REVISTA DE OBRAS PUBLICAS, Noviembre 1989. Págs. 811 a 823

Vida óptima de servicio de un equipo industrial(*)

Por ANGEL URIARTE
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Después de una exposición sobre los distintos conceptos de vida útil de un equipo, vida técnica, vida óptima, vida contable, etc., se estudia el problema de la determinación de la duración óptima, en el supuesto de que no se renueve el equipo y en el supuesto de que se produzca una sustitución del mismo un número infinito de veces.

La **vida de servicio** de un equipo industrial viene dada por el periodo de tiempo durante el cual colabora en el desarrollo de una función productiva. Esta colaboración en un proceso productivo implica una cierta utilidad en el desempeño de su función. De aquí la expresión **vida útil** que corrientemente se aplica para designar la vida de servicio de un activo.

Ahora bien, la vida útil de un equipo no tiene una duración única ya que ésta puede depender del criterio elegido para su determinación. Así conviene considerar, en primer lugar, su **vida técnica,** que se establece por consideraciones de dicha naturaleza y que se agota cuando, debido al desgaste físico sufrido por dicho equipo, se produce una baja en la calidad de los productos, una disminución en los rendimientos o una elevación en los costes de conservación y mantenimiento por encima de los niveles que se consideran aceptables.

Sin embargo, el desgaste físico del equipo no establece de una forma definitiva su vida de servicio ya que existen diferentes factores, como pueden ser, entre otros, el propio coste de adquisición de los equipos y su valor de desecho, o los precios de los productos obtenidos y los costes de mano de obra, materias primas y energía, que pueden aconsejar a su propietario la retirada de un equipo industrial aun antes de agotar su vida técnica o prolongar ésta, una vez agotada, a costa de unos más elevados gastos de funcionamiento.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de enero de 1990.

Estas consideraciones de carácter económico conducen al concepto de **vida óptima de servicio** de un equipo, o **vida económica,** que, en el caso general de un activo que genera unos ingresos, vendrá determinada por el periodo de tiempo que maximiza los beneficios actualizados a obtener por el equipo en cuestión mientras que cuando no existan o no se conozcan tales ingresos, vendrá dada por el periodo de tiempo que minimiza los costes totales actualizados.

Finalmente, y desde otra perspectiva, tenemos la **vida contable de un equipo,** o vida establecida en base a unas consideraciones de tipo contable y en cuya fijación influye de forma decisiva las cargas impositivas que soporta la empresa.

Con esta exposición previa, se va a abordar a continuación el problema de la determinación de la duración óptima de un equipo, primero, en el supuesto que no se renueve dicho equipo y, después, considerando el caso que dicho equipo es sustituido por otro idéntico un número infinito de veces.

a) Duración de la vida económica de un equipo que no debe ser renovado.

Si expresamos por $\mathbf{C_0}$ el coste de adquisición de un equipo industrial, $\mathbf{I_t}$ y $\mathbf{C_t}$ los ingresos y costes de operación, que incluyen las partidas correspondientes a producción y mantenimiento, en el año **t** y $\mathbf{S_n}$ el valor residual o de salvamento del equipo al final del año **n,** el valor actual neto de dicho equipo para un periodo de utilización de **n** años, igual a la diferencia entre los ingresos y costes actualizados, o descontados, al tipo de interés de mercado r_o, vendrá dado por:

$$\mathrm{VAN}\ (r_o,\ n) = \mathrm{IA}\ (r_o,\ n) - \mathrm{CTA}\ (r_o,\ n) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{I_t}{(1+r_o)^t} - \left[\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + C_o - \frac{S_n}{(1+r_o)^n} \right] \quad [1]$$

lo que permite determinar la vida económica del equipo, o periodo óptimo de utilización del mismo, buscando el valor de **n** que maximiza la expresión anterior, esto es, el valor de **n** que cumpla la condición.

$$\mathrm{VAN}\ (r_o,\ n) > \mathrm{VAN}\ (r_o,\ n+1)$$

Ahora bien la anterior desigualdad puede expresarse en la forma:

$$\mathrm{IA}\ (r_o,\ n) - \mathrm{CTA}\ (r_o,\ n) > \mathrm{IA}\ (r_o,\ n+1) - \mathrm{CTA}\ (r_o,\ n+1)$$

que, transponiendo términos, conduce a la:

$$\mathrm{IA}\ (r_o,\ n+1) - \mathrm{IA}\ (r_o,\ n) < \mathrm{CTA}\ (r_o,\ n+1) - \mathrm{CTA}\ (r_o,\ n),$$

es decir:

$$\frac{I_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}} < \frac{C_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}} + \frac{S_n}{(1+r_o)^n} - \frac{S_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}},$$

con lo que multiplicando los dos términos de la anterior desigualdad por $(1+r_o)^{n+1}$, resultará

$$I_{n+1} < C_{n+1} + r_o\ S_n + [S_n - S_{n+1}] \quad [2]$$

que, en el supuesto que los ingresos sean constantes e iguales a **I**, se convierte en:

$$I < C_{n+1} + r_o\ S_n + [S_n - S_{n+1}] \quad [3]$$

Como, si expresamos por

$$\mathrm{IMA}\ (r_o,\ n+1) = \frac{I_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}}$$

y

$$\mathrm{CMA}\ (r_o,\ n+1) = \frac{C_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}} + \frac{S_n}{(1+r_o)^n} - \frac{S_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}}$$

los ingresos y costes marginales temporales actualizados del equipo para el año **n+1** y un tipo de interés de mercado r_o,

$$I_{n+1} = (1+r_o)^{n+1}\ \mathrm{IMA}\ (r_{o,\ n+1}) \quad \text{y}$$

$$C_{n+1} + r_o\ S_n + [S_n - S_{n+1}] = (1+r_o)^{n+1}\ \mathrm{CMA}\ (r_{o,\ n+1})$$

representarán los ingresos y costes marginales temporales, **IM** $(r_o,\ n+1)$ y **CM** $(r_o,\ n+1)$, para el mismo año **n+1** e igual tipo de interés r_o, las condiciones [2] y [3] se podrán escribir en la forma:

$$\mathrm{IM}\ (r_o,\ n+1) < \mathrm{CM}\ (r_o,\ n+1),$$

lo que permite afirmar que un equipo industrial no renovable y generador de ingresos deberá mantenerse en servicio en tanto los ingresos marginales tamporales sean superiores a los costes marginales temporales y procederse a su liquidación en el momento que los citados costes marginales superen a los ingresos marginales temporales.

En el caso que el valor residual del equipo sea siempre igual a cero, las condiciones [2] y [3] se reducen a

$$I_{n+1} < C_{n+1} \quad [4]$$

e

$$I < C_{n+1} \quad [5]$$

Si suponemos ahora que los ingresos son una función continua del volumen de ventas mientras que los costes de operación y el valor residual son funciones continuas del volumen de ventas y del tiempo, el valor actual neto del equipo para un periodo de utilización **T** vendrá dado por:

$$\mathrm{VAN}\ (\varrho,\ \alpha,\ T) = \mathrm{IA}\ (\varrho,\ \alpha,\ T) - \mathrm{CTA}\ (\varrho,\ \alpha,\ T) =$$

$$= \int_0^T I\ (\alpha)\ e^{-\varrho t}\ dt - \left[\int_0^T C\ (\alpha,\ t)\ e^{-\varrho t}\ dt + C_o - S\ (\alpha,\ T)\ e^{-\varrho T} \right], \quad [6]$$

en donde ϱ representa el tipo de interés continuo equivalente al r_o anual y que, por tanto, cumple la condición $(1+r_o) = e^{\varrho}$.

Por tanto, el volumen de ventas óptimo y la vida económica del equipo vendrán determinados por los valores **x** y **T** que maximicen la expresión [6], esto es, por los valores que verifican las ecuaciones.

$$\frac{\partial\ \mathrm{VAN}\ (\varrho,\ \alpha,\ T)}{\partial\ \alpha} = \frac{\partial\ \mathrm{IA}\ (\varrho,\ \alpha,\ T)}{\partial\ \alpha} - \frac{\partial\ \mathrm{CTA}\ (\varrho,\ \alpha,\ T)}{\partial\ \alpha} = \int_0^T I^1\ (\alpha)\ e^{-\varrho t}\ dt -$$

$$-\left[\int_0^T \frac{\partial\, c\,(\alpha,\, t)}{\partial\, \alpha}\; e^{-\varrho t}\, dt - e^{-\varrho t}\frac{\partial\, S\,(\alpha,\, T)}{\partial\, \alpha}\right] =$$

$$=0, \qquad [7]$$

$$y \quad \frac{\partial\, VAN\,(\varrho,\, \alpha,\, T)}{\partial\, T} = \frac{\partial\, IA\,(\varrho,\, \alpha,\, T)}{\partial\, T} -$$

$$\frac{\partial\, CTA\,(\varrho,\, \alpha,\, T)}{\partial\, T} = \Big[I\,(\alpha) - \big[C\,(\alpha,\, T) +$$

$$+\varrho\, S(\alpha,\, T) - \frac{\partial\, S\,(\alpha,\, T)}{\partial\, T}\big]\Big]\; e^{-\varrho T} = 0 \qquad [8]$$

Cuando el volumen de ventas tiene un valor constante conocido de antemano, las ecuaciones [6] y [8] se reducen a:

$$VAN\,(\varrho,\, T) = IA\,(\varrho,\, T) - CTA\,(\varrho,\, T) =$$

$$= \int_0^T I\; e^{-\varrho t}\, dt - \Big[\int_0^T C\,(t)\; e^{-\varrho t}\, dt +$$

$$+\, C_o - S\,(T)\; e^{-\varrho T}\Big], \qquad [9]$$

$$y\; \frac{d\, VAN\,(\varrho,\, T)}{d\, T} = \frac{d\, IA\,(\varrho,\, T)}{d\, T} - \frac{d\, CTA\,(\varrho,\, T)}{d\, T} =$$

$$= \left\{ I - \Big[C\,(T) + \varrho\, S\,(T) - \frac{d\, S\,(T)}{d\, T}\Big] \right\}\; e^{-\varrho T} =$$

$$= 0, \qquad [10]$$

con lo que la vida económica del equipo vendrá dada por el valor de **T** que verifica la ecuación:

$$I = C\,(T) + \varrho\; S\,(T) - \frac{d\, S\,(T)}{d\, T}\,, \qquad [11]$$

que, cuando el valor residual es constantemente igual a cero, se reduce a:

$$I = C\;(T), \qquad [12]$$

ecuaciones, una y otra, que, de acuerdo con la expresión [10], pueden ponerse en la forma:

$$e^{\varrho T}\; \frac{d\, IA\,(\varrho,\, T)}{d\, T} = e^{\varrho T}\; \frac{d\, CTA\,(\varrho,\, T)}{d\, T}$$

lo que pone de manifiesto que la vida económica del equipo vendrá determinada por el valor de **T** que iguala los ingresos y los costes marginales temporales.

En la figura 1 se representa la determinación gráfica de la vida económica de un equipo industrial en los dos supuestos de variación discreta, (figura, 1, a), y de variación continua, figura 1, b), de ingresos, costes y valores residuales con el tiempo.

Es de señalar que, siempre que el valor residual no tome valores negativos, al ser **S(n)** y **S(T)** *funciones decrecientes de* **n** y **T**, se cumplirá que:

$$C_{n+1} + r_o\; S_n + \big[S_n - S_{n+1}\big] > C_{n+1} \quad y$$

$$C(T) + \varrho S(T) - \frac{dS(T)}{dT} > C(T)$$

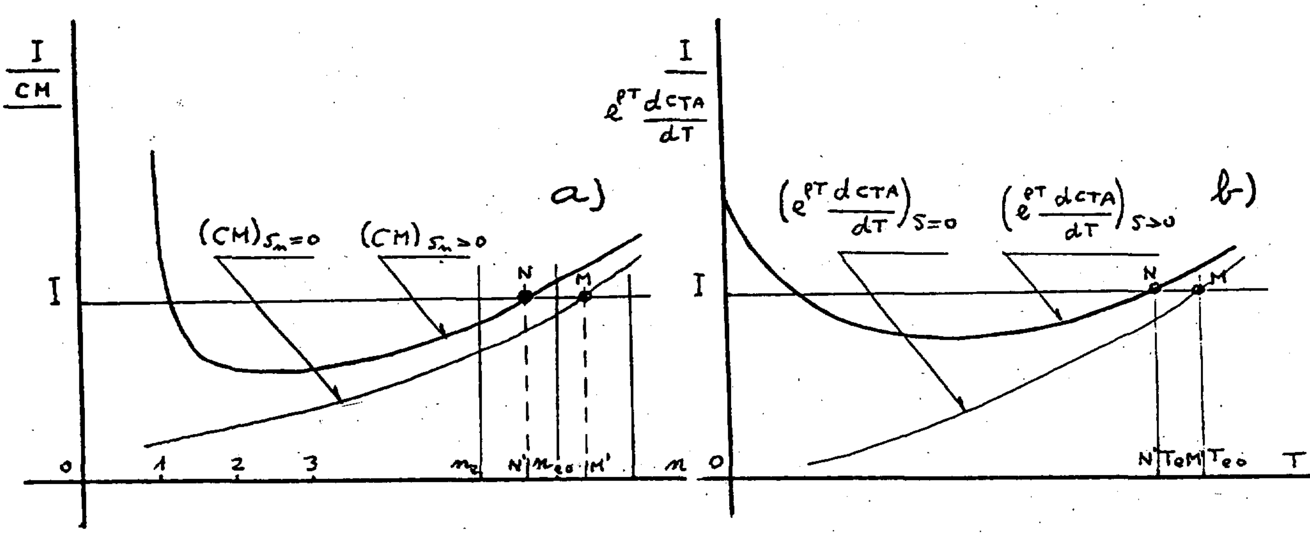


Figura 1

con lo que, al venir siempre las curvas de costes marginales temporales con valores residuales por encima de las que resultarían en el caso de que dichos valores residuales fueran iguales a cero, la duración de la vida económica considerando tales valores residuales será siempre inferior a la duración de la vida económica en el caso que no se tomara en consideración.

b) Duración de la vida económica de un equipo que es reemplazado un número infinito de veces por otro equipo idéntico.

La vida económica de un equipo que es sustituido un número infinito de veces por otro equipo idéntico viene determinada por el valor de **n** que maximiza el valor actual neto de la cadena infinita de sustituciones y que, en el supuesto que los ingresos, costes y valores residuales se repitan a lo largo de las sucesivas sustituciones, puede expresarse en la foma:

$$\mathrm{VAN}_\infty (r_o, n) = \left[\sum_{t=1}^{n} \frac{I_t}{(1+r_o)^t} - \left[\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_o)^n} + C_o - \frac{S_n}{(1+r_o)^n} \right]\right] + \left[\sum_{t=n+1}^{2n} \frac{I_t}{(1+r_o)^t} - \left[\sum_{t=n+1}^{2n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + \frac{C_o}{(1+r_o)^n} - \frac{S_n}{(1+r_o)^{2n}} \right] \right] +$$

$$+ \left[\sum_{t=2n+1}^{3n} \frac{I_t}{(1+r_o)^t} - \left[\sum_{t=2n+1}^{3n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + \frac{C_o}{(1+r_o)^{2n}} - \frac{S_n}{(1+r_o)^{3n}} \right] \right] + \cdots =$$

$$= \left[1 + \frac{1}{(1+r_o)^n} + \frac{1}{(1+r_o)^{2n}} + \ldots \right] \left[\sum_{t=1}^{n} \frac{I_t}{(1+r_o)^t} - \left[\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + C_o - \frac{S_n}{(1+r_o)^n} \right] \right] =$$

$$= \frac{(1+r_o)^n}{(1+r_o)^n - 1} \mathrm{VAN}\ (r_{o,\, n}) \qquad [13]$$

Ahora bien, si $\mathrm{EYN}(r_o, n)$ representa el **equivalente anual neto** de la inversión inicial, o beneficio anual neto constante que, actualizado al tipo de interés $\mathbf{r_o}$, reproduce su valor actual neto, se tendrá que:

$$\mathrm{VAN}\ (r_o, n) = \mathrm{EYN}\ (r_o, n) \left[\frac{1}{1+r_o} + \frac{1}{(1+r_o)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r_o)^n} \right] = \mathrm{EYN}\ (r_o, n)\ a_{\overline{n|}\, r_o}$$

donde

$$a_{\overline{n|}\, r_o} = \frac{1}{1+r_o} + \frac{1}{(1+r_o)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r_o)^n} = \frac{(1+r_o)^n - 1}{r_o (1+r_o)^n}$$

$$\text{y} \quad s_{\overline{n|}\, r_o} = (1+r_o)^{n+1} + (1+r_o)^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{(1+r_o)^n - 1}{r_o}$$

representan, respectivamente, el valor actual y el valor final al tipo de interés $\mathbf{r_o}$ de una renta unitaria postpagable durante un periodo de **n** años.

De esta forma, la ecuación [13] se podrá poner en la forma:

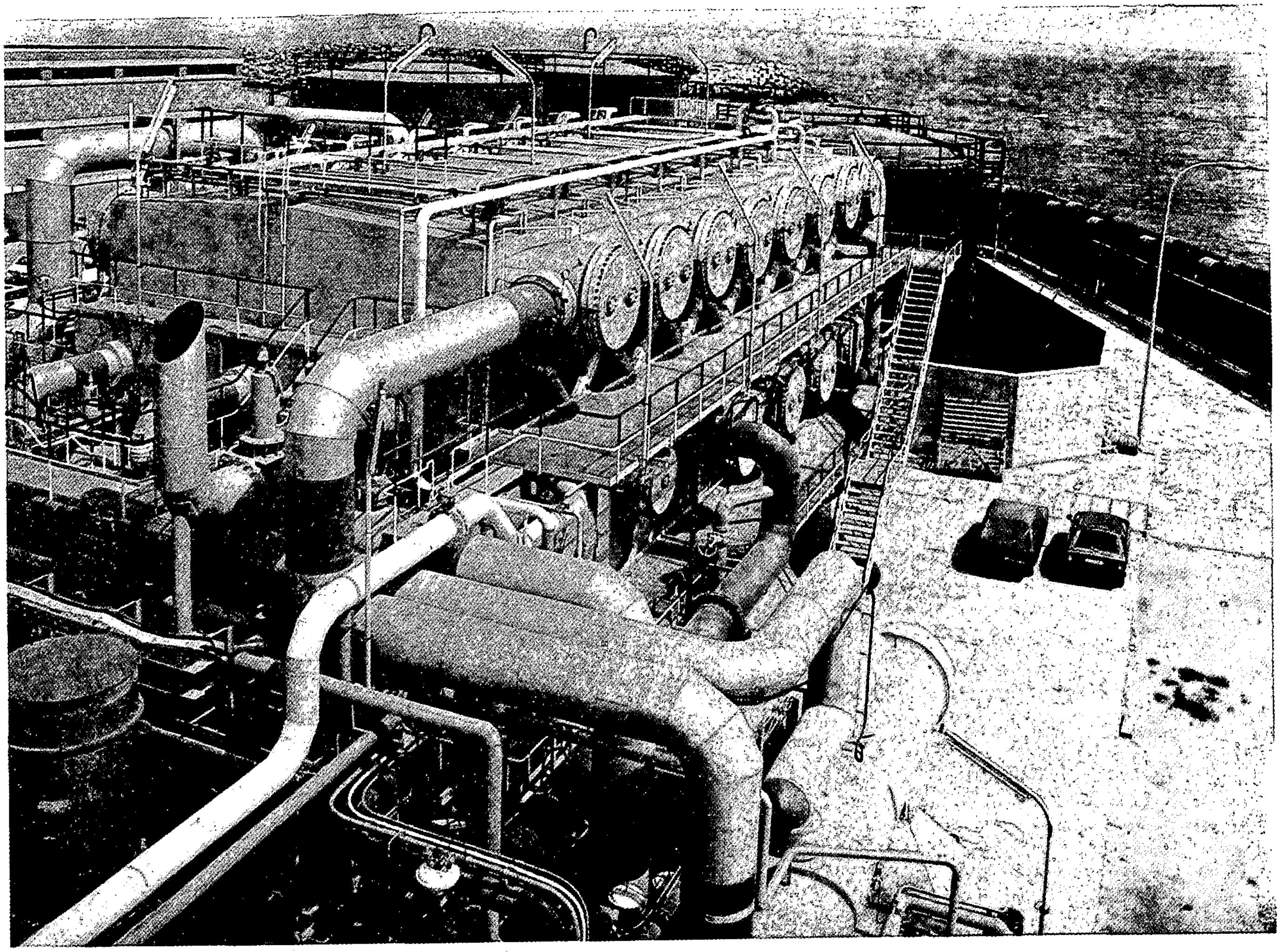
$$\mathrm{VAN}_\infty\ (r_o, n) = \frac{(1+r_o)^n}{(1+r_o)^n - 1} \mathrm{VAN}\ (r_o, n) = \frac{1}{r_o} \frac{\mathrm{VAN}\ (r_o, n)}{a_{\overline{n|}\, r_o}} = \frac{\mathrm{EYN}\ (r_o, n)}{r_o} \qquad [14]$$

con lo que la vida económica del equipo vendrá determinada por el valor de **n** que maximiza el citado equivalente anual neto del equipo.

En el caso que los ingresos anuales sean constantes e iguales a **I**, la expresión [13] toma la forma:

$$\mathrm{VAN}_\infty\ (r_o, n) = \frac{\mathrm{VAN}\ (r_o, n)}{r_o\, a_{\overline{n|}\, r_o}} = \frac{\mathrm{IA}\ (r_o, n)}{r_o\, a_{\overline{n|}\, r_o}} - \frac{\mathrm{CTA}\ (r_o, n)}{r_o\, a_{\overline{n|}\, r_o}} = \frac{a_{\overline{n|}\, r_o} I}{r_o\, a_{\overline{n|}\, r_o}} - \frac{\mathrm{CTA}\ (r_o, n)}{r_o\, a_{\overline{n|}\, r_o}} =$$

$$= \frac{I}{r_o} - \frac{\mathrm{CTYE}\ (r_{o,}\ n)}{r_o} \qquad [15]$$



con lo que, en este caso, la vida económica del equipo vendrá determinada por el valor de **n** que minimiza el denominado **coste total anual equivalente,** CTYE (r_o, n), del equipo expresado por:

$$CTYE\,(r_o,\, n) = a^{-1}_{\overline{n|}\, r_o}\, CTA\,(r_o,\, n) = a^{-1}_{\overline{n|}\, r_o}$$

$$\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + C_o - \frac{S_n}{(1+r_o)^n}\right] =$$

$$= a^{-1}_{\overline{n|}\, r_o} \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + a^{-1}_{\overline{n|}\, r_o}\, C_o\, -$$

$$- s^{-1}_{\overline{n|}\, r_o}\, S_n = a^{-1}_{\overline{n|}\, r_o} \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} +$$

$$+ a^{-1}_{\overline{n|}\, r_o}\left[C_o - S_n\right] + \left[a^{-1}_{\overline{n|}\, r_o} - s^{-1}_{\overline{n|}\, r_o}\right]$$

$$S_n = a^{-1}_{\overline{n|}\, r_o} \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + a^{-1}_{\overline{n|}\, r_o}\left[C_o - S_n\right] +$$

$$+ r_o\, S_n \qquad [16]$$

y que representa el coste total anual constante que, actualizado al tipo de interés $\mathbf{r_o}$, reproduce el coste total actualizado del equipo.

Como conclusión de lo expuesto, la vida económica de un equipo que es reemplazado un número infinito de veces por otro idéntico vendrá determinada, en el caso que dicho activo genere unos ingresos variables en el tiempo, por el valor de **n** que maximiza el equivalente anual neto de la inversión inicial y, cuando dichos ingresos sean constantes o, por no aplicarse un sistema de precios a los bienes o servicios producidos por el equipo, no sean conocidos, por el valor de la variable temporal **n** que minimiza su coste total anual equivalente.

Como, por otra parte, para el valor de **n** que minimiza la expresión [16] se verifica que:

$$\frac{CTA\ (r_o,\ n)}{a_{\overline{n|}\,r_o}} < \frac{CTA\ (r_o,\ n+1)}{a_{\overline{n+1|}\,r_o}}$$

después de sustituir $a_{\overline{n|}\,r_o}$, $a_{\overline{n+1|}\,r_o}$, $CTA\ (r_o,\ n)$ y $CTA\ (r_o,\ n+1)$ por sus correspondientes expresiones y simplificar, se obtendrá:

$$\left[(1+r_o)^{n+1} - 1\right] \left[\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + C_o \frac{S_n}{(1+r_o)^n}\right] <$$

$$< (1+r_o) \left[(1+r_o)^n - 1\right] \left[\sum_{t=1}^{n+1} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + C_o - \right.$$

$$\left. - \frac{S_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}}\right] r_o \left[\sum_{t=1}^{n+1} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + C_o - \right.$$

$$\left. \frac{S_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}}\right] < \left[(1+r_o)^{n+1} - 1\right] \left[\frac{C_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_n}{(1+r_o)^n} - \frac{S_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}}\right] \frac{r_o\ (1+r_o)^{n+1}}{(1+r_o)^{n+1} - 1}$$

$$\left[\sum_{t=1}^{n+1} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + C_o - \frac{S_{n+1}}{(1+r_o)^t}\right] < C_{n+1} +$$

$$+ r_o\ S_n + \left[S_n - S_{n+1}\right],$$

esto es, $a_{\overline{n+1|}\,r_o}^{-1} \left[\sum_{t=1}^{n+1} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} + C_o - \right.$

$$\left. \frac{S_{n+1}}{(1+r_o)^{n+1}}\right] < C_{n+1} + r_o\ S_n + \left[S_n - S_{n+1}\right]$$

relación que, recordando que el segundo término de la desigualdad anterior representa el coste margianl temporal del equipo, puede expresarse por:

$$CTYE\ (r_o,\ n+1) < CM\ (r_o,\ n+1)$$

y que pone de manifiesto como, cuando los ingresos temporales son constantes o no conocidos, deberá procederse a reemplazar un equipo industrial por otro idéntico en el momento en que el coste marginal temporal supere el coste total anual equivalente.

Cuando el valor residual del equipo industrial es constantemente igual a cero, la ecuación [16] toma la forma:

$$\left[CTYE\ (r_o,\ n)\right]_{S_n=0} = a_{\overline{n|}\,r_o}^{-1} \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_o)^t} +$$

$$a_{\overline{n|}\,r_o}^{-1}\ C_o \qquad [17]$$

que, al tener su segundo término inferior al de la ecuación original [16], cumple la condición:

$$\left[CTYE\ (r_o,\ n)\right]_{S_n=0} > \left[CTYE\ (r_o,\ n)\right]_{S_n>0}$$

lo que pone de manifiesto como, siempre que el valor residual no tome valores negativos, el coste total anual equivalente cuando no se consideran valores residuales, al contrario de lo que sucedía con el coste marginal temporal, es superior al coste total anual equivalente que resultaría en el caso de que se considerasen tales valores.

Si, al igual que se hizo cuando se estudió la vida económica de un activo que no se renovaba, suponemos ahora que los costes de operación y el valor residual del equipo son funciones continuas del tiempo mientras que los ingresos permanecen constantes, el valor actual neto de la cadena infinita de reemplazos del equipo industrial de vida **T** vendrá expresado por:

$$VAN_{\infty}\ (\varrho,\ T) = \left[1,\ e^{-\varrho T} + e^{-2\varrho T} + \ldots\ldots\right]$$

$$\left[\int_0^T I\ e^{-\varrho t}\ dt - \left[\int_0^T C\ (t)\ e^{-\varrho t}\ dt + C_o - \right.\right.$$

$$\left.\left. S\ (T)\ e^{-\varrho T}\right]\right] = \frac{\int_0^T I\ e^{-\varrho t}\ dt}{1 - e^{-\varrho T}} -$$

$$- \frac{\int_0^T C\ (t)\ e^{-\varrho t}\ dt + C_o - S\ (T)\ e^{-\varrho T}}{1 - e^{-\varrho T}} =$$

$$= \frac{I}{\varrho} - \frac{\mathrm{CTA}\ (\varrho,\ T)}{\varrho \displaystyle\int_0^T e^{-\varrho t}\, dt} = \frac{I}{\varrho} - \frac{\mathrm{CT}^*\ (\varrho,\ T)}{\varrho}, \qquad [18]$$

con lo que, la vida económica del equipo, igual al valor de **T** que maximiza la expresión VAN (ϱ, ∞), vendrá dada por el valor de dicha variable que minimiza el coste total medio temporal del equipo representado por **CT*** (ϱ, T).

El coste total medio temporal de un equipo industrial, expresado por:

$$\mathrm{CT}^*\ (\varrho,\ T) = \frac{\mathrm{CTA}\ (\varrho,\ T)}{\displaystyle\int_0^T e^{-\varrho t}\, dt} = \frac{\displaystyle\int_0^T C\ (t)\ e^{-\varrho t}\, dt + C_o - S\ (T)\ e^{-\varrho T}}{\displaystyle\int_0^T e^{-\varrho t}\, dt} \qquad [19]$$

representa el flujo continuo uniforme de costes que, actualizado al interés instantáneo ϱ, reproduce el coste total actualizado de dicha inversión y ofrece la particularidad de que su mínimo coincide con el coste marginal temporal.

Para demostrar esta propiedad basta derivar la expresión [19] respecto a la variable **T** e igualar a cero lo que conduce a la relación:

$$\frac{d\ \mathrm{CT}^*\ (\varrho,\ T)}{dt} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-\varrho t}\, dt \frac{d\ \mathrm{CTA}\ (\varrho,\ T)}{d\ T} - e^{-\varrho T}\ \mathrm{CTA}\ (\varrho,\ T)}{\left[\displaystyle\int_0^T e^{-\varrho t}\, dt\right]^2} = 0,$$

que puede ponerse en la forma:

$$\frac{\mathrm{CTA}\ (\varrho,\ T)}{\displaystyle\int_0^T e^{-\varrho t}\, dt} = \mathrm{CT}^*(\varrho,\ T) = \frac{e^{\varrho T}\ d\ \mathrm{CTA}\ (\varrho,\ T)}{dT} = C\ (T) + \varrho\ S(T) - \frac{d\ S\ (T)}{d\ T},$$

y que pone de manifiesto la propiedad arriba expuesta de que el mínimo de los costes totales temporales medios coincide con el coste marginal temporal. Esto permite concluir que el

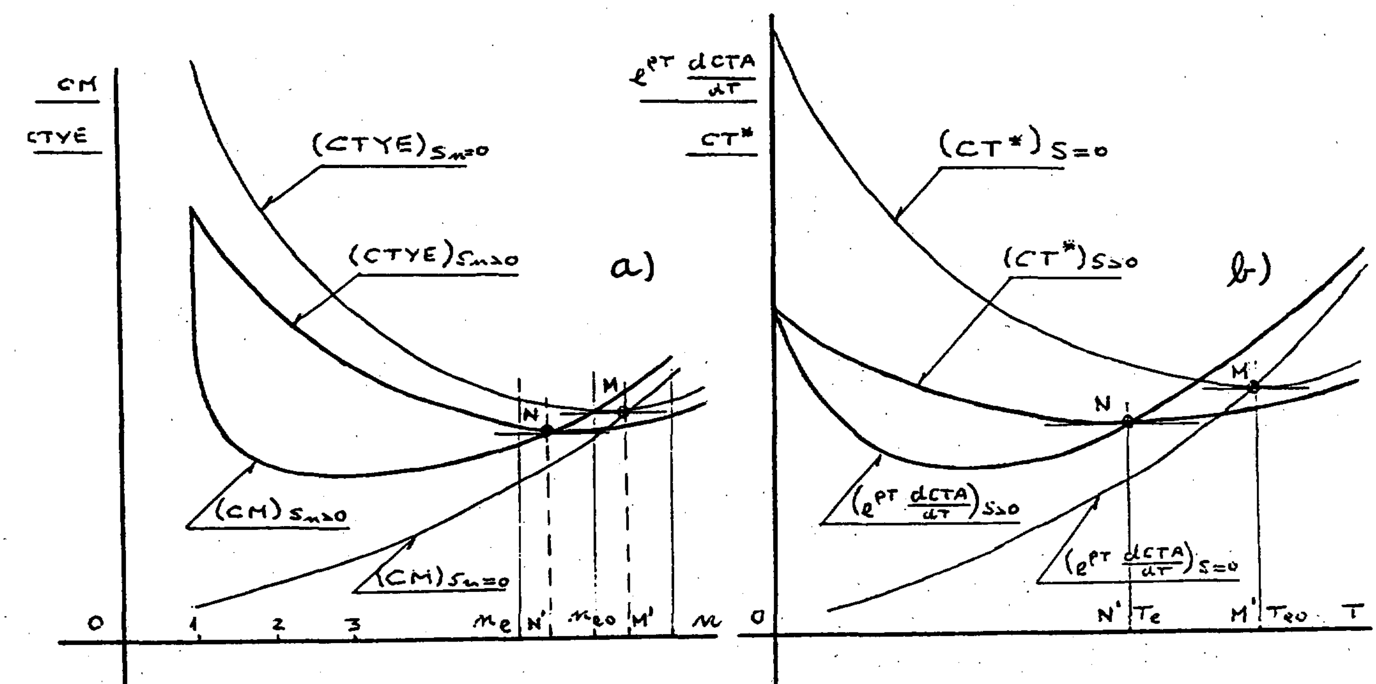


Figura 2.

equipo que nos ocupa habrá agotado su vida económica y, por tanto, deberá procederse a su sustitución por otro idéntico, cuando los costes marginales temporales igualen al coste medio temporal.

Si en la expresión [19] hacemos **S (T) = 0,** se convierte en

$$\left[CT^* (\varrho,T)\right]_{S=0} = \frac{\int_0^T C(T)\, e^{-\varrho t} dt + C_o}{\int_0^T e^{-\varrho t}\, dt} \qquad [20]$$

que, al presentar unos valores superiores a los de la expresión [19], permite escribir

$$\left[CT^* (\varrho, T)\right]_{S=0} > \left[CT^* (\varrho, T)\right]_{S>0}$$

lo que, al igual que sucedía cuando se consideraba una variación discreta de las magnitudes económicas, se traduce en que los costes totales medios temporales cuando no se consideran valores residuales son siempre superiores a los costes totales medios temporales que resultarían si se consideraran tales valores.

En la figura 2 se representa la determinación gráfica de la vida económica de un equipo que es reemplazado por otro idéntico un número infinito de veces y que presenta unos ingresos temporales constantes o no conocidos en los dos supuestos estudiados de variación discreta, (figura 2, a), y de variación continua, (figura 2, b), de los costes de operación y de los valores residuales a lo largo del tiempo.

Dado que, conforme se ha puesto de manifiesto en páginas anteriores, cuando no se tiene en cuenta los valores residuales los costes marginales están por debajo de los que resultarían si se tomaran en consideración tales valores mientras que los costes totales medios experimentan un comportamiento opuesto, esto es, dichos costes, cuando no se consideran los valores residuales, son superiores a los resultantes en el supuesto que se consideraran tales valores, la vida económica de un equipo cuando se tienen en consideración los valores residuales es, conforme se observa en la figura 2, inferior a la vida económica con valores residuales nulos.

c) Determinación práctica de la vida económica de un equipo industrial con ingresos constantes o no existentes.

Tal como se ha expuesto en páginas anteriores, la vida económica del equipo vendrá determinada por el valor de **n** que minimice el coste total anual equivalente de la expresión [16], esto es:

$$CTYE\,(r_{o,n}) = a^{-1}_{\overline{n|}\,r_o} \sum_{t=1}^{n} C_t\,(1+r_o)^{-t} +$$

$$+\ a^{-1}_{\overline{n|}\,r_o}\,[C_o - S_n] + r_o\,S_n\,,$$

$$COYE\,(r_{o,n}) = a^{-1}_{\overline{n|}\,r_o} \sum_{t=1}^{n} C_t\,(1+r_o)^{-t} \qquad [21]$$

representa los costes de operación anuales equivalentes y

$$CRYE\,(r_{o,n}) = a^{-1}_{\overline{n|}\,r_o}\,[C_o - S_n] + r_o\,S_n \qquad [22]$$

los costes de recuperación del capital e intereses anuales equivalentes.

Cuando el valor residual del equipo es siempre igual a cero, el coste total anual equivalente vendrá dado por la expresión [17], esto es:

$$[CTYE\,(r_{o,n})]_{S_n=o} = a^{-1}_{\overline{n|}\,r_o} \sum_{t=1}^{n} C_t\,(1+r_o)^{-t} +$$

$$+\ a^{-1}_{\overline{n|}\,r_o}\,C_o,$$

con lo que los costes de operación y de recuperación del capital e intereses anuales equivalentes serán igual a:

$$[COYE\,(r_{o,n})]_{S_n=o} = a^{-1}_{\overline{n|}\,r_o} \sum_{t=1}^{n} C_t\,(1+r_o)^{-t} \qquad [23]$$

y

$$[CRYE\,(r_{o,n})]_{S_n=o} = a^{-1}_{\overline{n|}\,r_o}\,C_o \qquad [24]$$

Si además, tampoco se tiene en cuenta el tipo de interés, los costes de operación y de recuperación del capital anuales equivalentes se reducirán a:

$$[COYE\,(n)]_{S_n=o} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} C_t \qquad [25]$$

y

$$[CRYE\ (n)]_{S_n=0} = \frac{1}{n}\ C_o \qquad [26]$$

con lo que el coste total anual equivalente vendrá expresado por:

$$\left[CTYE\ (n)\right]_{S_n=0} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} C_t + \frac{1}{n} C_0 \qquad [27]$$

Cuando los costes anuales de operación son constantes, esto es, cuando $\mathbf{C_t = C}$, es costumbre expresar los costes de recuperación del capital e intereses en la forma simplificada:

$$CRYE\ (r_o,\ n) = a\ \frac{-1}{\overline{n|}\ r_o} \left[C_o - S_n\right] + r_o\ S_n =$$

$$= \frac{r_o\ (1+r_o)^n}{(1+r_o)^n - 1} \left[C_o - S_n\right] + r_o\ S_n =$$

$$= \frac{1 + n\ r_o + \frac{n\ (n-1)}{2}\ r_o^2 + \dots}{n\ \left[1 + \frac{n-1}{2}\ r_o + \frac{(n-1)\ (n-2)}{6}\ r_o^2 + \dots\right]}$$

$$\left[C_o - S_n\right] + r_o\ S_n \simeq \left[1 + \frac{n+1}{2} r_o\right] \frac{C_o - S_n}{n} +$$

$$+ r_o\ S_n = \frac{C_o - S_n}{n} + \frac{r_o}{2}\ \frac{n+1}{n} \left[C_o - S_n\right] +$$

$$+ r_o\ S_n, \qquad [28]$$

con lo que resulta la expresión simplificada del coste total anual equivalente:

$$CTYE\ (r_o,\ n) = C + \frac{C_o - S_n}{n} + \frac{r_o}{2}\ \frac{n+1}{n}$$

$$\left[C_o - S_n\right] + r_o\ S_n \qquad [29]$$

que, para $S_n = 0$, se reduce a

$$\left[CTYE\ (r_o,\ n)\right]_{S_n=0} = C + \frac{C_o}{n} + \frac{r_o}{2}\ \frac{n+1}{n}\ C_o \qquad [30]$$

En la figura 3 se representan las gráficas de variación de los costes de operación, de recuperación del capital e intereses y totales anuales equivalentes. Es de destacar que, mientras los costes de operación anuales equivalentes crecen, por lo general, a medida que aumenta el periodo de servicio del equipo, los costes de recuperación del capital e intereses anuales equivalentes son decrecientes con dicho periodo de servicio. De aquí que la gráfica representativa de la variación del coste total anual equivalente, obtenida sumando las dos gráficas anteriores, presentará, tal como se observa en la figura 3, a), un mínimo para un valor de **n**, $\mathbf{n_e}$, que definirá la vida económica del equipo. En el caso particular representado en la figura 3,b) en el que los costes de operación anuales equivalentes son constantes, la gráfica de variación del coste anual equivalente es siempre decreciente y, en consecuencia, lo procedente

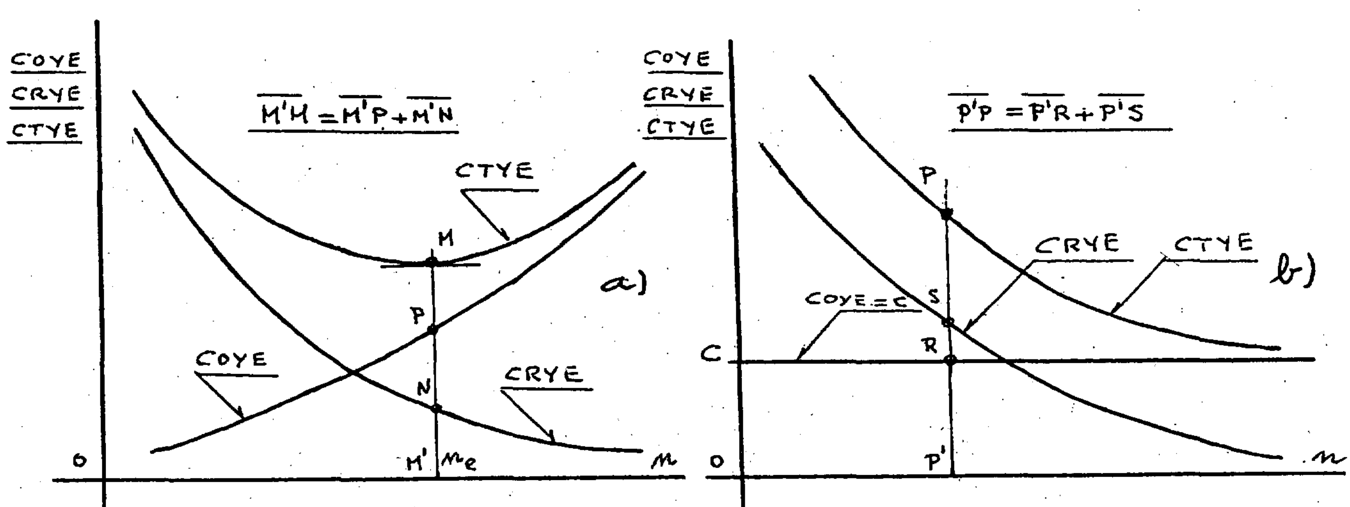


Figura 3.

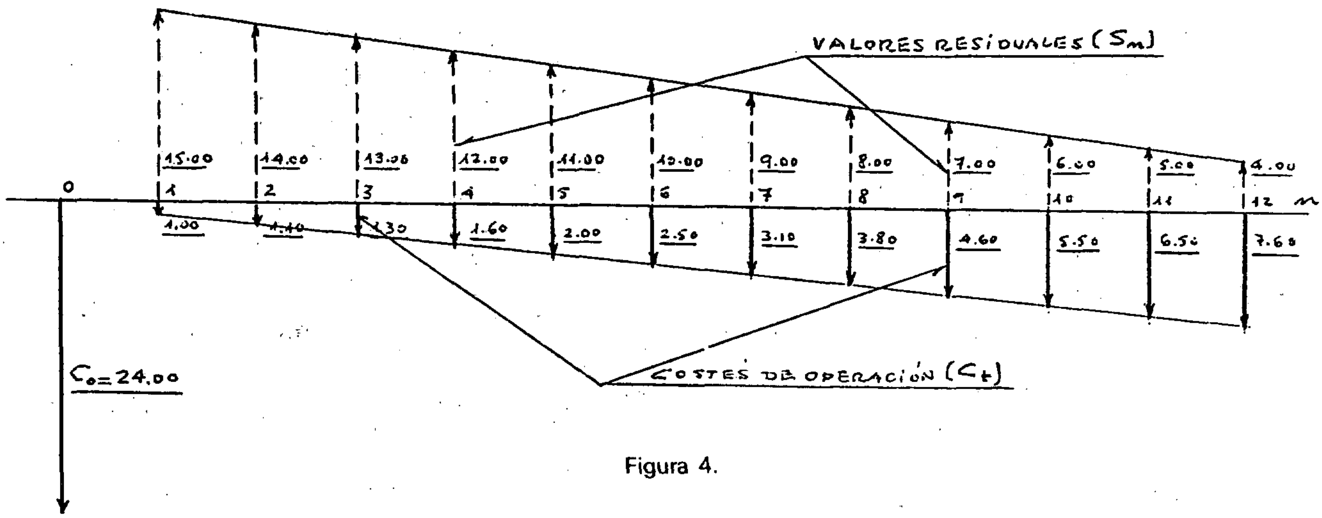


Figura 4.

será retener el equipo tanto como sea posible.

Como ilustración de lo expuesto, se ofrece a continuación la determinación de la vida económica del equipo industrial cuyo coste inicial y costes de operación en millones de pesetas y para los distintos años de su vida útil se representan en la figura 4.

Así, en primer lugar, si no se tienen en cuenta el tipo de interés ni los valores residuales del equipo al final de los distintos años de servicio, el coste total anual equivalente de dicho equipo, expresado por la ecuación [27], será igual a

$$[\text{CTYE (n)}]_{S_n=0} = [\text{COYE (n)}]_{S_n=0} + [\text{CRYE (n)}]_{S_n=0}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} C_t + \frac{1}{n} \; ; \; C_o,$$

mientras el coste marginal vendrá dado por

$$\text{CM (n)} = C_n$$

a partir de cuyas fórmulas se puede elaborar un cuadro como el que se ofrece a continuación y que presenta los valores de las distintas clases de costes del equipo para diferentes periodos de servicio **n**.

A la vista del cuadro siguiente se deduce que la vida económica del equipo es igual a **9 años** ya que para dicho periodo **CTYE (n)** es míni-

CUADRO 1

t, n (años)	C_t (1)	$\sum_{t=1}^{n} C_t$ (2)	COYE (n) = $= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} C_t$ (3)	CRYE (n) $= \frac{C_o}{n}$ (4)	CTYE (n) $= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} C_t + \frac{C_o}{n}$ (5) = (3) + (4)
0	—	—	—	—	—
1	1,000	1,000	1,000	24,000	25,000
2	1,100	2,100	1,050	12,000	13,050
3	1,300	3,400	1,133	8,000	9,133
4	1,600	5,000	1,250	6,000	7,250
5	2,000	7,000	1,400	4,800	6,200
6	2,500	9,500	1,583	4,000	5,583
7	3,100	12,600	1,800	3,428	5,228
8	3,800	16,400	2,050	3,000	5,050
9	4,600	21,000	2,333	2,666	4,999
10	5,500	26,500	2,650	2,400	5,050
11	6,500	33,000	3,000	2,181	5,181
12	7,600	40,600	3,383	2,000	5,333

mo y, además, se verifica que:

$$\left[CM\ (10)\right]_{Sn=0} > \left[CTYE\ (10)\right]_{Sn=0}$$

Si se considera ahora un tipo de interés $r_o = \mathbf{0{,}12}$ pero sigue sin tenerse en cuenta los valores residuales, el coste total anual equivalente del equipo vendrá dado por la ecuación [17], esto es,

$$\left[CTYE\ (r_o,\ n)\right]_{Sn=0} = \left[COYE\ (r_o,\ n)\right]_{Sn=0} +$$

$$\left[CRYE\ (r_o,\ n)\right]_{Sn=0} = a\ \overline{\tfrac{-1}{n|}}\ r_o \sum_{t=1}^{\nu} C_t\ (1+r_o)^{-t} +$$

$$+\ a\ \overline{\tfrac{-1}{n|}}\ r_o\ C_o$$

mientras el coste marginal seguirá siendo igual a:

$$CM\ (r_o,\ n) = C_n.$$

A efectos de cálculo, el cuadro 2, que se ofrece a continuación, recoge los valores de las expresiones $\mathbf{(1+r_o)^{-t}}$ **y** $a\ \overline{\tfrac{-1}{n|}}\ r_o$ para $\mathbf{r_o = 0{,}12}$ y diferentes valores de **t** y **n**.

A partir de los valores del cuadro 2 se han obtenido los costes de operación, de recuperación del capital e intereses y totales anuales

CUADRO 2

t, n (años)	$(1+r_o)^{-t}$ (6)	$a\ \overline{\tfrac{-1}{n|}}\ r_o$ (7)
0	—	—
1	0,89286	1,12000
2	0,79719	0,59170
3	0,71178	0,41635
4	0,63552	0,32923
5	0,56743	0,27741
6	0,50663	0,24322
7	0,45235	0,21912
8	0,40388	0,20130
9	0,36061	0,18768
10	0,32197	0,17698
11	0,28748	0,16841
12	0,25667	0,16144

equivalentes que se presentan en el cuadro 3 y que ponen de manifiesto como, para un tipo de interés del **12 por 100,** la vida económica del equipo cuando no se consideran valores residuales es igual a **10 años** ya que, para este periodo, **CTYE** $\mathbf{(r_o,\ n)}$ es mínimo y, además, se cumple que:

$$\left[CM\ (0,\ 12;\ 11)\right]_{Sn=0} > \left[CTYE\ (0,\ 12;\ 11)\right]_{Sn=0}$$

CUADRO 3

t, n (años)	$C_t\ (1+r_o)^{-t}$ (8)	$\sum_{t=1}^{n} C_t\ (1+r_o)^{-t}$ (9)	COYE $(r_o,\ n)$ (10) = (7) . (9)	CRYE $(r_o,\ n)$ (11) = (7) C_o	CTYE $(r_o,\ n)$ (12) = (10)+(11)
0	—	—	—	—	—
1	0,89286	0,89286	1,000	26,880	27,880
2	0,87691	1,76977	1,047	14,201	15,248
3	0,92531	2,69508	1,122	9,992	11,114
4	1,01683	3,71191	1,222	7,901	9,123
5	1,13486	4,84677	1,344	6,658	8,002
6	1,26657	6,11334	1,487	5,837	7,324
7	1,40228	7,51562	1,647	5,259	6,906
8	1,53474	9,05036	1,822	4,831	6,653
9	1,65881	10,70917	2,010	4,504	6,514
10	1,77083	12,48000	2,209	4,247	6,456
11	1,86862	14,34862	2,416	4,042	6,458
12	1,95069	16,29931	2,631	3,874	6,505

CUADRO 4

t, n (años)	C_o, S_n (13)	$a \frac{-1}{n\rceil r_o}(C_o - S_n)$ (14)	$r_o \cdot S_n$ (15)	CRYE (r_o, n) (16) = (14)+(15)	CTYE (r_o, n) (17) = (10)+(16)
0	24,000	—	—	—	—
1	15,000	10,080	1,800	11,880	12,880
2	14,000	5,917	1,680	7,597	8,644
3	13,000	4,580	1,560	6,140	7,262
4	12,000	3,951	1,440	5,391	6,613
5	11,000	3,606	1,320	4,926	6,270
6	10,000	3,405	1,200	4,605	6,092
7	9,000	3,287	1,080	4,367	6,014
8	8,000	3,221	0,960	4,181	6,003
9	7,000	3,191	0,840	4,031	6,041
10	6,000	3,186	0,720	3,906	6,115
11	5,000	3,200	0,600	3,800	6,216
12	4,000	3,229	0,480	3,709	6,340

Finalmente, si se consideran los valores residuales del equipo, iguales, conforme se representa en la figura **4**, a **15 millones de pesetas** al final del primer año de servicio y que se reducen en los años sucesivos a razón de **1 millón de pesetas** por año, los costes de recuperación del capital e intereses y totales anuales equivalentes, expresados por las ecuaciones [22] y [16], serán iguales a:

$$\text{CRYE } (r_o,\ n) = a \frac{-1}{n\rceil}\ r_o \left[C_o - S_n\right] + r_o\ S_n$$

y

$$\text{CTYE } (r_o,\ n)\ a \frac{-1}{n\rceil}\ r_o \sum_{t=1}^{n} C_t\ (1+r_o)^{-t} +$$

$$a \frac{-1}{n\rceil} r_o \left[C_o - S_n\right] + r_o\ S_n,$$

mientras el coste marginal vendrá dado por:

$$\text{CM } (r_o,\ n) = C_n + r_o\ S_{n-1} + (\ S_{n-1} - S_n\ )$$

lo que permite ir obteniendo, tal como se ofrecen en el cuadro 4, antes presentado, y en el cuadro 5, expuesto a continuación, los costes totales anuales equivalentes y marginales del equipo.

CUADRO 5

t, n (años)	$r_o\ S_{n-1}$ (18)	$S_{n-1} - S_n$ (19)	CM (r_o, n) (20) = (1) + (18) + (19)
0	—	—	—
1	2,880	9,000	12,880
2	1,880	1,000	3,900
3	1,680	1,000	3,980
4	1,560	1,000	4,160
5	1,440	1,000	4,440
6	1,320	1,000	4,820
7	1,200	1,000	5,300
8	1,080	1,000	5,880
9	0,960	1,000	6,560
10	0,840	1,000	7,340
11	0,720	1,000	8,220
12	0,600	1,000	9,200

A la vista de los cuadros anteriores se pone de manifiesto como, con valores residuales, la vida económica del equipo se reduce a **8 años** ya que, para dicho periodo, CTYE (r_o, n) es mínimo y se cumple que:

$$\text{CM } (0,\ 12;\ 9) > \text{CTYE } (0,\ 12;\ 9)$$

Como resumen de lo expuesto, la figura 5 representa la determinación de la vida económica del equipo en los tres supuestos considera-

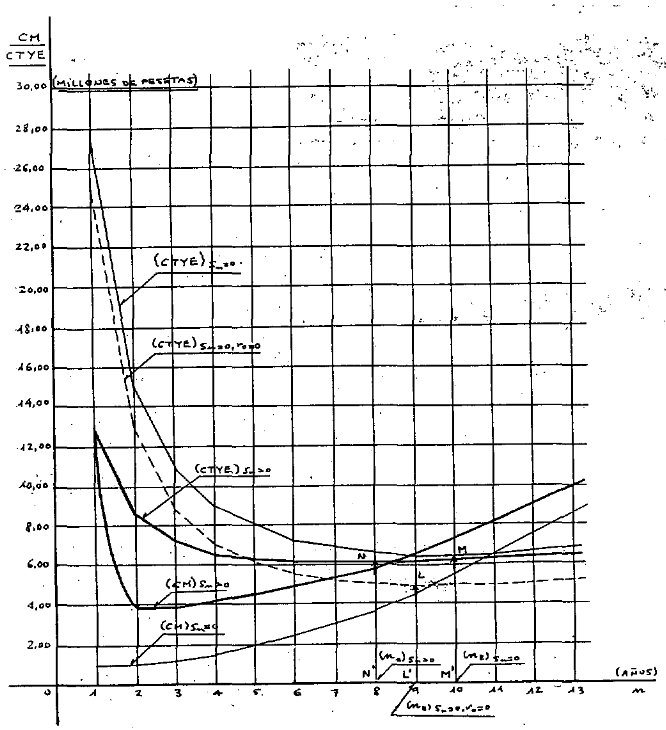


Figura 5.

dos de interés y valores residuales iguales a cero, de interés del 12 por ciento y valores residuales iguales a cero y, finalmente, de interés del 12 por ciento y valores residuales distintos de cero.

Angel Uriarte González

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, (Promoción 1957), y Licenciado en Ciencias Económicas. Ha trabajado en la empresa privada y en los servicios periféricos y centrales del Ministerio de Obras Públicas. Desde 1977 es Catedrático Numerario de Economía de E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander. Ha publicado diversos trabajos sobre temas económicos de carácter general y relacionados con la planificación y la explotación de las Obras Públicas.