

Simetría y Ornamentación en el Plano^(*)

Por VALERIANO ZORIO BLANCO

Dr. Ingeniero de Caminos.
Licenciado en Ciencias Matemáticas.

El concepto de simetría es muy importante en la naturaleza y en el arte. En el presente trabajo pretendemos estudiar matemáticamente la simetría de los motivos ornamentales y su repetición en el plano. El lenguaje adecuado es la estructura de grupo, tanto para el estudio de la simetría de un motivo ornamental, como para el estudio de las redes u ordenaciones homogéneas de distribución en el plano.

1. CONGRUENCIAS. CONGRUENCIAS DE UNA FIGURA

Sabemos que una congruencia (en el plano o en el espacio) es una transformación que conserva las distancias entre puntos ó lo que es igual los módulos de los vectores. Existen dos tipos de congruencias tanto en el plano como en el espacio que se denominan directas e inversas. Las congruencias directas conservan la orientación de las figuras, las congruencias inversas la cambian.

Dos figuras F , F' se llaman congruentes (directa ó inversamente) si se corresponden en una congruencia.

Si dos figuras son directamente congruentes pueden llevarse a coincidir mediante un movimiento (fig. 1).

Si dos figuras son inversamente congruentes no es posible llevarlos a coincidir mediante un movimiento en el plano. La coincidencia sólo es posible mediante un movimiento en el espacio. Esto se puede apreciar en las figuras $ABCD$ y $A'B'C'D'$ (fig. 2).

El conjunto de todas las congruencias (directas e inversas) del plano forman un **grupo**, del cual el conjunto de las congruencias directas es un **subgrupo**. El grupo de las congruencias es infinito en el sentido de que existen infini-

tas congruencias. Análogamente ocurre con el grupo de las congruencias directas.

¿Qué es lo que se llama **Congruencia de una figura F** ? La respuesta es «una congruencia respecto de la cual es invariante la figura F ».

Dentro del grupo de congruencias del plano tienen especial importancia los subgrupos finitos, es decir que constan de un número finito de congruencias. Estos subgrupos finitos están asociados a figuras geométricas regulares muy sencillas. Sus elementos son **congruencias de**



Figura 1

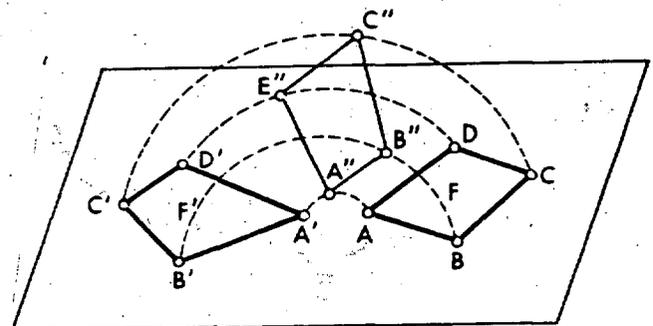


Figura 2

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de octubre de 1989.

estas figuras geométricas en el sentido que hemos definido más arriba.

2. CONCEPTOS DE SIMETRIA

Una simetría respecto de una recta r es la transformación plana (fig. 3) tal que el homólogo de cada punto M se obtiene llevando sobre la perpendicular MQ a r una longitud $QM' = MQ$. La simetría de recta es una congruencia inversa. Decimos que una figura F es simétrica respecto de una recta r (fig. 4) cuando al trazar la perpendicular a r por cualquier punto A de la figura y llevar a partir del pie P

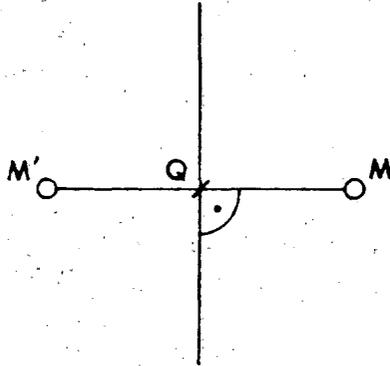


Figura 3

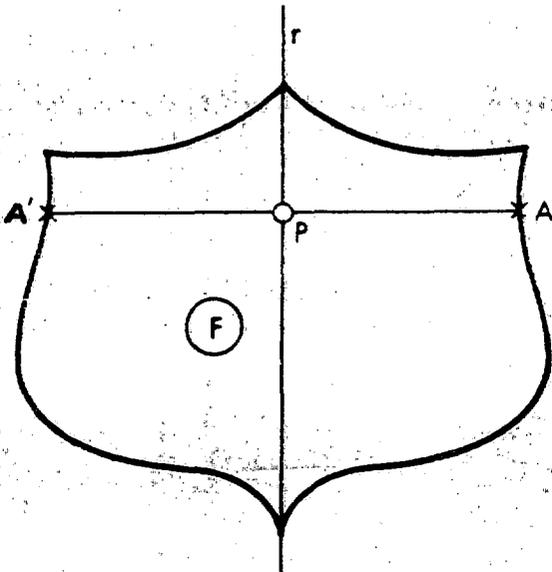


Figura 4.

una longitud $PA' = AP$ resulta que el punto A' pertenece a la figura F .

Podemos decir que una figura F es simétrica respecto de una recta r cuando es invariante respecto a la congruencia inversa «simetría de r » ó dicho de otra manera cuando la simetría de eje r es una congruencia de r .

Simetría respecto de un punto O es la transformación plana (fig. 5) tal que el homólogo de

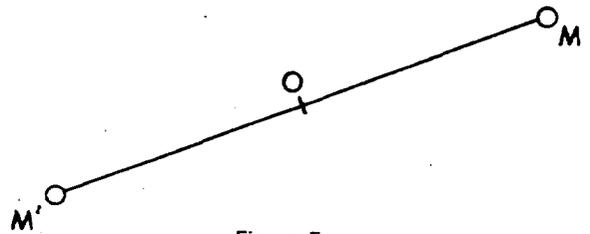


Figura 5

cada punto M se obtiene llevando sobre la recta MO una longitud $OM' = MO$. La simetría de punto es una congruencia directa.

Decimos que una figura F tiene al punto O (fig. 6) como centro de simetría, si al unir un

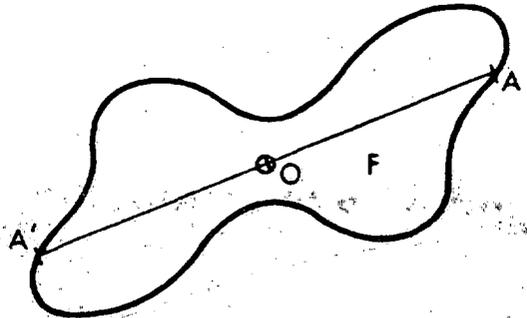


Figura 6

punto A cualquiera de la figura con O y llevar $OA' = AO$ el punto A' también pertenece a la figura.

Podemos decir que una figura F es simétrica respecto de un punto O cuando es invariante respecto a la congruencia directa «simetría de centro O » ó sea cuando la «simetría de centro O » es una congruencia de F .

De esta manera hemos establecido en térmi-

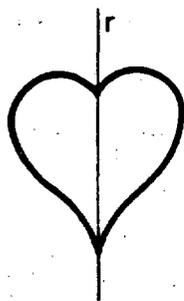


Figura 7

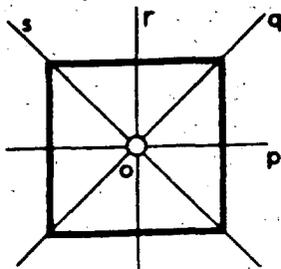


Figura 8

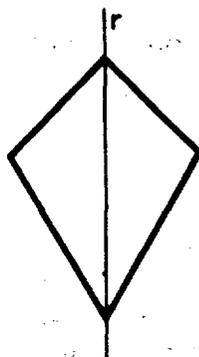


Figura 9

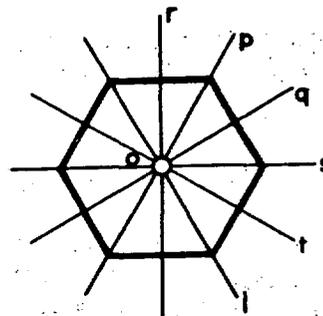


Figura 10

nos de congruencia las definiciones de Simetría de recta y punto que se conocen en la geometría elemental.

Observemos que las figuras con simetría de recta o de punto acusan una cierta regularidad de forma. El concepto de SIMETRIA es precisamente el concepto de regularidad de forma de las figuras. Existen distintos grados de regularidad en las figuras y por tanto de simetría. Las figuras 7, 8, 9, y 10 son simétricas pero evidentemente las figuras 7 y 9 tienen simetría menos fuerte que las otras y a su vez tiene más simetría la figura 10 que la figura 8.

Analicemos cada una de estas figuras.

La figura 7 tiene simetría respecto del eje r.

La figura 8 tiene simetría respecto de los ejes s, r, p, y q; y respecto del punto O.

La figura 9 sólo tiene simetría respecto del eje r.

La figura 10 tiene simetría respecto del punto O y respecto de los seis ejes r, p, q, s, t, l.

En la figura 11 representamos un paralelogramo que tiene solamente centro de simetría y es invariante respecto de una rotación de centro O y ángulo 180° . En general toda figura que posea centro de simetría es invariante respecto de alguna rotación, por ejemplo el cuadrado de la figura 8 es invariante respecto de las

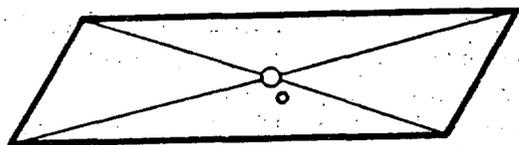


Figura 11

rotaciones de centro O y ángulos de 90° , 180° , 270° y 360° .

Las rotaciones son congruencias directas luego entre las congruencias de una figura con centro de simetría figuran las rotaciones.

El estudio de las congruencias de una figura nos servirá para sistematizar los tipos de simetría.

3. SUBGRUPOS FINITOS DEL GRUPO DE CONGRUENCIAS DIRECTAS CONSTITUIDOS POR GIROS

El producto de dos giros sólo es un giro cuando aquellos tienen el mismo centro. Esto se demuestra haciendo uso de los números complejos. La transformación $\mu - \alpha = (z - \alpha)e^{i\varphi}$ es el giro de centro α y ángulo φ . El producto de dos transformaciones de este tipo solamente es un giro cuando los centros coinciden. Es evidente que el producto de dos giros del mismo centro es otro giro del mismo centro cuyo ángulo es la suma de los ángulos de aquellos.

Los giros de centro un punto del plano y de ángulos $0, \frac{2\pi}{n}, 2 \times \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) \times \frac{2\pi}{n}$ forman un subgrupo que designamos por C_n , cualquiera que sea n. La demostración es inmediata.

Todos los grupos finitos formados por giros son de este tipo.

Todo grupo finito es cíclico (generado como potencias de uno de sus elementos) ó se compone de subgrupos cíclicos. Se da el primer caso cuando el número de elementos que lo

componen es primo; se da el segundo caso cuando no lo es, en cuyo caso a cada divisor corresponde un subgrupo cíclico.

Todos los grupos cíclicos son del tipo C_n . Si $\vartheta = \{ I, S, S^2 \dots S^{h-1}/S^h = I \}$ es un grupo cíclico, los ángulos forman una progresión aritmética del tipo $0, K\beta, 2K\beta, \dots (h-1) K\beta$ siendo

$$\beta = \frac{2\pi}{h} \text{ y } \vartheta C_h \text{ por ser } o, k, 2k, \dots (h-1) k$$

un sistema completo de números incongruentes módulo h , ya que h y k son primos entre sí.

Los grupos C_n tienen una importancia especial a efectos de simetría. Están ligados a los polígonos regulares de n lados a los que dejan invariantes, es decir los elementos de C_n son congruencias de tales polígonos.

En la figura 12 representamos un polígono regular y los ángulos de C_n , su grupo de congruencias.

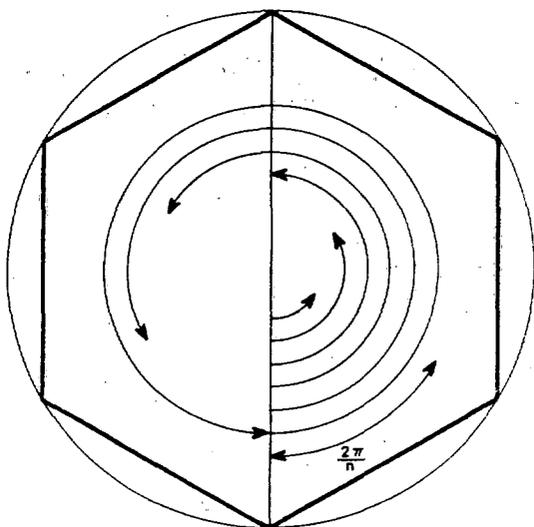


Figura 12

4. SUBGRUPOS FINITOS DEL GRUPO DE CONGRUENCIAS DIRECTAS E INVERSAS CONSTITUIDOS POR GIROS Y SIMETRÍAS DE RECTA

Dado un grupo de congruencias, las congruencias directas del mismo constituyen un subgrupo.

Dado un grupo finito constituido por giros y

simetrías de recta, los giros del mismo, por ser congruencias directas, forman un subgrupo que será un C_n . Puesto que el producto de dos simetrías es un giro del grupo, todos los ejes de simetría han de pasar por el centro de giro.

Hemos visto en el apartado anterior que a cada C_n se asocia un polígono regular de n lados cuyo centro es el centro de giro. Si a los giros que componen C_n añadimos las simetrías de recta que resultan de unir el centro O con vértices y puntos medios de los lados del polígono (fig. 13) obtenemos un sobreggrupo de C_n que designamos D_n . La comprobación de que D_n es un grupo es inmediata.

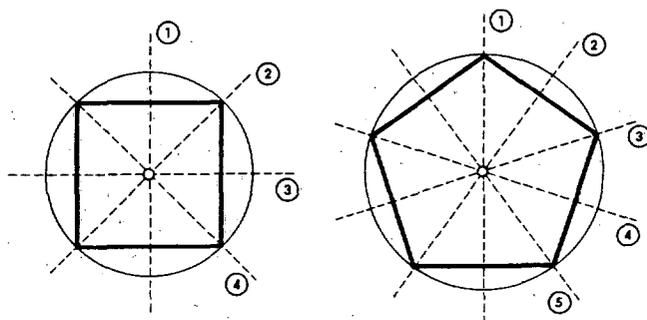


Figura 13

Los únicos grupos que existen constituidos por giros y simetrías de recta son los D_n . En efecto, cualquier eje de simetría formará un ángulo β con el eje correspondiente a un vértice del polígono y ha de verificarse $2\beta = K\alpha$ ($\alpha = \frac{2\pi}{n}$) ó sea $\beta = K \times \frac{\alpha}{2}$, ya que el producto de dos simetrías de recta es un giro de ángulo doble del que forman las rectas y ha de ser un giro de C_n (ángulo $k\alpha$). Cualquiera que sea el entero k el eje de simetría es uno de los citados. Respecto a los grupos D_n los polígonos regulares son invariantes, es decir los elementos de D_n son congruencias del polígono regular.

5. TIPOS DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA PLANA

Los grupos finitos C_n, D_n , nos definen los distintos tipos de simetría de las figuras. Sea ϑ un grupo finito C_n ó D_n .

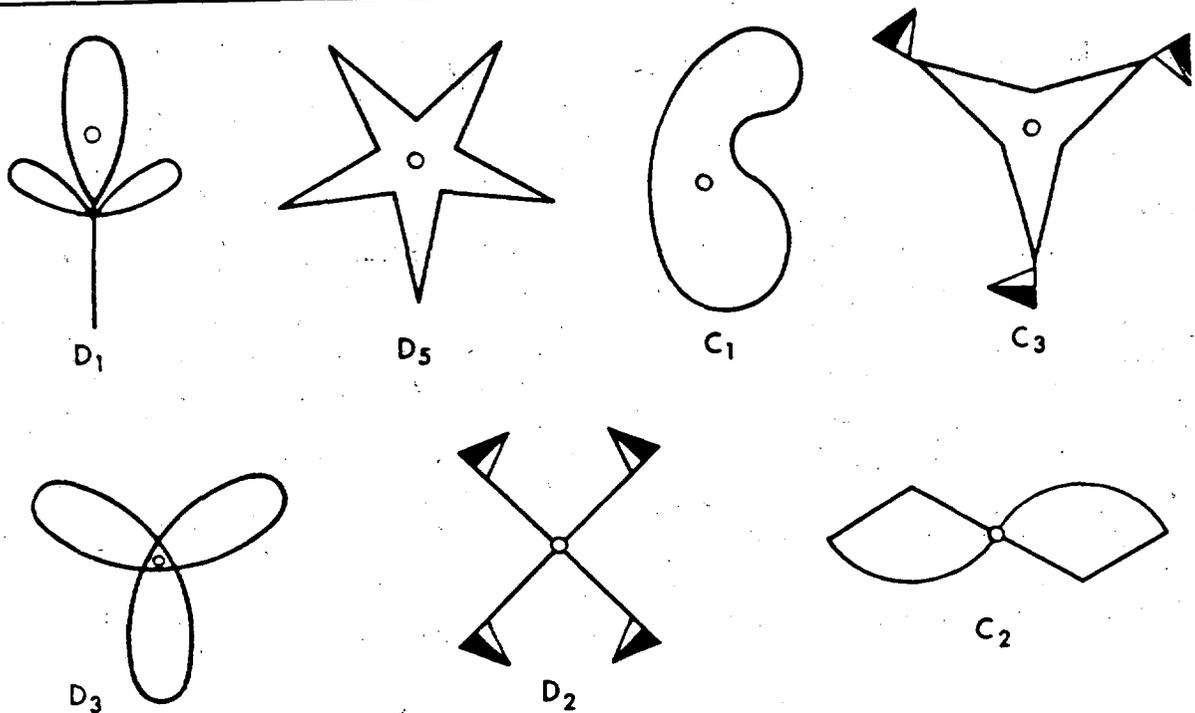


Figura 14

Definición.— Se dice que el grupo finito ϑ aplicado en el centro de gravedad de una figura F es **grupo de congruencia de F** , si F es invariante respecto a todos los elementos del grupo ϑ .

Definición 2.— Se dice que una figura F posee **simetría del tipo ϑ** , si ϑ es un grupo de congruencia de F .

Nota.— Puede ocurrir que una figura posea más de un tipo de simetría. Por ejemplo, si posee el tipo C_8 también poseerá C_4 y C_2 ; además todas las figuras poseen la simetría C_1 . Se sobreentiende que cuando hablamos del tipo de simetría de una figura nos referimos al tipo de mayor subíndice posible. (En el ejemplo que acabamos de citar 4 y 2 son divisores de 8 y en todo grupo finito cíclico existen subgrupo de orden los divisores del orden del grupo. Es decir es un caso de una propiedad general).

En la figura 14 indicamos varias figuras con el tipo de simetría correspondiente.

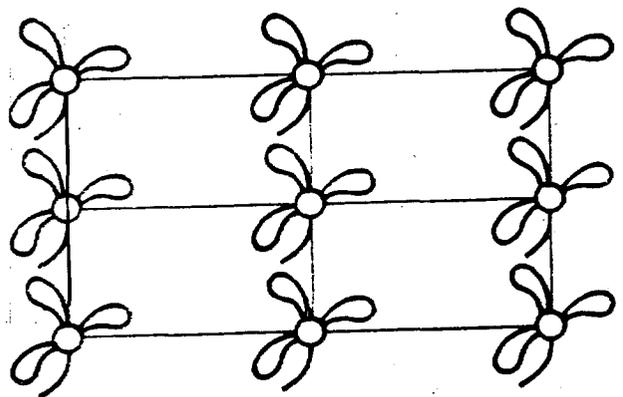


Figura 15

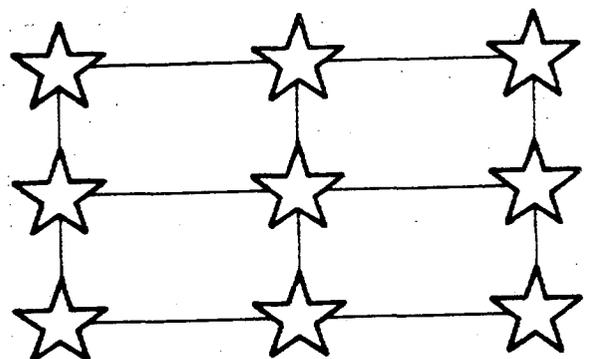


Figura 16

6. SIMETRIA DE REDES PLANAS

Es frecuente la distribución regular en un plano a efectos decorativos de un motivo orna-

mental con simetría o no (una flor, un dibujo geométrico, etc.).

Existen diversos modos de repetir con regularidad un motivo ornamental para producir un efecto estético.

El motivo repetido en la figura 15 no tiene simetría ó lo que es lo mismo tiene la mínima simetría C_1 , mientras que el motivo que se repite en la figura 16 tiene una simetría elevada de tipo D_5 . Sin embargo las figuras 15 y 16 tienen la misma ordenación en el plano de sus motivos correspondientes.

Por el contrario las figuras 17 y 18 repiten el mismo motivo ornamental con disposición diferente.

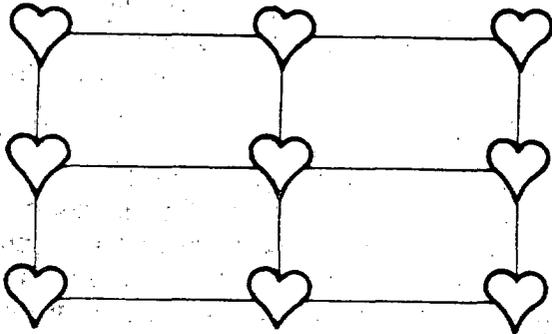


Figura 17

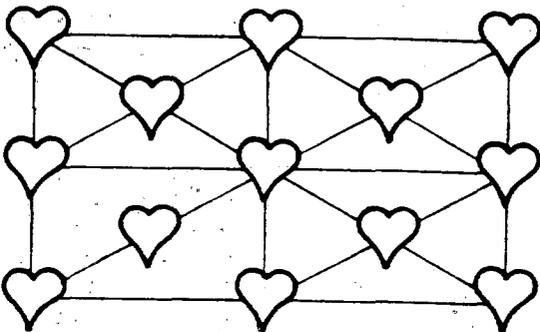


Figura 18

Es decir existe una simetría de ordenación en el plano además de la simetría de motivo ornamental. Si se ponen de acuerdo ambas simetrías tendremos la simetría de ornamentación plana. Hemos estudiado en el apartado 5 la simetría de figuras ó sea la de los motivos ornamentales posibles. Hemos caracterizado los ti-

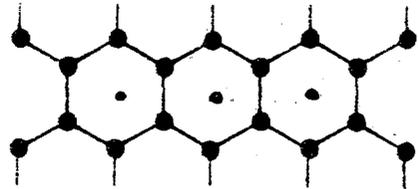
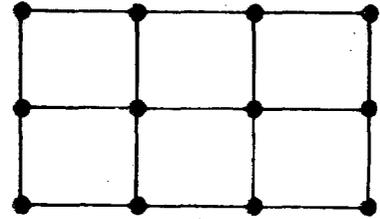
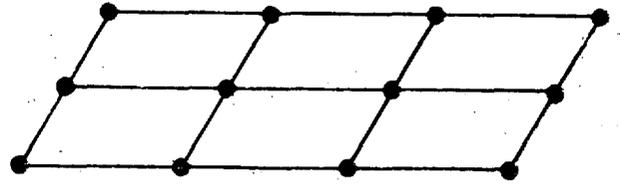


Figura 19

pos de simetría de figuras, conocidos ya por Leonardo da Vinci, por medio de los grupos finitos $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots; D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$

Ahora vamos a estudiar la simetría de ordenación en el plano.

Una ordenación viene caracterizada por una red de puntos (fig. 19) que está completamente determinada por el elemento básico ó malla (fig. 20). Algo así como el módulo ó pieza básica (loseta) para llenar el plano.

Supongamos al plano de extensión indefinida ocupado por una red de puntos con una malla determinada. Cada punto de la red es indistinguible de los demás. Un observador tendría la misma visión de la red cualquiera que sea el punto desde el que la observe.

Si tomamos como referencia de coordenadas (fig. 21) $R = \{ 0; \bar{e}_1, \bar{e}_2 \}$ resulta que los vértices de la red tienen coordenadas enteras. O sea cualquier punto M de la red tendrá de coordenadas (p,q) tales que $p,q \in Z$. Inversa-

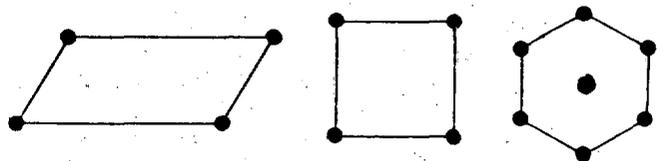


Figura 20

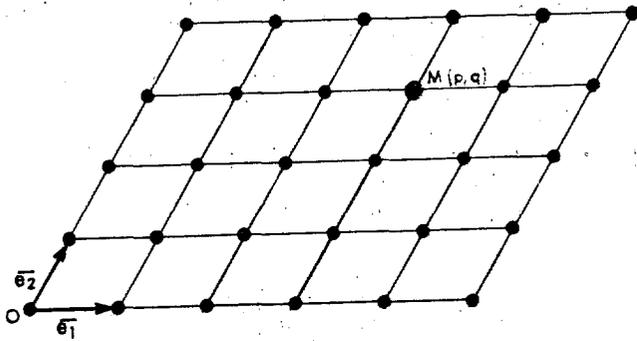


Figura 21

mente, todos los puntos de coordenadas enteras pertenecen a la red.

Está claro que la red es invariante respecto del grupo de traslaciones.

$$G_t = t = \{ m \bar{e}_1 + n \bar{e}_2; m, n \in Z \}$$

(Z = conjunto de números enteros).

Si observamos las redes de la figura 22 apreciamos que tienen diferente grado de simetría. A simple vista nos parece que la red c) tiene una regularidad más compleja que la red b) y esta que la a). Para dar precisión a estas ideas hemos de acudir al lenguaje de la teoría de grupos finitos.

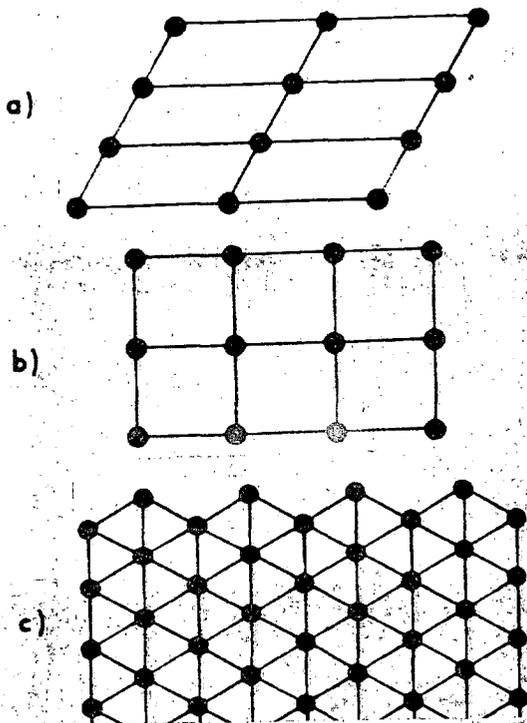


Figura 22

Los vértices de las redes son centros de simetría de las mismas. Los vértices de la red a) tienen la simetría C_2 , los vértices de la red b) tienen la simetría D_4 , y los vértices de la red c) tienen la simetría D_6 . Ahora bien existe sólo un número finito de redes posibles como vamos a justificar en el apartado siguiente.

7. SIMETRÍAS DE FIGURAS COMPATIBLES CON UNA RED DE PUNTOS

Vamos a demostrar que los únicos tipos de simetría compatibles con una disposición de puntos en red son C_n, D_n ($n = 1, 2, 3, 4, 6$).

Sea O un vértice de la red que suponemos tiene la simetría C_n ó D_n . Si A_1 (fig. 23) es el vértice más próximo a O, los puntos A_2, A_3, \dots, A_n tales que resultan de girar A_1 alrededor de O ángulos $\frac{2\pi}{n}, \frac{2 \cdot 2\pi}{n}, \dots, (n-1) \frac{2\pi}{n}$ pertenecerán también a la red por la hipótesis de que O tiene la simetría C_n ó D_n .

Dentro del círculo circunscrito al polígono regular de n lados **no puede haber ningún punto** de la red pues los vértices del polígono son los puntos de la red más próximos a O. Si consideramos aplicado en O el vector \vec{OP} equipolente a \vec{OA}_1, \vec{OA}_2 resultará que P es otro punto de la red; para que este punto se encuentre fuera del círculo ha de ser $OP > R$ ó bien $l_n > R$ observemos que l_n

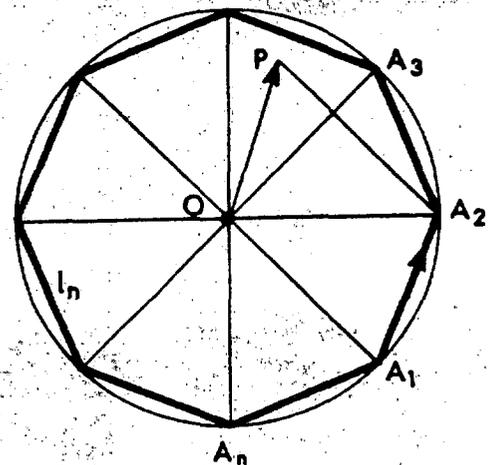


Figura 23

SIMETRÍA Y ORNAMENTACION EN EL PLANO

es el lado del polígono regular de n lados y para que $l_n > R$ ha de ser $n < 6$ pues $l_6 = R$. También P puede pertenecer a la circunferencia.

Las únicas simetrías posibles en principio son C_n, D_n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$, y 6).

Todavía se produce una reducción pues el ángulo girado ha de ser submúltiplo de 180° (fig. 24), ya que si los puntos O, A_1 pertenecen a la red también pertenece el punto A'_1 simétrico de A_1 respecto de O . Es decir $n = 2K$

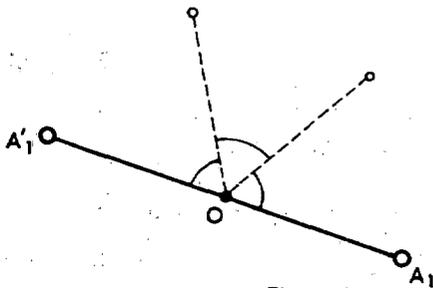


Figura 24

$$\frac{180}{k} = \frac{360}{2k} = \frac{360}{n}$$

Valores de $n = 2$	Simetría	Ángulos de giro
$n = 0$	$C_{1'}, D_1$	0°
$n = 2$	$C_{2'}, D_2$	$0^\circ, 180^\circ$
$n = 4$	$C_{4'}, D_4$	$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$
$n = 6$	$C_{3'}, D_3$ $C_{6'}, D_6$	$0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$

Resumiendo, las únicas posibles simetrías de la red en sus vértices son:

$$C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_6 \\ D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4 \ D_6$$

o lo que es lo mismo los vértices sólo pueden ser polos de órdenes 1, 2, 3, 4 y 6 (Denominamos polo de orden n de una figura un punto O tal que tiene la simetría C_n).

8. TIPOS DE REDES PLANAS

A continuación dibujamos los tipos de redes destacando la correspondiente malla. A la derecha de cada una se indican las simetrías de

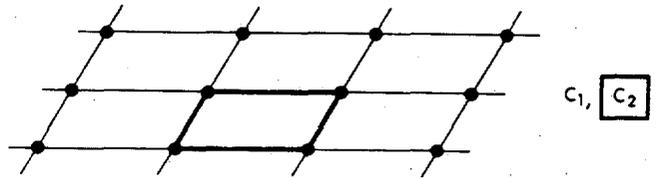


Fig. 25.—Malla: Paralelogramo cualquiera.

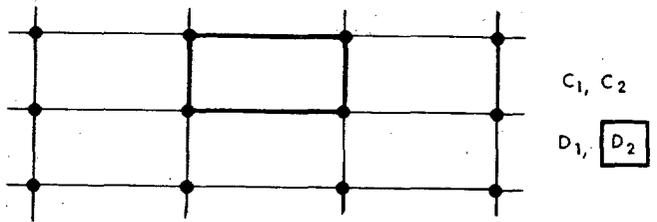


Fig. 26.—Malla: Rectángulo.

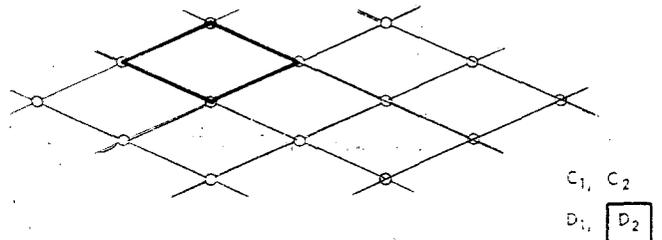


Fig. 27.—Malla: Rombo.

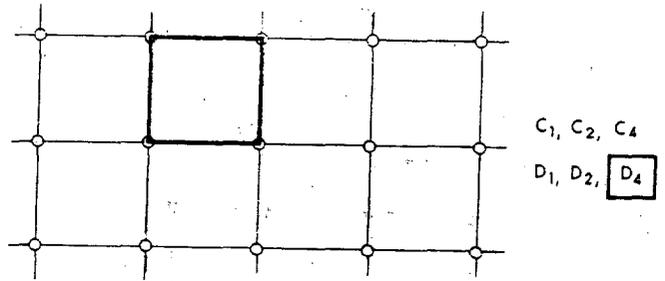


Fig. 28.—Malla: Cuadrado.

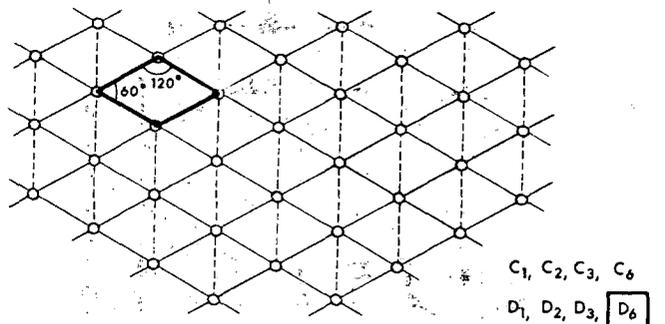


Fig. 29: Malla: Rombo de diagonal igual al lado.

sus vértices resaltando en un recuadro la específica de la red que comprende a las demás.

9. GRUPO DE CONGRUENCIA DE UNA FIGURA. GRUPO DE CONGRUENCIA DE UNA RED

Hay una propiedad general que nos dice que las congruencias de una figura forman **grupo**. Veamos que cumple las condiciones:

a) El producto de congruencias es ley de composición interna.

Esta propiedad se cumple puesto que el producto de dos congruencias que dejan invariante una figura también tiene esta propiedad.

b) Tiene la propiedad asociativa.

Esta propiedad se da con carácter general en todas las congruencias no sólo en las que dejan invariante una figura.

c) Tiene elemento neutro.

Puesto que la transformación idéntica es congruencia de cualquier figura.

d) Cada elemento tiene su inverso.

Si una congruencia deja invariante una figura, su inversa también.

Hemos visto que los grupos C_n y D_n caracterizan las simetrías en el plano.

En el apartado anterior hemos comprobado que sólo existen cinco tipos de redes de puntos que tienen simetría de los tipos C_n ó D_n en sus vértices. Estas redes no sólo son invariantes con relación a los respectivos C_n ó D_n sino también a otras congruencias. Por ejemplo son invariantes respecto a las traslaciones indicadas en el apartado 6, y además tienen las congruencias que citamos a continuación.

Malla paralelogramo

Congruencias C_2 en los centros de los paralelogramos y en los centros de los lados.

Malla rectángulo

Congruencias D_2 en los centros de los rectángulos, y en los centros de los lados.

Malla rombo

Congruencias D_2 en los centros de los rombos.

Deslizamientos respecto a las rectas que unen puntos medios de lados concurrentes de cada rombo. (Recuérdese que deslizamiento es la simetría de recta seguida de traslación paralela al eje de simetría).

Malla cuadrado

Congruencias D_4 en los centros de los cuadrados.

Congruencias D_2 en los centros de los lados.

Deslizamientos respecto a las rectas que unen puntos medios de los lados concurrentes de cada cuadrado.

Malla rombo con diagonal igual al lado

Cada rombo está formado por dos triángulos equiláteros con un lado común. En los centros de estos triángulos equiláteros congruencias D_3 .

En los puntos medios de los lados de los triángulos equiláteros congruencias D_2 .

Deslizamientos respecto a las rectas que unen los puntos medios de los lados de los triángulos.

Los subgrupos de congruencias C_n ó D_n ($n = 1, 2, 3, 4$ y 6) situados en puntos representativos tal como acabamos de describir, junto con el subgrupo de las traslaciones de la red, y los deslizamientos, nos dan una idea más exacta de la simetría de las redes de puntos, que el grupo de sus congruencias.

Observemos que los subgrupos típicos descritos no son disjuntos, pues algunas congruencias son compartidas. Además estos subgrupos tampoco cubren el grupo de las congruencias de la red pues los deslizamientos quedan fuera de los mismos.

10. SIMETRIA DE ORNAMENTACION

Vamos a estudiar las redes planas con figuras, que tienen simetría compatible con la red, situadas en cada uno de sus vértices.

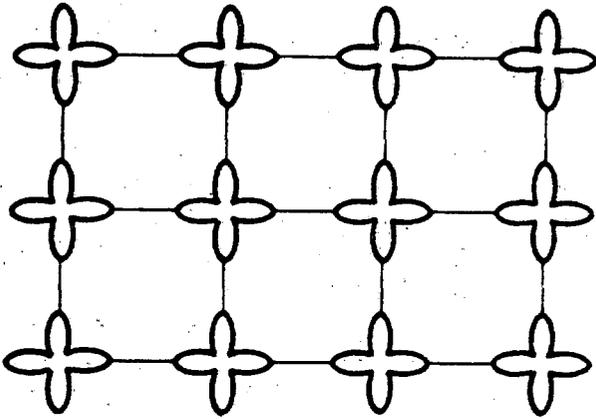


Figura 30

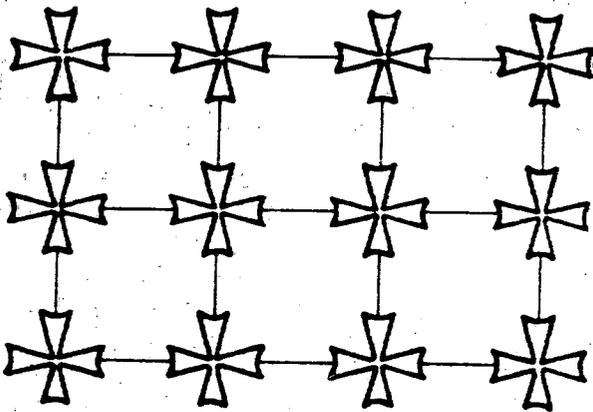


Figura 31

Comparamos las figuras 30 y 31 y observamos dos tipos de ornamentación que son esencialmente iguales tanto desde el punto de vista de la regularidad de ordenación de los motivos en el plano como desde el punto de vista de la regularidad del motivo mismo. Es decir, una red cuadrada define la ordenación en ambas figuras, y una misma simetría D_4 tienen los motivos ornamentales de ambas. Decimos por ello que las figuras 35 y 36 tienen la misma simetría de ornamentación.

Las figuras 30 y 31 son invariantes para cada una de las operaciones de D_4 en cualquiera de sus vértices; y también son invariantes para cada una de las traslaciones del grupo que define la red. Además son invariantes respecto a los D_4 situados en los centros de los cuadrados, respecto a los D_2 situados en los puntos medios de los lados, y respecto a los deslizamientos de ejes las rectas que unen los pun-

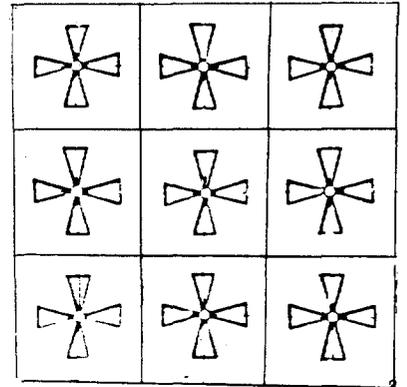
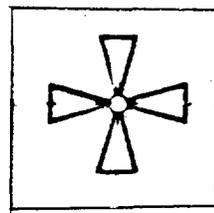


Figura 32

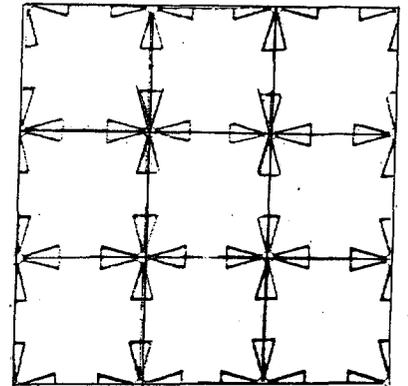
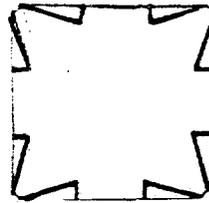


Figura 33

tos medios de los lados concurrentes de los cuadrados y de traslación igual a la mitad de la diagonal del cuadrado de malla.

La simetría característica (de máximo orden) de la malla cuadrada es la D_4 .

Hemos visto que existen dos familias de centros cuaternarios que equivale simplemente a llenar el plano con uno u otro tipo de loseta que se indican en las figs. 32 y 33. Cada loseta tiene simetría D_4 .

Las losetas que corresponden a la simetría D_2 en los centros de los lados de la malla cuadrada se ven en la figura 34 (puntos medios de lados verticales) y figura 35 (puntos medios de lados horizontales).

Como vemos estas losetas tienen simetría D_2 y sólo de su yuxtaposición resulta una simetría de orden superior.

Igualmente en la figura 36 se destacan los ejes de deslizamiento.

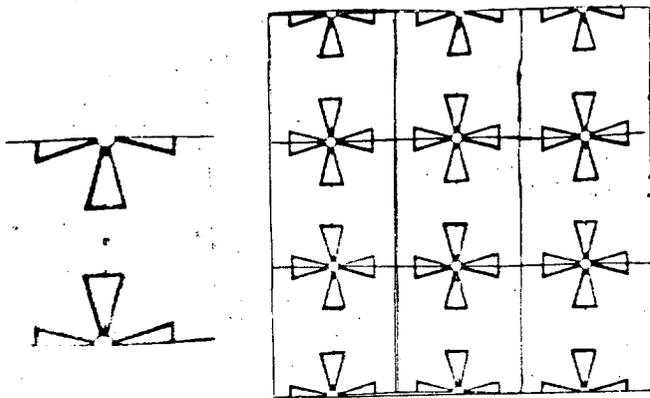


Figura 34

se produzca la repetición homogénea de un mismo motivo ornamental.

Existen infinitas figuras con simetría D_4 que podríamos colocar en los vértices de la red cuadrada pero todas darían lugar al mismo tipo de ornamentación que hemos analizado y que queda caracterizada por las congruencias respecto de las cuales es invariante.

¿Cuántos tipos de simetría de ornamentación son posibles? A simple vista parece que son diez según hemos determinado en el apartado 7.

Realmente son más según veremos, pues algunas de las allí consideradas se desdoblán en otras con diferentes simetrías secundarias ó con deslizamientos.

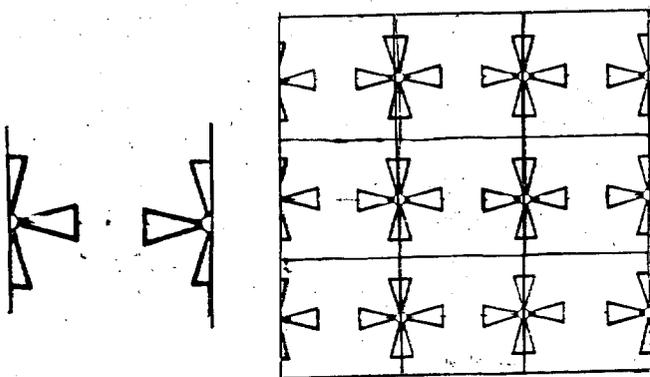


Figura 35

11. TIPOS DIFERENTES DE SIMETRÍA DE ORNAMENTACION EN EL PLANO

Desde tiempos antiguos han aparecido en las manifestaciones artísticas distintos tipos de ornamentaciones planas, caracterizadas por la repetición regular de un motivo. Sin embargo, hasta época reciente no ha sido sistematizado el estudio de estas simetrías. En 1924 George Polya demostró que sólo existen 17 grupos de ornamentación a los cuales se reducen los demás. Polya nació en Budapest en 1887, estudió en la universidad de su ciudad natal y en las de Viena, Gotinga y París, posteriormente fue profesor en Zurich y en la universidad de Stanford (California). En una carta de 1924 se contiene el artículo «Uber die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene» (sobre la analogía de la simetría cristalina en el plano) (in Zeitschr. f. Kristallographie 60, pág. 278-282). En este artículo están razonados los 17 grupos conservándose un modelo de cada uno de ellos, algunos originales del autor y otros tomados de diferentes manifestaciones artísticas.

También existe otro artículo de la misma fecha de Paul Niggli, profesor de la universidad de Tubinga, el cual no he podido conseguir. Niggli llega al mismo resultado que Polya.

Parece ser que Polya y Niggli redescubrieron lo que ya era conocido en 1891 por el cristalógrafo ruso Fedorov. Este había señalado que C. Jordan había descrito en 1869 a 16 de los 17

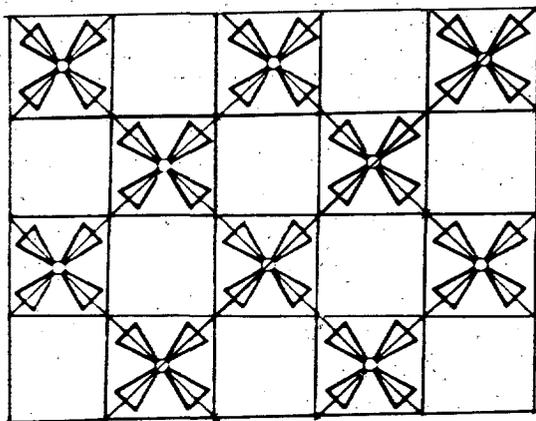


Figura 36

Hemos analizado la simetría de ornamentación correspondiente a una red de puntos de malla cuadrada con motivos ornamentales en los vértices de la máxima simetría compatible con la red, esto es D_4 . La ornamentación examinada puede concebirse como el problema de llenar el plano con losetas iguales de modo que

grupos, y a su vez el que se faltaba a Jordan fue reconocido por L. Sohncke en 1874 el cual ignoró tres de los restantes grupos.

Los distintos tipos de formas cristalinas constituyen también un problema de disposición simétrica de la materia en el espacio. Se ha demostrado que sólo pueden existir 230 formas cristalográficas. Obras maestras a este respecto, con una gran aridez, por supuesto, fueron:

1. Kristallsystem und Kristallstruktur (Sistemas y estructuras cristalinos) (Leipzig 1891 por Schönflies).
2. Geometrische Kristallographie des Diskontinuums.
(Cristalografía geométrica del discontinuo).
(Leipzig 1919 por Paul Niggli).

Los tipos de ornamentación plana se conocían en el arte egipcio así como en el arte musulmán. La Alhambra de Granada (siglo XIII) marca el momento culminante de la actividad decorativa de llenar planos con diseños que se repiten. En este monumento se encuentran representados los 17 grupos. La realidad del arte se adelantó al lenguaje matemático idóneo.

Al contrario ocurre con la ornamentación espacial, es decir con las estructuras cristalinas. Algunas formas cristalinas son adoptadas por muchos minerales, otras lo son por escaso número, e incluso para alguna forma de desconoce la existencia de mineral que la adopte. Aquí el conocimiento teórico se adelantó al conocimiento real.

Finalmente mencionaremos a un artista moderno, el holandés Maurits ESCHER (1898-1972) que representó con diversas figuras animadas (angeles, campesinos, caballo, jinete, escarabajos; etc.) modelos ingeniosos de los 17 grupos.

12. LOS 17 GRUPOS DE ORNAMENTACION

A continuación vamos a representar los 17 grupos de ornamentación destacando sus congruencias. Reproducimos algunas manifestaciones artísticas en donde puede apreciarse la unidad esencial del grupo dentro de la diversidad de motivos.

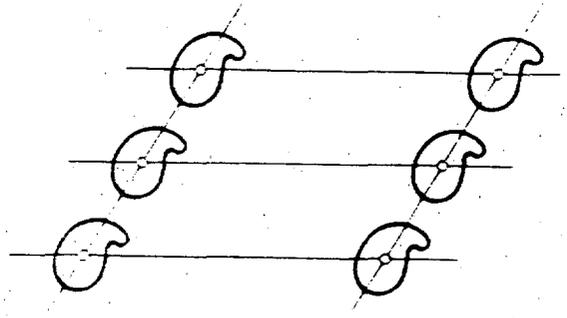


Figura 37

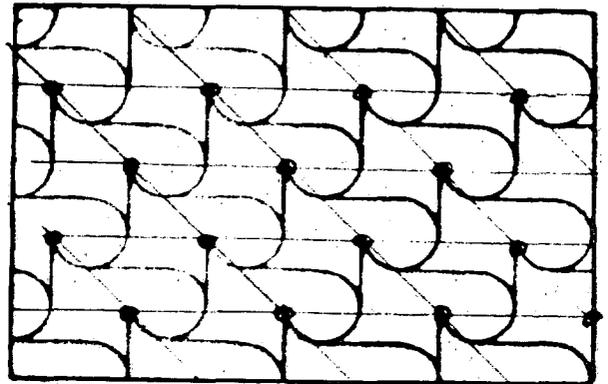


Figura 38

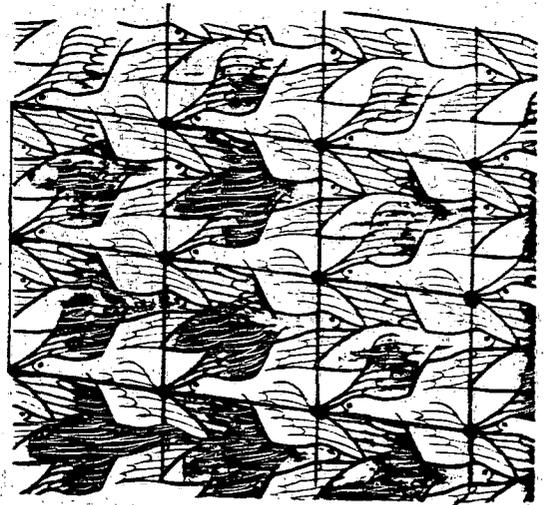


Figura 39

1.º grupo: Simetría C_1 en una red oblicua cualquiera. Viene representado en la figura 37.

En la figura 38 hemos representado el modelo del artículo de Polya. A su vez en la figura 39 correspondiente a un diseño de Escher utilizando la técnica del contracambio hemos

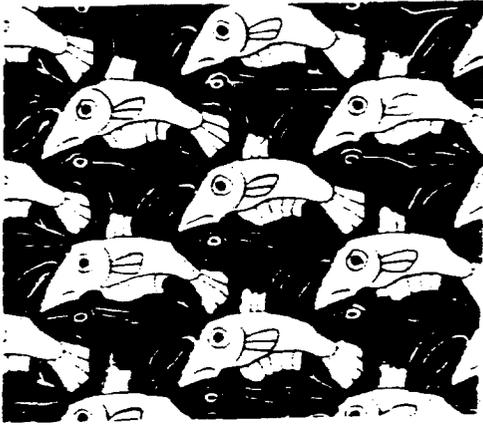


Figura 40

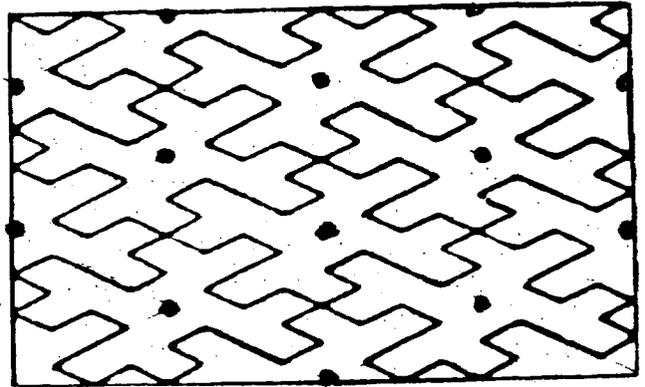


Figura 43

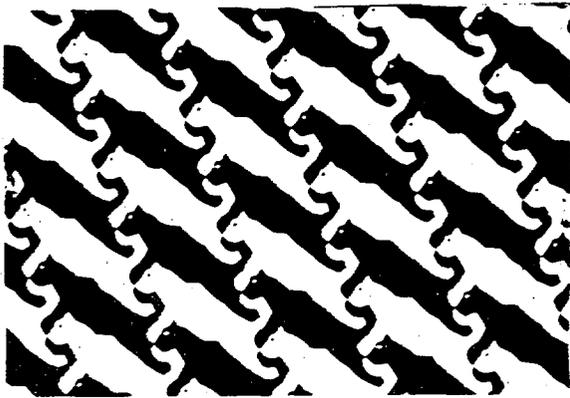


Figura 41

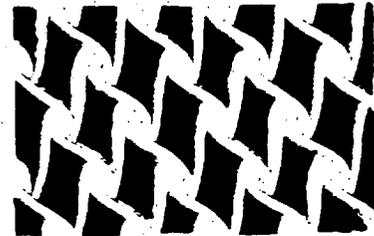


Figura 44

destacado la posible red oblicua igual que en el diseño de Polyá.

¿Qué tiene en común ornamentaciones tan dispares como las que hemos representado en las anteriores figuras y en las figuras 40 y 41? Simplemente que son invariantes respecto a las traslaciones de una red oblicua sin tener otras congruencias.

La figura 40 representa figuras duales pez-

rana que llenan el plano. En la figura 41 el artista japonés Michio Kubo utilizó la misma técnica de contorno y contracontorno que es muy antigua en las manifestaciones artísticas y llegó al máximo desarrollo con Escher.

2.º grupo: Simetría C_2 en una red oblicua cualquiera. Viene representada en la figura 42.

En la figura 43 reproducimos un diseño de Polyá. La figura 44 representa un motivo ornamental de una tumba de Tebas.

Todas estas ornamentaciones tan dispares tienen en común que son invariantes respecto a los grupos C_2 situados en los vértices en los centros de los paralelogramos y en los centros de los lados.

Aunque no se mencione todos los grupos son invariantes respecto a las traslaciones de la red.

3.º grupo: Simetría C_3 en una red de rombos de ángulos 60° y 120° (ó sea dos triángulos equiláteros unidos). Viene representado por cualquiera de las figuras 45 y 46.

Existe simetría C_3 en los vértices y en los centros de los triángulos. En la figura 47 repro-

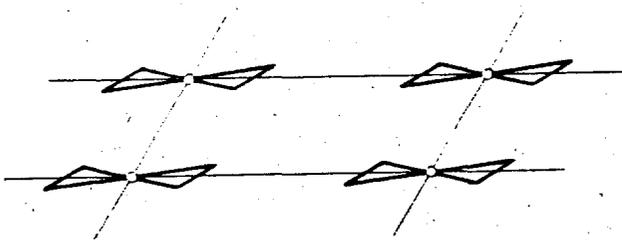


Figura 42

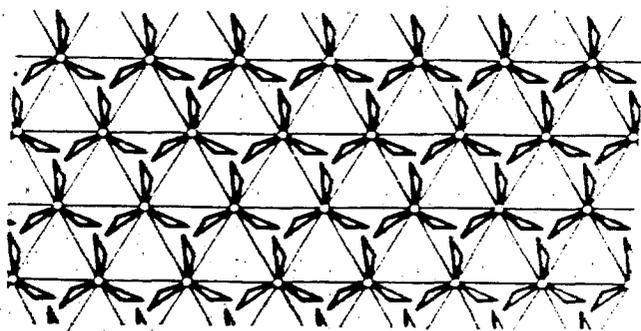


Figura 45



Figura 49

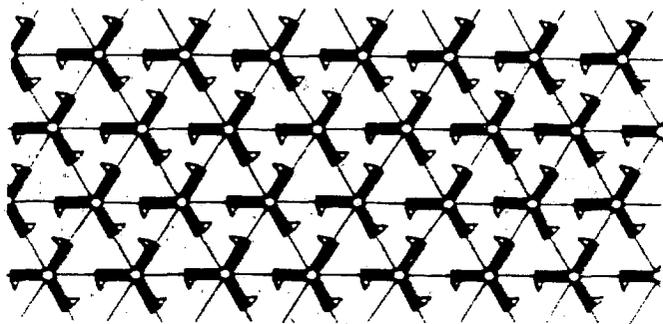


Figura 46

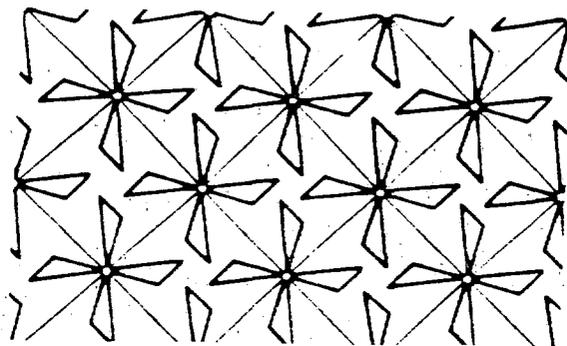


Figura 50

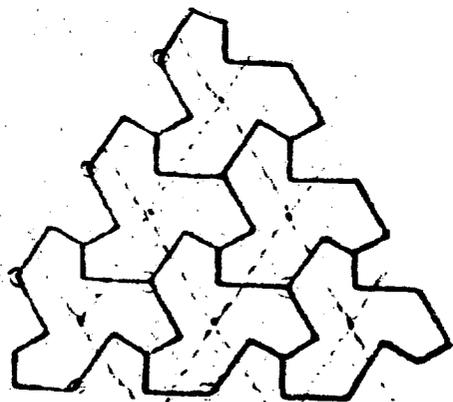


Figura 47

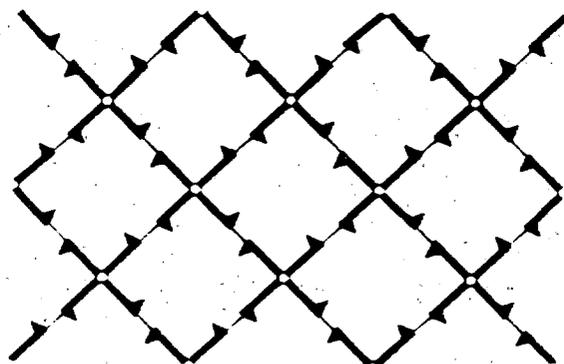


Figura 51

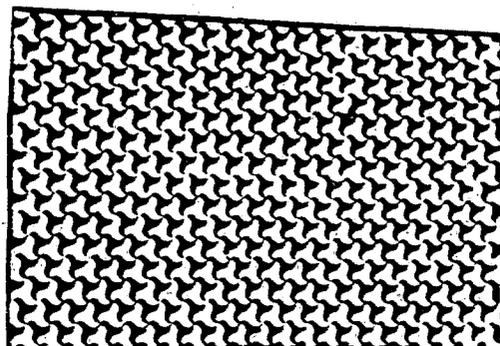


Figura 48

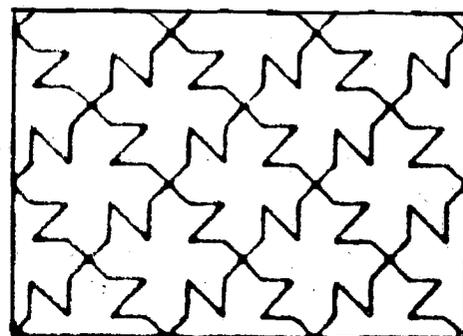


Figura 52

ducimos el esquema de Polya por su interés histórico.

Otras manifestaciones de este grupo se indican en las figuras 48 (Alcázar de Sevilla) y 49 (Escher).

4.º grupo: Simetría C_4 sobre una red cuadrada. Viene representada por las figuras 50 y 51.

Este grupo de ornamentación tiene las con-

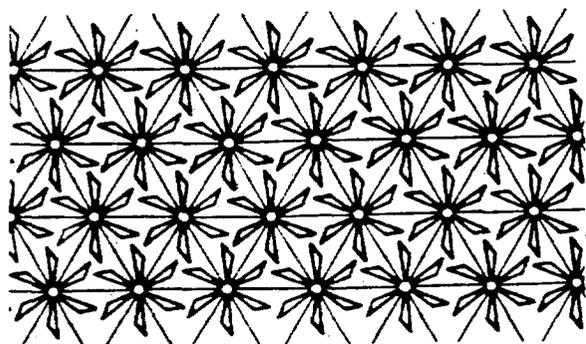


Figura 53

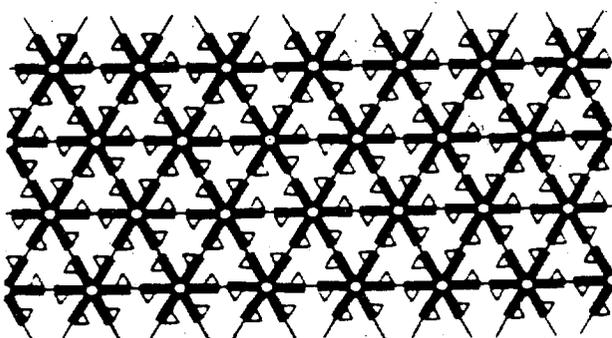


Figura 54

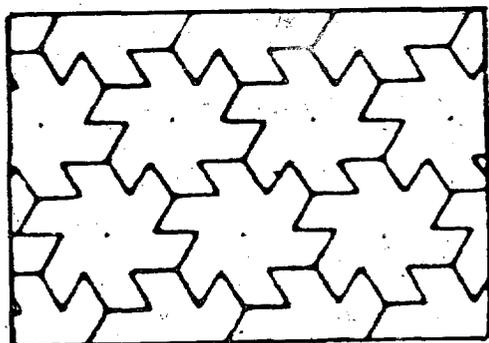


Figura 55

gruencias C_4 en los vértices y en los centros de los cuadrados.

En la figura 52 representamos el diseño de Polya.

5.º grupo: Simetría C_6 sobre una red de rombos formados por triángulos equiláteros adosados tal como la del grupo 3.º Viene representado por cualquiera de las figuras 53, 54 y 55.

Este tipo de ornamentación tiene simetría C_6 en los vértices de la red, simetría C_3 en los centros de los triángulos equiláteros, y simetría C_2 en los puntos medios de los lados de los triángulos.

6.º grupo: Simetría D_1 en una red rectangular.

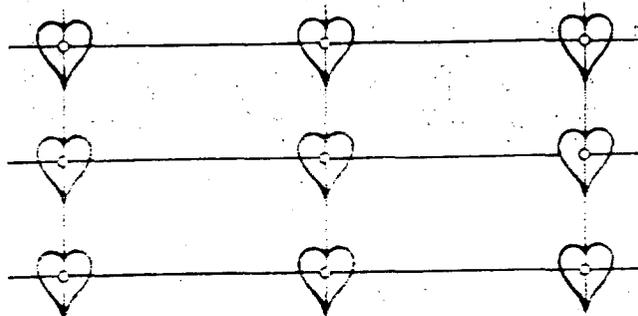


Figura 56

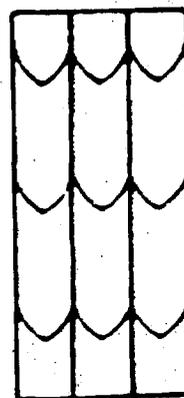


Figura 57

El grupo viene representado por cualquiera de las figuras 56 y 57. Además de las simetrías D_1 en los vértices de los rectángulos tienen las simetrías D_1 en los puntos medios de los lados horizontales.

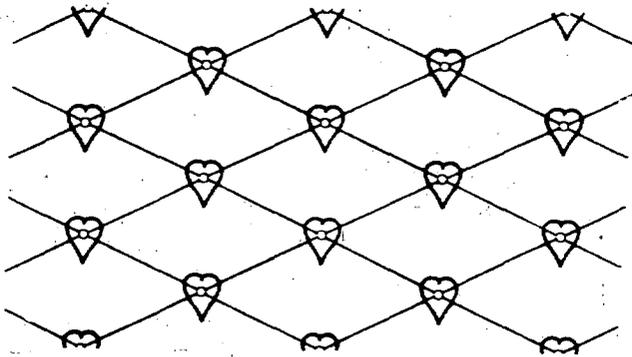


Figura 58

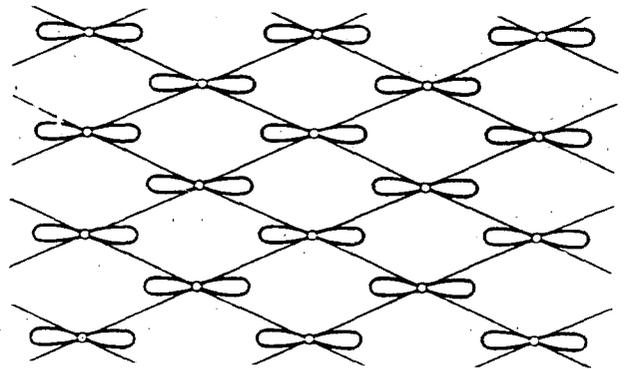


Figura 62

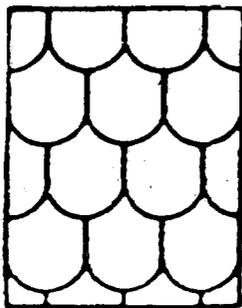


Figura 59

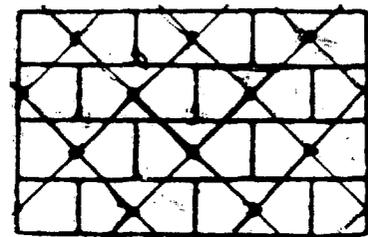


Figura 63

7.º grupo: Motivo ornamental con la misma simetría D_1 pero sobre una red romboide, en vez de rectangular.

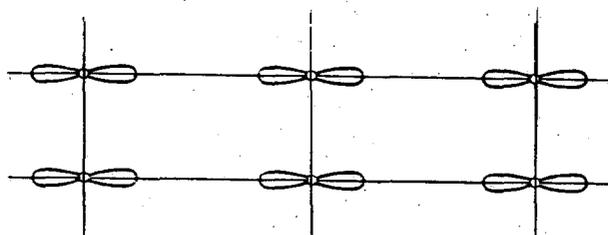


Figura 60



Figura 61

El grupo viene representado por las figuras 58 y 59. Los centros de los rombos tienen también simetría D_1 . Las figuras son invariantes respecto a ejes verticales que unen puntos medios de los lados, y de traslación mitad de la diagonal vertical del rombo.

8.º grupo: Motivo ornamental con simetría D_2 en una red rectangular. Figuras 60 y 61.

A este tipo de ornamentación pertenecen los grupos D_2 aplicados en los centros de los rectángulos y en los puntos medios de los lados.

9.º grupo: El mismo motivo ornamental D_2 del grupo anterior pero situado sobre una red romboidal en vez de rectangular (figuras 62 y 63).

Grupos de congruencia: D_2 en los vértices, D_2 en los centros de los rombos, C_2 en los puntos medios de los lados.

Son congruencias del grupo los deslizamientos de ejes horizontales y verticales que pasan por los puntos medios de los lados y de traslaciones mitad de las diagonales de los rombos.

10.º grupo: Motivo ornamental con simetría D_3 situado sobre una red de rombos formada

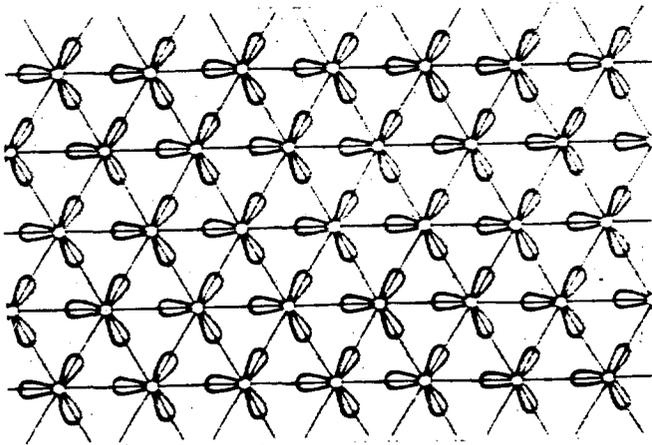


Figura 64

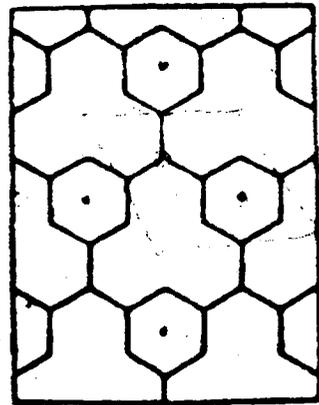


Figura 67

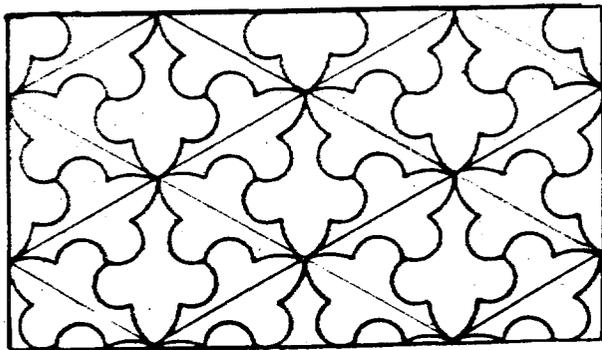


Figura 65

sectrices de los triángulos de la red. Viene representado por las figuras 66 y 67.

Tienen la simetría D_3 , además de en los vé-

por triángulos equiláteros adosados (figs. 64 y 65).

En los vértices simetría D_3 en los centros de los triángulos simetría C_3 (existe doble número de centros ternarios de este tipo que del otro). Son congruencias de este tipo de ornamentación los deslizamientos de ejes paralelos a los lados de los rombos por sus centros.

11.º grupo: El mismo motivo ornamental D_3 del grupo anterior y sobre la misma red pero con los ejes de simetría del motivo sobre las bi-

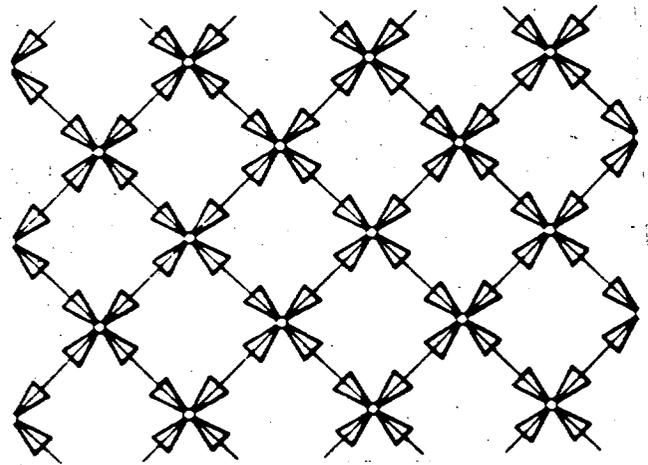


Figura 68

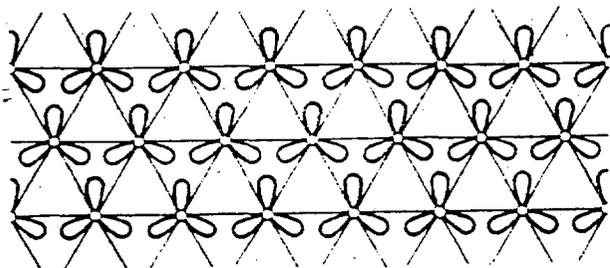


Figura 66

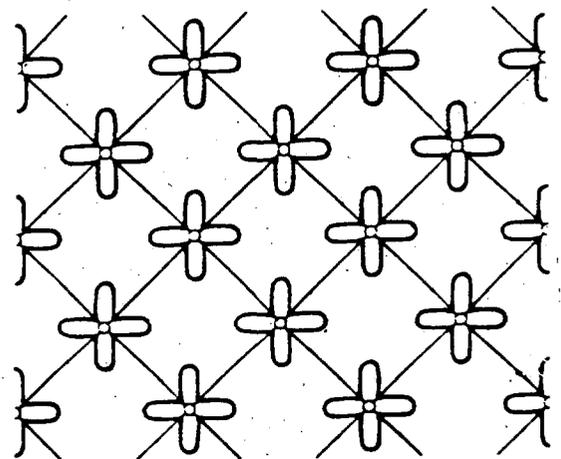


Figura 69

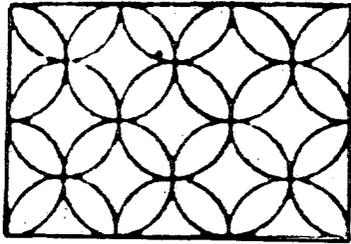


Figura 70

tices de la red, en los centros de los triángulos, es decir por todos los centros ternarios pasan ejes de simetría. Deslizamientos verticales.

12.º grupo: Motivo ornamental de simetría D_4 situado sobre una red cuadrada (figs. 68, 69 y 70).

Tiene simetría D_4 en los centros y vértices, de los cuadrados, simetría D_2 en los centros de los lados. Tiene como congruencias, además

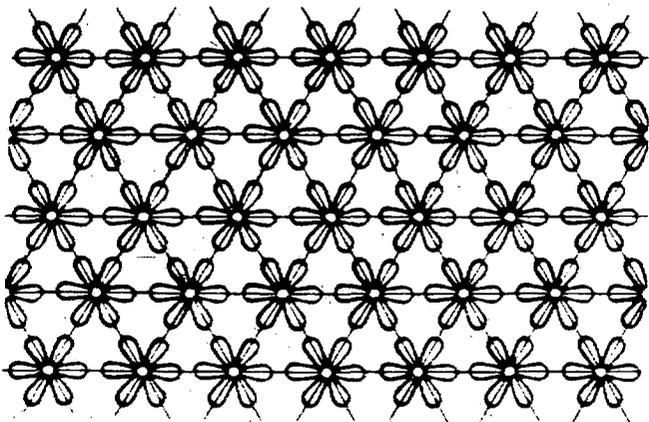


Figura 71

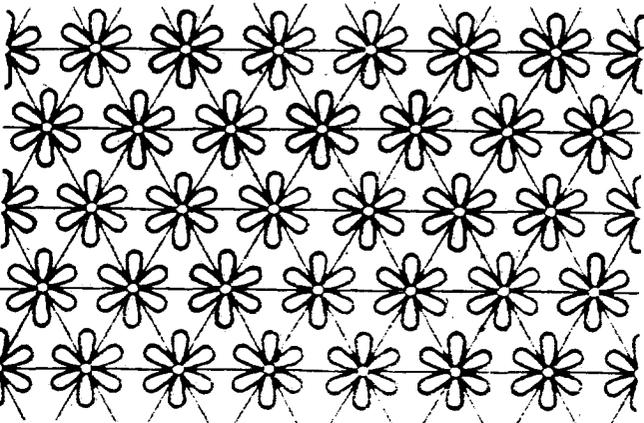


Figura 72

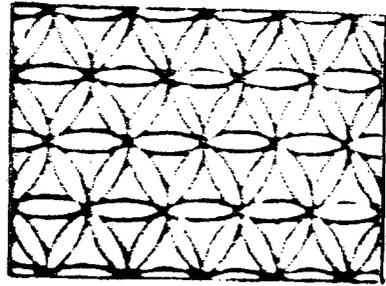


Figura 73

deslizamientos de ejes paralelos a las diagonales por los puntos medios de los lados.

13.º grupo: Motivo ornamental con simetría D_6 sobre rombos constituidos por triángulos adosados (figs. 71, 72 y 73) equiláteros.

Este tipo de ornamentación tiene simetría D_6 en los centros de los triángulos, simetría D_2 en los centros de los lados de los triángulos equiláteros. Es invariante respecto a deslizamientos de ejes paralelos a las diagonales de los rombos por los puntos medios de los lados.

14.º grupo: Formado por motivos ornamen-

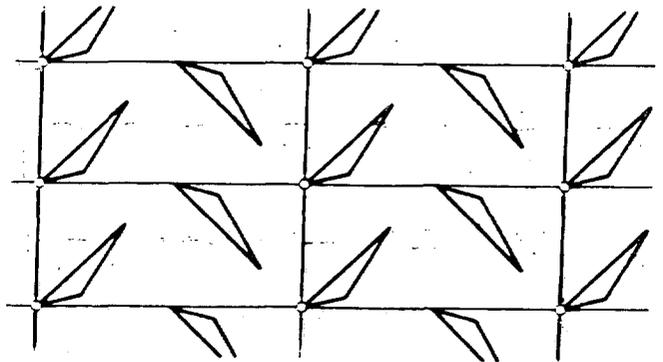


Figura 74

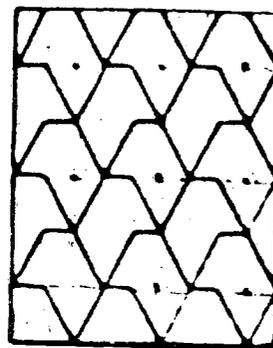


Figura 75

tales de simetría C_1 , situado en los vértices de una red rectangular y en los puntos medios de los lados de la misma dirección la misma figura de simetría C_1 , pero en posición simétrica respecto de estos ejes. Las figs. 74 y 75 representan este grupo.

Este grupo es invariante respecto a los deslizamientos de ejes los de la red de una dirección y las rectas de esa misma dirección por los centros de los rectángulos. Los ejes de deslizamiento son horizontales en la primera figura y verticales en la segunda.

15.º grupo: Este grupo es semejante al anterior con motivos de simetría C_2 en lugar de C_1 (figs. 76 y 77).

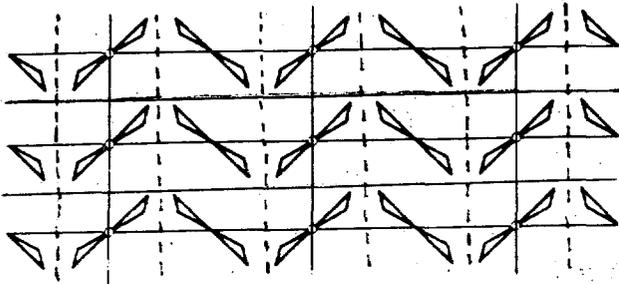


Figura 76

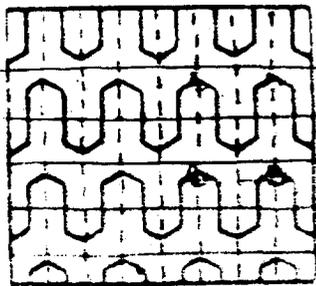


Figura 77

Tiene como simetrías los grupos C_2 en los vértices de los rectángulos y en los puntos medios de los lados horizontales.

Tiene como simetrías de recta aquellas cuyos ejes están indicados de puntos. Presenta además los deslizamientos horizontales cuyos ejes se indican.

16.º grupo: Este grupo está formado por motivos ornamentales de simetría C_2 colocados como se indica en la figura 78 en una red de

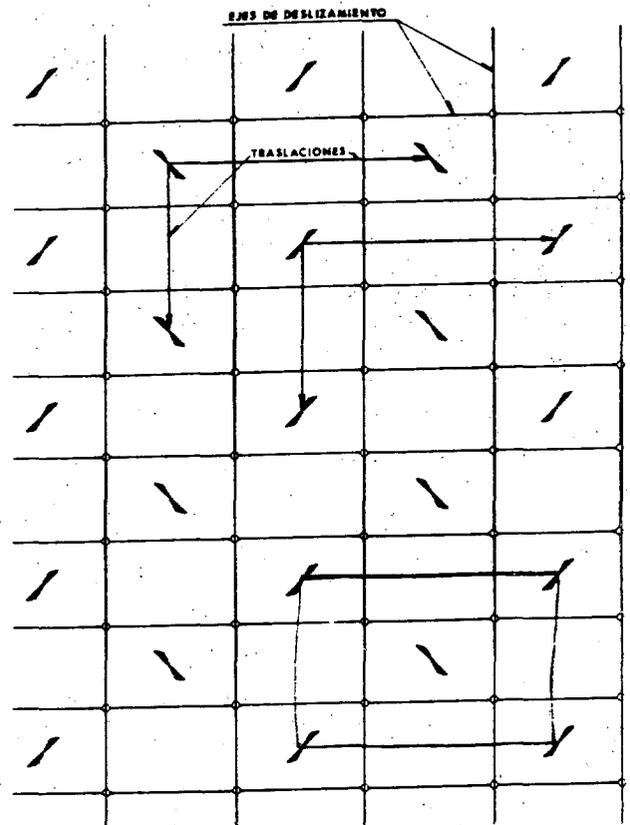


Figura 78

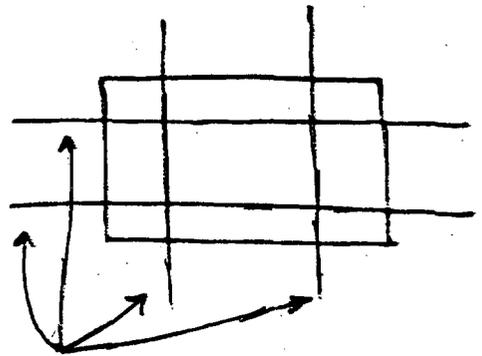


Fig. 79.—Diseño de Polya.

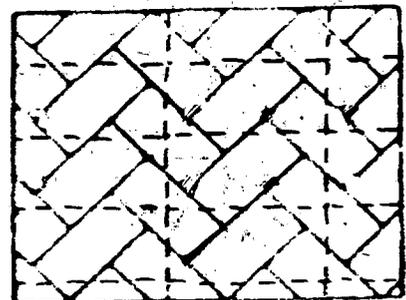


Fig. 80.—Ejes de deslizamiento.

mallas rectangular. La mejor forma de recordar es considerar rectángulos en cuyos cuatro vértices hay un motivo C_2 , y en el centro del rectángulo el motivo simétrico con relación a cualquiera de los lados del rectángulo (se representa abajo en fig. 78).

En la fig. 79 hemos destacado en líneas a trazos los rectángulos y de esta figura se indica la posición de los ejes de deslizamiento en relación con los citados rectángulos en la fig. 80.

17.º grupo Red de malla cuadrada. En cada vértice de un cuadrado se sitúa un motivo de simetría C_4 . En el centro de cada cuadrado el mismo motivo C_4 con sentido de giro contrario, es decir su simétrico con relación a un lado del cuadrado.

En la fig. 81 se representan los ejes de sime-

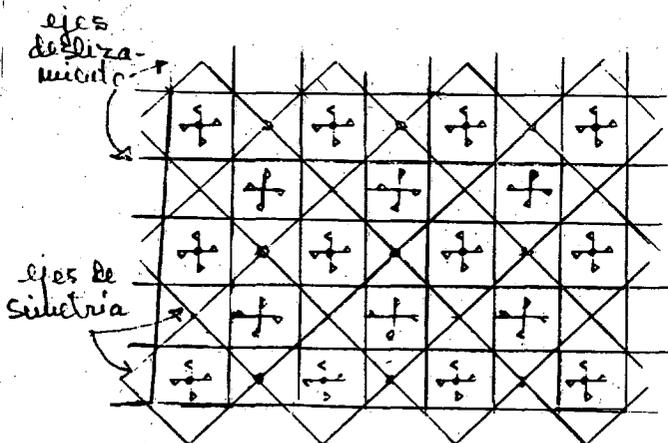


Figura 81

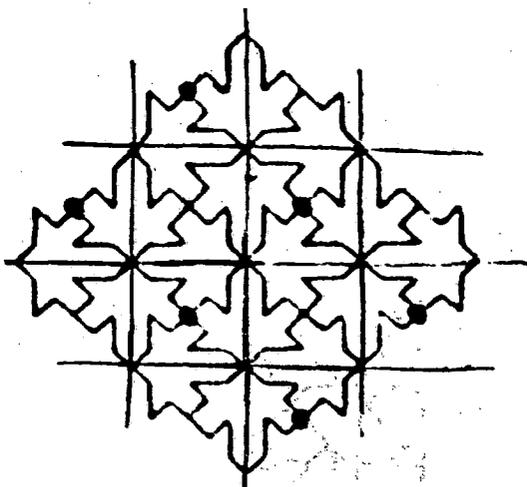


Figura 82

tría del grupo ornamental. Este grupo tiene deslizamientos verticales y horizontales.

En la fig. 82, diseño de Polya, hemos destacado los ejes de simetría y vértices de la red cuadrada.

13. UNICOS GRUPOS DE ORNAMENTACION PLANA

La forma sistemática de demostrar que los 17 grupos citados son los únicos que existen, utilizada por Polya, consiste en estudiar cada una de las clases C_1, C_2, C_3, C_4, C_6 y D_1, D_2, D_3, D_4, D_6 viendo las únicas posibilidades que ofrece cada clase.

1. C_1, C_2, C_3, C_4 y C_6 :

De cada una existe un solo grupo (grupos 1.º a 5.º).

2. D_1 :

Malla rectángulo, ejes de simetría solamente (grupo 6.º).

Malla rectángulo, ejes de deslizamiento solamente (grupo 14.º).

Malla rombo, alternativo eje de simetría y deslizamiento (grupo 7.º).

Los grupos 6.º y 7.º tienen motivos D_2 . En el grupo 14.º los motivos son C_1 ; los D_1 sólo existen para el conjunto del plano e integradas las simetrías en los deslizamientos.

3. D_2 :

Malla rectangular:

- Ambos lados del rectángulo ejes de simetría (grupo 8.º).

- Ambos lado del rectángulo sólo ejes de deslizamiento grupo 16.º).

- Alternativamente ejes de simetría y ejes de deslizamiento (grupos 15.º).

Malla rombo:

- En cada dirección de las diagonales del rombo alternan ejes de simetría y de deslizamiento (grupo 9.º).

En los grupos 8.º y 9.º los motivos tienen simetría D_2 .

En los grupos 15.º y 16.º los motivos sólo tie-

ne simetría C_2 . La simetría D_2 existe para el grupo 15° pero debilitada, en una dirección la simetría es propia, y en la dirección ortogonal está integrada en deslizamiento. La simetría D_2 para el grupo 16° sólo hay que entenderla en sentido amplio y movimientos en direcciones ortogonales.

4. D_3 :

- Por todos los centros de giro ternarios pasan ejes de simetría (grupo 11°).
- Por $1/3$ de los centros de giro ternarios pasan ejes de simetría (grupos 10°).

5. D_4 :

- A través de centros de giros cuaternarios ejes de simetría (grupo 12°).
- A través de ningún centro de giro cuaternario ejes de simetría (grupo 17°).

El grupo 12° tiene motivo ornamental con simetría D_4 . El motivo del grupo 17° sólo tiene simetría C_4 . Este grupo 17° tiene una simetría D_4 debilitada pues dos de las direcciones no son de ejes de simetría sino de deslizamiento.

6. D_6 :

Un solo grupo.

BIBLIOGRAFIA

1. H.S.M. COXETER: «Fundamentos de geometría». Ed. Limusa-Wiley, México 1971.
2. ALLEN NUSS BAUM: «Teoría de grupos, aplicada para químicos, físicos e ingenieros». Ed. Reverte, 1975.
3. HERMANN WEYL: «Symétrie et mathématique moderne». Ed. Flammarion.
4. E.H. GOMBRICH: «El sentido del orden». Ed. Gustavo Gili, 1980.
5. BRUNO ERNST: «The Magic Mirror of M.C. ESCHER». Tarquin Publications.
6. OWEN JONER: «The Grammar of Ornament». Studio Editions (edición original 1856, hay edición moderna de 1986).

Valeriano Zorío Blanco



Promoción 1963. Dr. Ingeniero de Caminos. Licenciado en Ciencias Matemáticas. Trabajó en Renfe (Instalaciones Fijas), en Jefatura Regional de Transportes (Zaragoza), en Jefatura Regional (Valencia y Sevilla) y en Servicios Centrales de Carreteras. Actualmente en Dirección General de Puertos. Publicó diversos artículos en Gaceta Matemática y libro de texto.

