en los estribos no precisa de ningún ajuste contrariamente a como sucedía en el cuerpo de presa.

GENERACION DE LA MALLA

La malla, considerando como tal el conjunto de nudos y elementos se genera en una única fase una vez calculados todos los puntos notables, haciendo uso de la formulación e hipótesis expuestos anteriormente.

En la generación de nudos y elementos se tiene en cuenta que es variable la altura de las secciones y ménsulas, siendo por tanto distinto el número de nudos y elementos de cada una.

Los elementos de acuerdo en el contacto de la presa con el terreno han de tener forma de prisma triangular con sus bases situadas en los paramentos de la presa.

Para dar una mayor generalidad al resultado y por conveniencias del cálculo posterior, se descompone cada prisma triangular en tres elementos tetraédricos.

Las coordenadas de los nudos de cada sección se calculan, empezando por la coronación, hasta llegar al punto de contacto con el terreno, en ambos por aumentos (si el nudo de contacto con el terreno está muy próximo al inmediatamente superior se baja éste hasta el terreno).

Partiendo de los nudos de contacto, se generan los restantes nudos del terreno, que corresponden a la sección.

Las coordenadas de todos los nudos, (presa, terreno y estribos) se memorizan en matrices dispuestas para tal efecto.

En la generación de los elementos hay

que considerar la existencia de elementos de acuerdo presa-terreno y darles el tratamiento adecuados.

Para ello las tres últimas secciones calculadas se mantienen memorizadas en matrices específicas, en las que además de los nudos reales, se crean otros nudos ficticios que suplen a los que habría, si la sección considerada tuviese la misma altura que la siguiente (en el lado izquierdo de la presa) o que la anterior (en el lado derecho). Estos nudos ficticios sirven de señalización para generar los elementos de acuerdo.

De esta forma, los elementos se generan siguiendo las ménsulas, necesitándose dos secciones consecutivas para cada una.

Por otra parte cada sección, con sus eventuales nudos ficticios, no se completa hasta que no se conoce la sección siguiente.

Puesto que se necesitan dos secciones completamente generadas para cada ménsula, es necesario conservar en el algoritmo de generación las tres últimas secciones.

EDITOR GRAFICO

Es conveniente dotar al sistema de un EDITOR que permita, modificar coordenadas de nudos y eliminar elementos del modelo de forma que éste puede adaptarse a necesidades concretas no contempladas de modo automático.

La forma de referenciar un determinado nudo para variar sus coordenadas consiste en dar cuatro parametros: zonas, sección, nivel y fondo.

- Zonas es una de las cuatro posibles:
 - 1 Cuerpo de presa.
 - 2 Terreno.
 - 3 Estribo superior.
 - 4 Estribo inferior.

- La sección, nivel y fondo indican la situación dentro de la zona referida.

La forma de hacer referencia a un elemento que se quiera eliminar es citando directamente su número.

Para facilitar la referencia de nudos y elementos, la salida del programa generador debe proporcionar, para cada nudo del modelo, además

de sus coordenadas, los parámetros anteriores, que definen su ubicación y análogamente, para cada elemento debe indicarse los nudos que la definen y un conjunto de parámetros semejantes a los anteriores (zona, ménsula, arco y fondo).

OPTIMIZACION DE LA NUMERACION

El sistema desarrollado puede aplicarse de forma ordenada, comenzando por la coronación del terreno de un estribo, barriendo sucesivamente según fondo, arcos de la sección y ménsulas, hasta llegar al otro estribo.

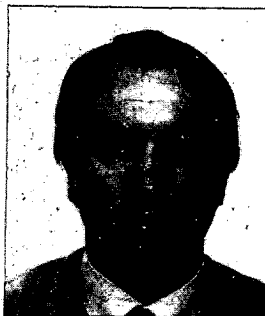
De esta forma se genera un modelo que es adecuado para realizar un cálculo de elementos finitos, independientemente del método de resolución que emplee el programa que se utilice, pues tanto el ancho de banda, como el perfil (para métodos gaussianos), como el frente de onda («wave front» de Irons), son reducidos y pocos mejorables.

CONCLUSIONES

Con el método expuesto, se ha realizado un programa, escrito en FORTRAN 77, que se ha utilizado con éxito en la modelización de varias presas de los tipos bóveda y arco de gravedad.

El tiempo de cálculo para obtener el modelo, varía con la magnitud de la estructura (número de arcos, número de ménsulas, existencias de estribos, etc.), dentro de un rango de uno a tres minutos de CPU (UNIVAC 1100/60). En la figura 4 se adjunta una perspectiva del modelo generado por el programa para la presa de Mingorría.

Don Eduardo Saleté Díaz



Es doctor ingeniero de Caminos y licenciado en Ciencias Matemáticas. Desde 1974 realiza su labor docente en la ETS de Ingenieros de Caminos, en donde es profesor adjunto numerario y desde 1976 comparte esta actividad con colaboraciones en diversas empresas de ingeniería.

Carlos Arias Cuesta

Dr. Ingeniero Industrial por la Universidad Politécnica de Madrid. Promoción 1965. Desempeña sus funciones en la División Informática de INITEC.

Emilio Marín Barragán

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Madrid. Promoción 1985. Profesor Encargado de curso en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos de Madrid. Responsable del Sistema del Centro de Cálculo de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos de Madrid.

