REVISTA DE OBRAS PUBLICAS, Septiembre 1989. Págs. 623 a 638

Del dimensionamiento óptimo de los proyectos de inversión en obras públicas en ambiente de riesgo y de incertidumbre (*)

Por MIGUEL CABRERA CABRERA
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.
Licenciado en Ciencias Económicas.

El dimensionamiento óptimo de los proyectos de inversión en obras públicas requiere la consideración del riesgo y de la incertidumbre, ya que intervienen en él parámetros que no son controlables por el proyectista, planteándolo como un proceso de decisión. En el presente artículo se analizan las posibilidades más frecuentes que pueden presentarse, tanto si para el estudio del dimensionamiento se realiza experimentación o no. Se estudian los casos en que el número de alternativas sea finito o infinito y en que los estados de la naturaleza tengan una distribución continua o discreta. Por último se considera el caso de que la función de pérdidas dependa de un parámetro.

1. INTRODUCCION

En el dimensionamiento de los proyectos de obras públicas intervienen, en general, una serie de parámetros que no son controlables por el decisor. Cada proyecto se ve afectado por diversos parámetros aunque para el dimensionamiento haya frecuentemente uno que es el que va a tener una influencia decisiva. Veamos algunos ejemplos. Si tratamos de dimensionar un dique de escollera, el oleaje en su punto de ubicación será el parámetro a considerar; si tratamos de dimensionar la superficie abrigada necesaria para un puerto el parámetro será el tráfico que se prevea que se va a desarrollar en él; si tratamos de dimensionar la altura de una presa, el parámetro será el caudal anual del río, etc.

A estos parámetros se les denomina estados de la naturaleza y vienen caracterizados por que no pueden ser influenciables por el decisor aunque tienen una gran importancia para la adopción de la decisión. Consideramos que los parámetros tienen carácter aleatorio. Si logramos conocer la distribución de probabilidad del parámetro que interviene en nuestro problema diremos que nos encontramos en una situación de riesgo. Si no sabemos nada sobre ellos diremos que nos encontramos en un ambiente de incertidumbre. Lo más frecuente es que nos encontremos en un ambiente intermedio entre el riesgo y la incertidumbre siendo los dos ambientes que hemos definido sutuaciones límite en las que se puede encontrar el decisor.

Para el estudio del dimensionamiento podemos clasificar los estados de la naturaleza en dos tipos diferentes. Un primer tipo vendría representado por aquellos parámetros cuya distribución de probabilidad sea independiente del tiempo (por ejemplo, la distribución de probabilidad anual del oleaje en un punto) y otro segundo tipo que se incluiría en la consideración como serie temporal (por ejemplo la distribución de probabilidad del tráfico como serie temporal (por ejemplo la distribución de probabilidad del tráfico en una carretera dependerá del número de vehículos existente en cada momento, el número de vehículos será creciente con el tiempo).

El cálculo de la función de distribución de probabilidad en cada uno de los casos es diferente. En el primer caso, cuando el parámetro no depende del tiempo, se trata de agrupar los datos de forma adecuada y ajustar a ellos una distribución de probabilidad que posteriormente

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de noviembre de 1989.

deberá ser debidamente contrastada utilizando el test X^2 o cualquier otro. En el segundo caso, cuando el parámetro depende del tiempo se necesitará primeramente calcular la tendencia y posteriormente, eliminada esta de los datos, encontrar la distribución de probabilidad de las fluctuaciones aleatorias alrededor de dicha tendencia. A esta distribución de probabilidad deberá de aplicarse igualmente, una vez ajustada, el contraste.

La existencia de estos parámetros, denominados estados de la naturaleza, no controlables por el decisor nos ha llevado a plantear la conveniencia de considerar el dimensionamiento de un proyecto como un proceso de decisión.

En este estudio expondremos solamente el caso que exista un sólo decisor (hipótesis perfectamente asumible ya que en general en el dimensionamiento de un proyecto es ese el caso más frecuente) y una sola dimensión evaluativa. Aceptamos que para el dimensionamiento será suficiente con una sola dimensión evaluativa, la económica, dejando el caso de varias dimensiones evaluativas para la fase de ubicación exacta o trazado según los proyectos de que se trate.

Los restantes elementos fundamentales del proceso de decisión, junto con el conjunto de los estados de la naturaleza ya expuestos, son el conjunto de decisiones y la función de pérdida. El conjunto de decisiones será el conjunto de las diferentes alternativas del proyecto, conjunto que podrá ser infinito (por ejemplo, altura de una presa, dimensión de un aliviadero, superifice abrigada de un puerto) o finito (por ejemplo número de carriles de una autopista o autovía, número de vías para una línea de ferrocarril).

La función de pérdida a considerar será la obtenida mediante la diferencia entre los costes y beneficios de cada una de las alternativas del proyecto. Los costes de un proyecto, en el sentido económico que utilizaremos, representan el consumo de recursos utilizados para producir los resultados del proyecto y que incluirán los cuantificables monetariamente. Los costes cuantificables no monetariamente y los no cuantificables o intangibles deberán ser utilizados bien para la ubicación o para el trazado, pero no para el dimensionamiento. Los beneficios de un proyecto consistirán en aquellos efectos que como las reducciones en los costes unitarios o el aumento en la producción de los bienes y/o servicios constituyen un aumento de la renta nacional. Al igual que en los costes, para el dimensionamiento, sólo utilizaremos los beneficios cuantificables monetariamente. Los beneficios cuantificables no monetariamente y los no cuantificables o intangibles se aplicarán como los costes en otros procesos de decisión.

2. DIMENSIONAMIENTO SIN EXPERIMENTACION, UN SOLO DECISOR Y UNA SOLA DIMENSION EVALUATIVA

a) Introducción.

El problema de decisión sin experimentación consiste en que admitiendo las siguientes hipótesis:

- Existencia de un conjunto D, denominado conjunto de alternativas, que puede ser finito o infinito.
- Existencia de un conjunto Ω, denominado conjunto de estados de la naturaleza, que puede ser finito o infinito. Si se conoce la probabilidad de presentación de cada estado de la naturaleza diremos que estamos en ambiente de riesgo y si se desconoce diremos que nos encontramos en un ambiente de incertidumbre.
- Existencia de una función de pérdidas L (w,d). Esta función de pérdidas será para nosotros la diferencia entre los costes y los beneficios es decir:

$$L\ (w,d) = C\ (w,d) - B\ (w,d)$$

que supondremos no negativa pues basta para ello anadirle una función λ (w) suficientemente grande con lo que tendríamos la función:

$$L_0\ (w,d) = L\ (w,d) + \lambda\ (w)$$

el decisor escoja una decisión $d \in D$, sin conocer que estado de la naturaleza $w \in \Omega$ se presentará de entre los posibles de tal forma que la pérdida que se produzca sea mínima. La decisión d que nos produce la pérdida mínima la denominamos decisión óptima.

b) Ambiente de riesgo.

En ambiente de riesgo para obtener la decisión óptima se asocia a cada decisión un valor que llamamos riesgo de Bayes frente a la distribución P del estado de la naturaleza que consideramos y los representamos por R (d,p). La distribución P es conocida ya que nos encontramos en ambiente de riesgo. La función de riesgo tendrá diferentes expresiones según el criterio de decisión bajo riesgo que adoptemos. El criterio más empleado es el del valor esperado pero se han propuesto otros como, el de mínima varianza a media acotada, el de dispersión, el del percentil y el de probabilidad máxima. Nosotros utilizaremos en lo que sigue el criterio del valor esperado.

En este ambiente distinguiremos tres casos a') que las decisiones sean infinitas y la función de probabilidad del estado de la naturaleza sea continua, b') que las decisiones sean infinitas y la función de probabilidad del estado de la naturaleza sea discreta y c') que las decisiones sean finitas y la función de probabilidad del estado de la naturaleza sea discreta.

Caso a') que las decisiones sean infinitas y la función de probabilidad del estado de la naturaleza sea continua.

Este caso se presentaría cuando tratásemos de dimensionar la altura de una presa, el conjunto de decisiones posibles sería el segmento determinado entre la altura mínima y máxima para la presa, con lo que sería un conjunto infinito y el estado de la naturaleza sería el caudal anual del río, parámetro del que podemos obtener la distribución de probabilidad como si fuese una variable continua.

En esta situación y con el criterio del valor tendremos que el riesgo vendrá dado por la expresión:

$$R\ (d,P) = \int_{\Omega} L\ (w,d)\,.\,d\ P\ (w) = \int_{\Omega} L(w,d);\ p\ (w)\,.\,dw = E\ [L\ (w,d)]$$

La decisión óptima $\hat{d}$ que deberá escoger el decisor será aquella que haga que tome el menor valor posible la función de riesgo R (d,P). Al ínfimo de la función de riesgo R (d,P) se denomina riesgo de Bayes frente a la distribución P y lo representamos por $\hat{R}$ (P).

$$\hat{R}(P) = \inf_{d \in D} R(d,P)$$

de donde la decisión óptima $\hat{d}$ será la que cumpla que $R(\hat{d},P) = \hat{R}(P)$.

A $\hat{d}$ se le denomina decisión de Bayes frente a la distribución P.

Esta decisión, en general, no será única.

Caso b') que las decisiones sean infinitas y la función de probabilidad del estado de la naturaleza sea discreta.

Este caso se presentaría cuando tratásemos de dimensionar la superficie abrigada de un puerto, el conjunto de decisiones posibles sería el segmento determinado entre la superficie mínima y máxima del área abrigada del puerto con lo que sería un conjunto infinito y el estado de la naturaleza sería el tráfico del puerto del que podríamos obtener la distribución de probabilidad para diferentes hipótesis de crecimiento, muy alto, alto, medio, bajo, muy bajo.

En esta situación nos encontraremos con el siguiente esquema:

	P_1 / W_1	P_2 ...... / W_2	P_n / W_n
d	$L(d,w_1)$	$L(d,w_2)$	$L(d,W_n)$

Con el criterio del valor esperado tendremos:

$$R(d,P) = p_1 \cdot L(d,W_1) + p_2 \cdot L(d,W_2 + \ldots + p_n \cdot L(d,W_n)$$

Igual que anteriormente:

$$\hat{R}(P) = \inf_{d \in D} R(d,P)$$

y la decisión óptima será aquella $\hat{d}$ que cumpla que $R(\hat{d},P) = \hat{R}(P)$

Caso c') que las decisiones sean finitas y la función de probabilidad del estado de la naturaleza sea discreta.

Este caso se presentaría cuando tratásemos de dimensionar una autovía o una autopista, el número de carriles nos definirá el conjunto de decisiones o alternativas (d_1 = reformar la carretera existente, d_2 = autovía de dos carriles en cada sentido del tráfico, d_3 = autopista de dos carriles en cada sentido, d_5 = autopista de tres carriles en cada sentido del tráfico) y el estado de la naturaleza sería el tráfico de la carretera del que podríamos obtener la distribución de probabilidad para diferentes hipótesis de crecimiento, muy alto, alto, medio, bajo, muy bajo.

En este caso nos encontraremos con el siguiente esquema:

	P_1 / W_1	P_2 ...... / W_2	P_n / W_n
d_1	$L(d_1,W_1)$	$L(d_1,W_2)$	$L(d_1,W_n)$
d_2	$L(d_2,W_1)$	$L(d_2,W_2)$	$L(d_2,W_n)$
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
d_m	$L(d_m,W_1)$	$L(d_m,W_2)$	$L(d_m,W_n)$

Con el criterio del valor esperado tendremos:

$$R(d_1, P) = p_1 \cdot L(d_1, W_1) + p_2 \cdot L(d_1, W_2) + \ldots + p_n \cdot L(d_1, W_n)$$

$$R(d_2, P) = p_1 \cdot L(d_2, W_1) + p_2 \cdot L(d_2, W_2) + \ldots + p_n \cdot L(d_2, W_n)$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$R(d_m, P) = p_1 \cdot L(d_m, W_1) + p_2 \cdot L(d_m, W_2) + \ldots + p_n \cdot L(d_m, W_n)$$

Igual que anteriormente:

$$\hat{R}(P) = \inf_{d \in D} R(d, P)$$

y la decisión óptima será aquella $\hat{d}$ que cumpla que:

$$R(\hat{d}, P) = \hat{R}(P)$$

c) Ambiente de incertidumbre.

En el ambiente de riesgo la aleatorización no disminuye la périda, sin embargo, en ambiente de incertidumbre es conveniente aleatorizar las decisiones con objeto de obtener una pérdida menor.

En ambiente de incertidumbre se puede intentar comparar las decisiones directamente con el orden natural estableciendo los conceptos de dominación, pero estos no nos conducen a una decisión óptima. Para encontrar la decisión se ha de recurrir a algún criterio que nos dé una decisión y que posea peculiaridades especiales.

El criterio generalmente empleado es el criterio de minimax pero se han propuesto otros como el de Laplace, el de Wald, el de Hurwicz y el de Savage. Estos criterios cumplen la mayor parte de los principios de racionalidad dados por Milnor.

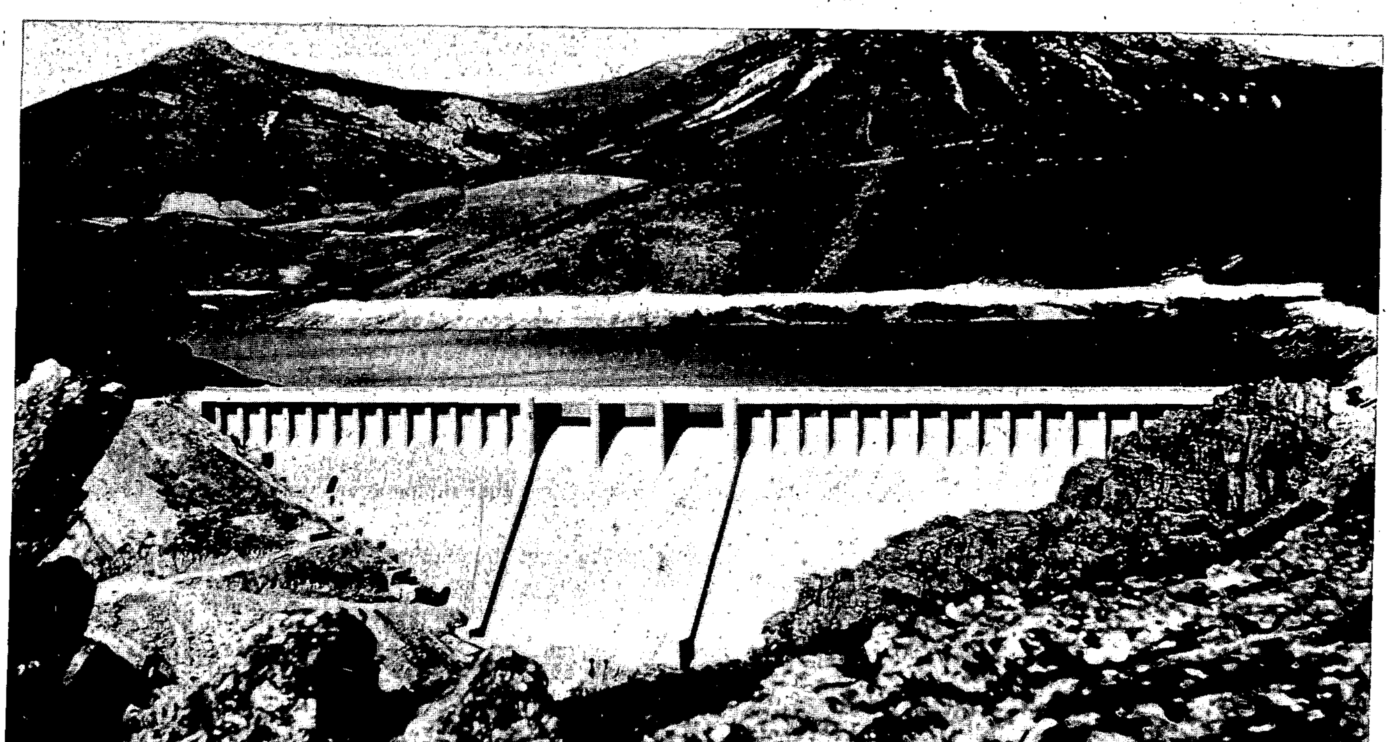
Expondremos el cálculo del criterio de minimax en el caso particular de que tanto el conjunto de los estados de la naturaleza Ω como el de las decisiones D sean finitos.

Sea $\Omega = \{ W_1, W_2, \ldots\ldots, W_n \}$ el conjunto de estados de la naturaleza del problema. No conocemos su distribución de probabilidad ya que estamos en un ambiente de incertidumbre. Por estar en este ambiente si queremos encontrar la solución con pérdida mínima se ha de aleatorizar el conjunto de las decisiones. Sea $D = \{ d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n \}$ el conjunto de las decisiones o posibles alternativas del problema. Supongamos que la aleatorización de D viniese dada por la perspectiva aleatoria.

$$\begin{pmatrix} P'_1 & P'_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & P'_m \\ d_1 & d_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & d_m \end{pmatrix}$$

El esquema con el que nos encontraremos en este caso sería:

		W_1	W_2	..	W_n
P'_1	d_1	$L(W_1,d_1)$	$L(W_2,d_1)$	..	$L(W_n,d_1)$
P'_2	d_2	$L(W_1,d_2)$	$L(W_2,d_2)$	..	$L(W_n,d_2)$
.	.	.	.	..	.
.	.	.	.	..	.
.	.	.	.	..	.
P'_m	d_m	$L(W_1,d_m)$	$L(W_2,d_m)$	..	$L(W_n,d_m)$



Si $d^* \in D$ es la decisión minimax se ha de cumplir que $L^* (W_j, d^*) \leq V$, es decir, que

$$\sum_{i=1}^{i=m} P'_i \cdot L(W_j, d_i) \leq V$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} P'_i = 1 \qquad P'_i \geq 0$$

Puesto que V puede suponerse distinto de cero y positivo, ya que la función de pérdida la podemos considerar siempre positiva, el sistema anterior es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{P'_i}{V} \cdot L(W_j, d_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} P'_i / V = \frac{1}{V}$$

$$\frac{P'_i}{V} \geq 0$$

Si el decisor trata de elegir d^* de modo que V sea lo menor posible, tratará de maximizar $1/V$. Llamando $Y_i = P'_i/V$ el problema queda reducido al siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{i=m} Y_i$$

Sujeto a las restricciones

$$\sum_{i=1}^{i=m} Y_i \cdot L(W_j, d_i) \geq 1$$

$$Y_i \geq 0$$

La solución se obtiene mediante el método de Simplex. Supongamos que esta solución fuese:

$$(Y^*_1, Y^*_2, \ldots\ldots, Y^*_m)$$

la solución óptima sería:

$$d^* = \left(\frac{Y^*_1}{\sum_{i=1}^{i=m} Y^*_i}, \frac{Y^*_2}{\sum_{i=1}^{i=m} Y^*_i}, \ldots, \frac{Y^*_m}{\sum_{i=1}^{i=m} Y^*_i} \right) =$$

$$= (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_m)$$

Una vez conocida la solución óptima se puede encontrar la distribución más desfavorable para los estados de la naturaleza resolviendo el sistema:

$$\sum_{j=1}^{j=n} P_j \cdot x^*_i \cdot L(W_j, d_i) = V$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} P_j = 1$$

$$P_j \geqslant 0$$

ya que la decisión minimax será una decisión Bayes frente a la distribución más desfavorable, es decir, el riesgo correspondiente a esta distribución ha de ser igual al valor minimax V.

La solución del sistema será:

$$(P^*_1, P^*_2, \ldots\ldots, P^*_n)$$

que será la distribución más desfavorable para los estados de la naturaleza obteniendo para estos la perspectiva aleatoria siguiente:

$$\left| \begin{matrix} P^*_1, & P^*_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & P^*_n \\ W_1, & W_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & W_n \end{matrix} \right|$$

Este caso se presentaría cuando tratásemos de dimensionar una autovía o una autopista como expusimos en el caso c') del apartado b) y no pudiésemos determinar las probabilidades asociadas a cada una de las hipótesis de crecimiento del tráfico. También se podría aplicar al caso b') del apartado b) si no se pudiesen determinar las probabilidades asociadas a cada una de las hipótesis de crecimiento del tráfico portuario y consideremos un número finito de alternativas.

III. DIMENSIONAMIENTO CON EXPERIMENTACION, UN SOLO DECISOR Y UNA SOLA DIMENSION EVALUATIVA

a) Introducción.

El problema de decisión con experimentación consiste en que admitiendo que el decisor conoce los siguientes datos iniciales:

— El espacio de los estados de la naturaleza Ω con elementos $W \in \Omega$, uno de los cuales, desconocido por el decisor, se presenta cuando este toma su decisión y por lo tanto influye en el resultado de la misma.

— La familia de experimentos E, con elementos $e \in E$, cada uno de los cuales, una vez realizado, nos aporta una cierta información sobre el valor de W.

— El espacio de resultados de los experimentos o espacio muestral X.

— El espacio de decisiones $D = \{ d \}$, una de las cuales selecciona el decisor ayudándose de la información obtenida a causa de la realización del experimento.

— Una función de pérdida, L(e,x,d,w) definida sobre el espacio $E \times X \times D \times \Omega$ y que representa la pérdida obtenida como diferencia entre los costes y los beneficios.
L(e,x,d,w) = C(e,x,d,w) — B(e,x,d,w)
que supondremos como en el ambiente de riesgo no negativa, cuando se ha utilizado la información proporcionada por el experimento e, que ha dado lugar al resultado X y se ha elegido la decisión d, siendo w el estado de la naturaleza que se ha presentado.

— Una función de probabilidad P(w/x,e) definida sobre el espacio producto $\Omega \times X$ como debería de elegir el experimento e y en consecuencia, habiendo observado el resultado x del mismo, elegir una decisión d tal que se minimice la pérdida esperada.

Se distinguen dos casos con una sola experiencia previa o con varias experiencias previas.

b) Una sola experiencia previa, ambiente de riesgo

La decisión d elegida dependerá del vector x observado, donde la observación consiste en una muestra de tamaño n, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ de una población X cuya función de distribución depende del estado W que se presente. Es decir en el problema de decisión con experimentación, no se busca una única decisión $d \in D$ sino un conjunto de reglas, una para cada observación muestral, de forma que si se presenta una cierta muestra la decisión asociada sea de pérdida mínima frente a la información que dicha muestra proporciona. Por ello en lugar de trabajar con el conjunto de decisiones D, trabajamos con el conjunto de aplicaciones del espacio X de las observaciones en el conjunto D.

$$D = \{ \delta(x) \mid \delta : X \rightarrow D \}$$

estas aplicaciones reciben el nombre de funciones de decisión. El planteamiento expuesto sería el representado en la figura 1.

En ambiente de riesgo para obtener la decisión óptima se asocia a cada decisión un valor que llamamos riesgo de Bayes frente a la distribución P del estado de la naturaleza que consideremos y como anteriormente lo representamos por R (d,P) siendo igual a la esperanza de la función de pérdida.

La expresión de la función de riesgo será diferente según el criterio de decisión bajo riesgo que adoptemos. El criterio más utilizado es el del valor esperado, al igual que cuando veíamos el modelo sin experimentación. De la misma forma se pueden utilizar otros criterios.

Para el modelo con experimentación con una sola experiencia previa podemos distinguir los

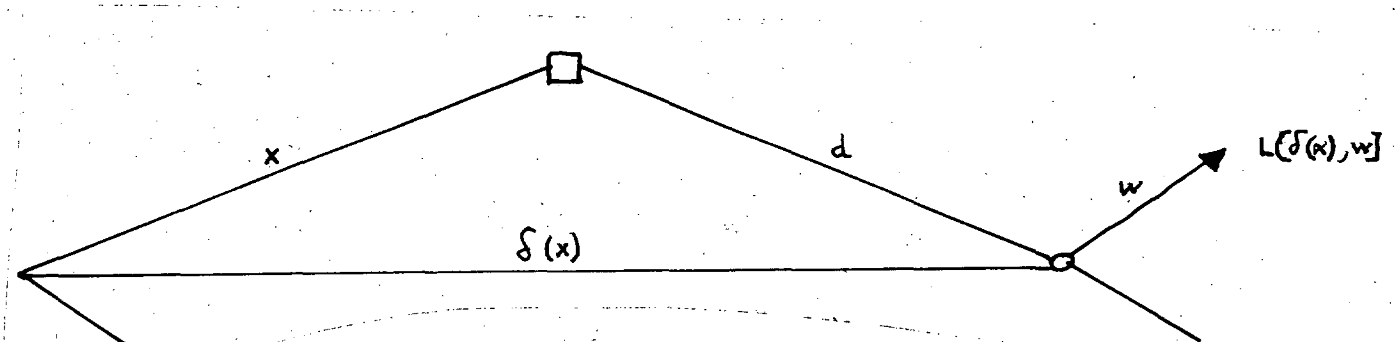


Figura 1

tres mismos casos que expusimos en el modelo sin experimentación.

Caso a') que las decisiones sean infinitas y la función de probabilidad del estado de la naturaleza sea contínua.

Como en el caso a') de decisión sin experimentación podríamos considerar que nos encontrásemos en este caso cuando tratásemos de dimensionar la altura de una presa, el conjunto de posibles valores de la altura de la presa sería el conjunto de las alternativas o decisiones y el estado de la naturaleza sería el caudal anual del río, parámetro del que obtenemos la función de distribución de probabilidad. En este modelo realizamos un experimento que consiste en medir la altura del nivel de agua del río, variable que podemos suponer contínua y de la cual podemos obtener la función de distribución condicionada al estado de naturaleza que se presente.

En este caso calculamos la función de probabilidad f (x/w) de los resultados del experimento, condicionada al estado de la naturaleza, teniendo en cuenta que sólo podemos realizar un experimento. Sea X el conjunto de todos los resultados posibles de ese experimento si consideramos como función de pérdida la expresión:

$$\mathscr{L}(\delta, w) = \int_{\Omega} L[\delta(x), w] \cdot f(x/w) \cdot d_x$$

pasamos de un problema de decisión con experimentación a uno sin experimentación.

Con el criterio del valor esperado la función de riesgo será:

$$R(\delta, P) = \int_{\Omega} \mathscr{L}(\delta, w) \cdot dP(w) = \int_{\Omega} \mathscr{L}(\delta, w) \cdot p(w) \cdot dw$$

y sustituyendo la expresión de la función de pérdida quedará:

$$R(\delta, P) = \int_{\Omega} \int_{X} L[\delta(x), w] \cdot f(x/w) \cdot p(w) \cdot dx \cdot dw$$

La decisión δ — óptima que escogerá el decisor será aquella para la cual la función de riesgo sea mínima y esta regla de decisión será la solución del problema de decisión con experimentación en este tipo de ambiente.

El ínfimo de la función de riesgo R (δ, P) dentro del conjunto le denominaremos riesgo de Bayes frente a la distribución a priori P y lo representaremos por $\hat{R}(P)$

$$\hat{R}(P) = \inf_{\delta \in D} R(\delta, P)$$

La función de decisión cuyo riesgo asociado sea igual al riesgo de Bayes será la función de decisión óptima. Es decir, si existe un $\bar{\delta} \in \dot{D}$ tal que:

$$R(\bar{\delta}\epsilon, P) = \hat{R}(P)$$

a esta función le llamamos de decisión de Bayes. Esta función de decisión óptima no tiene por qué ser la única.

Caso b') que las decisiones sean infinitas y las funciones de probabilidad del estado de la naturaleza sea discreta.

Como en el caso b') de decisión sin experimentación podríamos considerar que nos encontramos en este caso cuando tratásemos de dimensionar la superficie abrigada de un puerto. El conjunto de posibles valores de la superficie abrigada sería el conjunto de las alternativas o decisiones y el estado de la naturaleza sería el tráfico portuario que suponemos aleatorio y con función de distribución discreta conocida. En este modelo realizamos un experimento que consiste en observar la variable, volumen del comercio internacional, variable que podemos suponer continua y obtener la función de distribución condicionada al estado de la naturaleza que se presente.

En este caso calculamos la función de probabilidad f (x/w) de los resultados del experimento condicionada al estado de la naturaleza, teniendo en cuenta que sólo podemos realizar un experimento. Si X es el conjunto de todos los resultados posibles de ese experimento y consideramos como función de pérdida la expresión:

$$\mathscr{L}(\delta, w) = \int_{X} L[\delta(x), w] \cdot f(x/w) \cdot dx = \int_{X} \{ C[\delta(x), w] - B[\delta(x), w] \} \cdot f(x/w) \cdot dx$$

el esquema que tendríamos en este caso sería el siguiente:

	P_1	P_2	.....	P_n
	w_1	w_2	.....	w_n
δ	$\mathscr{L}(\delta, w_1)$	$\mathscr{L}(\delta, w_2)$	.....	$\mathscr{L}(\delta, w_n)$

que con el criterio del valor esperado tendremos:

$$R(\delta, P) = p_1 \cdot \mathscr{L}(\delta, w_1) + p_2 \cdot \mathscr{L}(\delta, w_2) + \ldots + p_n \cdot \mathscr{L}(\delta, w_n)$$

Igual que anteriormente

$$\hat{R}(P) = \inf_{\delta \in D} R(\delta, P)$$

y la decisión óptima será aquella $\hat{\delta}$ que cumpla que:

$$R(\hat{\delta}, P) = \hat{R}(P)$$

Caso c') que las decisiones sean finitas y la función de probabilidad del estado de la naturaleza sea discreta.

Como en el caso c') de decisión sin experimentación considerar que nos encontramos en este caso cuando tratamos de dimensionar el número de carriles de una carretera y consideramos que el estado de la naturaleza del problema es el tráfico, que supondremos, aleatorio y con función de distribución discreta conocida. En este modelo realizamos un experimento que consiste en observar la variable, número de vehículos, variable que podemos suponer continua y obtener la función de distribución condicionada al estado de la naturaleza que se presente.

En este caso calculamos la función de probabilidad f (x/w) de los resultados del experimento condicionada al estado de la naturaleza, teniendo en cuenta que sólo podemos realizar un experimento. Si X es el conjunto de resultados posibles de ese experimento y consideramos como función de pérdida la expresión:

$$\mathscr{L}(\delta, w) = \int_X L[\delta(x), w] \cdot f(x/w) \cdot dx =$$

$$= \int_X \{ C[\delta(x), w] - B[\delta(x), w] \} \cdot f(x/w) \cdot dx$$

el esquema de la solución en este caso será el siguiente:

	P_1	P_2	.....	P_n
	w_1	w_2	.....	w_n
δ_1	$\mathscr{L}(\delta_1, w_1)$	$\mathscr{L}(\delta_1, w_2)$	.....	$\mathscr{L}(\delta_1, w_n)$
δ_2	$\mathscr{L}(\delta_2, w_1)$	$\mathscr{L}(\delta_2, w_2)$	.....	$\mathscr{L}(\delta_2, w_n)$
:	:	:		:
δ_m	$\mathscr{L}(\delta_m, w_1)$	$\mathscr{L}(\delta_m, w_2)$	.....	$\mathscr{L}(\delta_m, w_n)$

Se trata de elegir la función de decisión δ de forma que minimice la pérdida esperada:

$$\hat{R}(P) = \inf_{\delta \in D} R(\delta, P) = \sum_{w} \mathscr{L}(\delta, w) \cdot p(w) =$$

$$= \sum_{w} \left[\sum_{x/w} L[\delta(x), w] \cdot p(x/w) \right] \cdot p(w)$$

c) Una sola experiencia previa, ambiente de incertidumbre

Las consideraciones realizadas en el ambiente de incertidumbre para el modelo de decisión sin experimentación son válidas igualmente en el caso de modelo con experimentación. El cálculo de decisiones minimax si es este el criterio de decisión escogido en el caso de que tanto el conjunto de estados de naturaleza Ω como el de funciones de decisión aleatorizadas D^* sean finitos se reduce como sabemos a un problema de programación lineal.

En general podemos expresar que si utilizamos como criterio de decisión bajo incertidumbre el criterio minimax, a cada función de decisión aleatorizada $\delta^* \in D^*$ le asociamos un indicador numérico.

$$S(\delta^*) = \sup_{\Omega} \mathscr{L}^*(\delta^*, w)$$

y definimos el valor minimax como el ínfimo de estos valores numéricos.

$$v = \inf_{\delta^* \in D^*} \sup_{\Omega} \mathscr{L}^*(\delta^*, w)$$

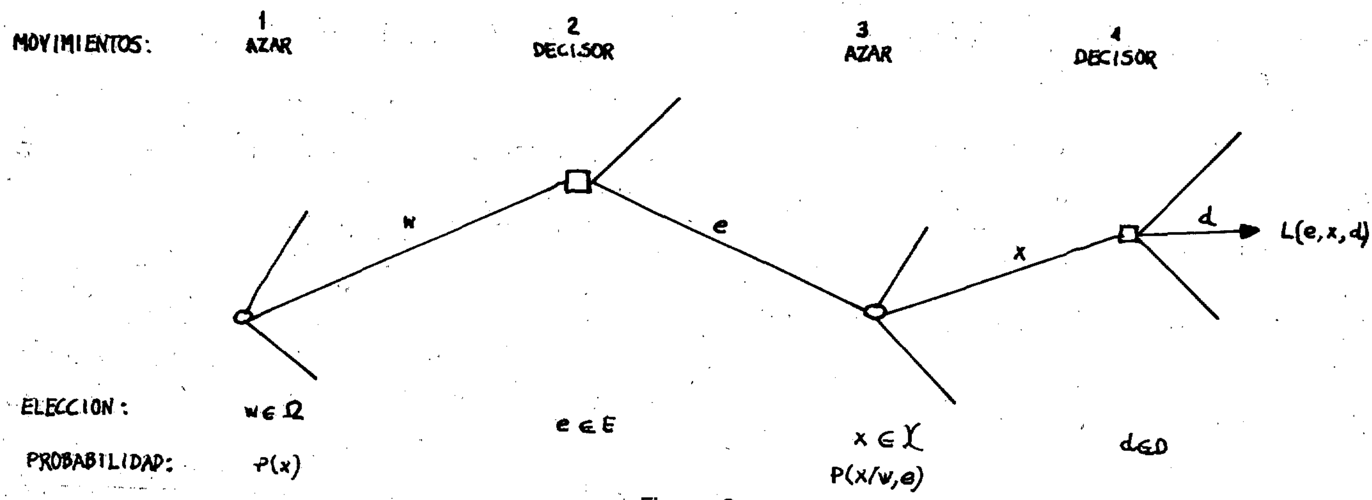


Figura 2

Una función de decisión aleatorizada es una regla de decisión minimax y lo representaremos por $\bar{\delta}^*$ si $S(\bar{\delta}^*)$ alcanza el valor minimax, es decir:

$$\sup_{\Omega} \mathscr{P}^*(\bar{\delta}^*, w) = S(\bar{\delta}^*) = v = \inf_{\delta^*} \sup_{\Omega} \mathscr{P}(\delta^*, w)$$

Si el superior y el inferior se alcanzan dentro de los conjuntos Ω y D^* respectivamente, podemos hablar de máximo y mínimo, entonces el valor minimax sería el mínimo en D^* de los máximos en Ω de la pérdida esperada $\mathscr{L}^*(\delta^*, w)$ de ahí que reciba nombre de función de decisión minimax.

d) Varias experiencias previas, ambiente de riesgo

Este caso coincide con lo que de manera general hemos expuesto en la introducción de este apartado. El problema se puede representar mediante el gráfico de la figura 2.

En un primer movimiento, el decisor elige un experimento del espacio E.

En un segundo movimiento, el azar selecciona un resultado x con probabilidad p(x/e).

En un tercer movimiento, el decisor elige una decisión d de conjunto D.

En un cuarto movimiento, el azar selecciona un estado $w \in \Omega$ según la probabilidad p (w/x,e).

La pérdida que el decisor obtiene como consecuencia de los cuatro movimientos anteriores vendrá dada por el valor de L(e,x,d,w)

$$L(e,x,d,w) = C(e,x,d,w) - B(e,x,d,w)$$

Este sería el resultado si trabajamos en forma extensiva basándonos en el árbol de decisión que hemos expuesto. Si realizamos el análisis en forma normal en lugar de trabajar con las decisiones $d \in D$, trabajamos con el conjunto de las aplicaciones de X en D.

$$D = \{ \delta(x)\ \delta : X \rightarrow D \}$$

aplicaciones que reciben el nombre de reglas o funciones de decisión.

Utilizando, en el ambiente de riesgo que estamos estudiando, el criterio del valor esperado y considerando que todos los conjuntos que intervienen en el problema son finitos el planteamiento sería elegir el experimento e y la función de decisión δ (x) de forma que minimicen su pérdida esperada:

$$\hat{R}(e, \delta) = \sum_{w} \left[\sum_{x/w} L(e, x, \delta(x), w) \cdot p(x/w) \right] \cdot p(w)$$

Para un experimento determinado e, el decisor elegirá aquella regla de decisión δ que minimice $\hat{R}(e,\delta)$.

$$\hat{R}(e) = \min_{\delta} \hat{R}(e, \delta)$$

Por último, el decisor elegirá el experimento e de forma que haga mínimo a su vez el valor de $\hat{R}(e)$. Por lo tanto se ha de elegir el par [e, $\delta(x)$] de forma que:

$$\hat{R} = \min_{e} \min_{\delta} E_w \left[E_{x/w} \left(L \left(e, x, \delta (x), w \right) \right) \right]$$

Se podría tratar el caso continuo de alguno o todos los conjuntos que intervienen en el problema siguiendo esquemas similares a los anteriores. Este caso se presentaría en la práctica, por ejemplo, cuando estemos calculando el dimensionamiento de un dique de escollera. Dada la distribución a priori del estado de la naturaleza W, que en este caso será el oleaje en el punto de ubicación del dique. Consideramos la probabilidad de que se supere una determinada altura de ola. Sea W_1 el estado de naturaleza que representa el hecho de que la altura de ola sea mayor que H. De la distribución a priori del oleaje obtenemos el valor de la probabilidad P de que se presente W_1.

La probabilidad de que se presente el caso W_2 (que la altura de ola sea menor que H) será (1-P).

Realizamos diferentes experimentos con diferentes estados de naturaleza W variando el valor de H y observamos la variable aleatoria x condicionada a W, que podemos considerar como $x = 1$ si no hay rotura del dique, $x = 0$ si hay rotura parcial del dique variando en cada experimento el número de olas que incide sobre el dique. De estas observaciones obtenemos las diferentes distribuciones de probabilidad condicionadas.

Calculando en cada caso los costes asociados a cada experimento, incluyendo las diferentes roturas en el dique, así como los beneficios correspondientes obtenemos para cada caso las funciones de pérdida correspondientes. Eligiremos el experimento y la decisión que hagan mínimo la pérdida esperada conforme hemos expuesto.

e) *Varias experiencias previas, ambiente de incertidumbre*

En este tipo de problema es extraño que se presente el ambiente de incertidumbre pues la variable aleatoria observada X da una información que será aprovechable para definir el verdadero valor del parámetro w.

f) *Generalización del problema de decisión con experimentación*

La generalización del problema de decisión con experimentación podemos encuadrarlo en lo que se denomina decisión estadística. Este modelo puede formularse así:

Sea un conjunto de variables aleatorias (x_1, x_2, ..., x_m, y_m, y_1, y_2, ..., y_n) conjuntamente distribuidas según la función de distribución F (X,Y/w) siendo w el posible valor del estado de la naturaleza. Un decisor tiene que escoger una decisión $d \in D$ del conjunto de posibles decisiones, después de observar una realización de X pero antes de observar Y. Una vez tomada una decisión observa Y entonces incurre en una pérdida que dependerá de la escogida, del valor w y de los valores observados. El problema consiste en buscar una decisión después de observar X que minimice esa función de pérdidas.

Este problema es más general que el que hemos estudiado puesto que la pérdida además de depender de D y de Ω, depende de unas consecuencias posteriores, las cuales no se conocen sino con cierta probabilidad.

g) *Consideraciones sobre el coste de las observaciones*

La observación de una variable X es decir la experimentación lleva asociado un coste. Este coste debe de tenerse en cuenta cuando se calcula el riesgo de una función de decisión en la que intervienen observaciones de X y tiene especial importancia cuando se ha de decidir que variables han de observarse o bien si se realiza experimentación o no. Sea c(w,x) el coste de la observación del valor x de la variable X cuando W = w. Si p(w) es la función de densidad de W, el coste esperado de la observación es:

$$E [c (w, x)] = \int_{\Omega} \int_{X} c (w, x) \cdot f (x/w) \cdot p (w) \cdot dx \cdot dw$$

El riesgo total vendrá entonces definido por:

$$R (\delta, P, C) = R (\delta, P) + E [c (w,x)]$$

es decir, por la suma del riesgo $R(\delta,P)$ y el coste esperado de la observación.

Se ha de seleccionar una observación X y la correspondiente función de decisión de Bayes δ que minimice el riesgo total.

En general lo que ocurre es que el coste de la experimentación depende del tamaño de la muestra y no del valor de w y del X observado.

Para la obtención de una cuota superior para el tamaño muestral óptimo recurriremos a la descomposición de la pérdida L(e,x,d,w,) en dos sumandos. Un sumando denominado pérdida terminal L_t (w,d) que depende del estado de la naturaleza que se presente y de la decisión tomada y otro sumando denominado pérdida muestral L_m (e,x) que sólo depende del experimento e y de su resultado x. Cuando se pueda obtener esta descomposición diremos que la pérdida es aditiva. La condición necesaria para que la pérdida sea aditiva es que se verifiquen las siguientes premisas:

— Que las consecuencias de (e, x) y (d, w) sean medibles en la misma unidad.
— Que la pérdida de este valor numérico sea lineal sobre todo el conjunto de las posibles consecuenicas del problema.

Cuando las posibles consecuencias de una decisión sean complicadas y no puedan especificarse mediante un valor numérico, el método más efectivo para asignar pérdidas es establecer una escala para las consecuencias de cada resultado en función de un único valor numérico y asignar las pérdidas a las consecuencias a través de una función de pérdida definida sobre dichos valores numéricos.

Si la pérdida L (e,x,d,w) puede expresarse como una de las dos pérdidas definidas anteriormente, es decir si:

$$L\ (e,\ x,\ d,\ w) = L_t\ (d,\ w) + L_m\ (e,\ x)$$

la expresión del riesgo se podrá expresar como la suma de los riesgos debidos a las pérdidas terminal y muestral, es decir:

$$\hat{R}\ (e) = \hat{R}_m\ (e) + \hat{R}_t\ (e)$$

En los casos en que esta descomposición es posible los problemas se simplifican mucho. Supongamos ahora que llamamos experimento nulo e_o al que consiste en no hacer experimentación. El resultado será x_o. Definimos entonces la decisión d_w como aquella que verifica que:

$$\inf\ L\ (e_o,\ x_o,\ d,\ w) = L\ (e_o,\ x_o,\ d_w,\ w)\quad ;\forall d \in D$$

La pérdida asociada a d_w será la inferior de las pérdidas que puede producirse por lo que aplicando el criterio de SAVAGE tendremos que:

$$r\ (e,x,d,w) = L\ (e,x,d,w) - L\ (e_o,\ x_o,\ d_w,\ w)$$

Luego

$$L\ (e,x,d,w) = r\ (e,x,d,w) + L\ (e_o,\ x_o,\ d_w,\ w)$$

Como el segundo sumando sólo depende de w, la minimización de la pérdida con respecto a d y e, es equivalente a minimizar el riesgo de SAVAGE con respecto a d y e.

El riesgo de SAVAGE esperado con el experimento e que da como resultado asociado x será:

$$\hat{r}\ (e,x,d) = \sum_{w} r\ (e,\ x,\ d,\ w)\ .\ p\ (w)$$

El decisor escogerá aquella decisión $\hat{d}$ que haga mínimo el riesgo esperado:

$$\hat{r}\ (e,x) = \hat{r}\ (e,x,\hat{d}\,) = \min_{d}\ \hat{r}\ (e,x,d)$$

El riesgo esperado de $\hat{r}$ (e, x) será:

$$\hat{r}\ (e) = E_{x/e}\ [\ \hat{r}\ (e,\ x)]$$

por lo que el decisor escogerá el experimento $\hat{e}$ que haga mínimo el valor $\hat{r}$(e)

$$\hat{r} = \min_{e}\ \hat{r}\ (e) = \hat{r}\ (\hat{e})$$

De aquí deducimos que:

$$\hat{R}\ (e) = E_w\ [\ L\ (e_o,\ x_o,\ d_w,\ w)\ ] + \hat{r}(e) = \dot{L} + \hat{r}(e)$$

llamando

$$\dot{L} = E_w\ [\ L\ (e_o,\ x_o,\ d_w,\ w)]$$

Luego tenemos pues que:

$$\hat{R}(e) = \hat{R}_m(e) + \hat{R}_t(e)$$
$$\hat{R}(e) = L + \hat{r}(e)$$

luego

$$\hat{R}(e) = \hat{R}_t(e) + \hat{R}_m(e) = L + \hat{r}(e) =$$
$$= L + \hat{r}_t(e) + \hat{R}_m(e)$$

de donde

$$\hat{R}_t(e) = L + \hat{r}_t(e)$$

Teniendo en cuenta que la pérdida muestral es la debida a la experimentación podemos llamarlo *costo del muestreo* y representarlo por

$$C_m(e,x) = L_m(e, x)$$

Podemos obtener que:

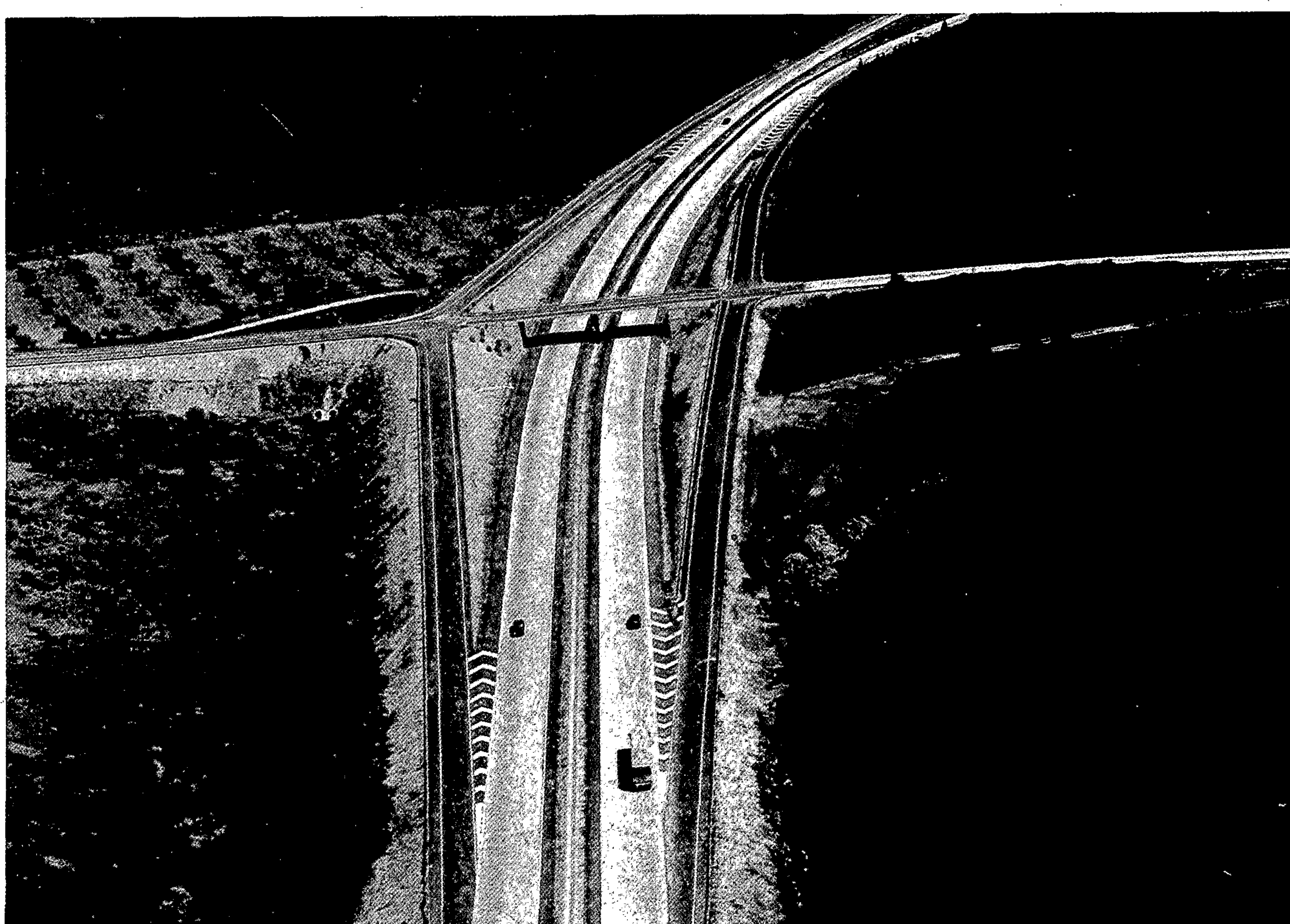
$$\hat{r}(e) = \hat{r}_t(e) + \hat{c}_m(e)$$

con lo cual si suponemos que el espacio de los experimentos lo podemos ordenar mediante una sucesión $\{ e_n \}$ de experimentos de tal forma que tanto $\hat{R}_t(e_n)$ como $\hat{C}_m(e)$ son funciones crecientes de n podemos mediante las relaciones expuestas encontrar el tamaño óptimo muestral. Es decir tratamos de encontrar el tamaño óptimo n_o del tamaño muestral que haga mínimo el valor de:

$$\hat{R}(e_n) = \hat{R}_t(e_n) + \hat{R}_m(e_n) = \hat{R}_t(e_n) + \hat{c}_m(e_n)$$

La minimización de $\hat{R}(e_n)$ es equivalente a la minimización de $\hat{r}(e_n)$, cuyo valor es:

$$\hat{r}(e_n) = \hat{r}_t(e_n) + \hat{c}_m(e_n)$$



Supongamos que hemos calculado $\hat{r}(e_{n'})$ para un tamaño muestral n'.

$$\hat{r}(e_{n'}) = \hat{r}_t(e_{n'}) + \hat{c}_m(e_{n'})$$

para todo n > n' se demuestra que se ha de verificar que:

$$\hat{C}_m(e_n) - C_m(e_{n'}) \leqslant \hat{r}_t(e_{n'})$$

Si calculamos la cota correspondiente al experimento nulo cuyo costo es cero tendremos que:

$$\hat{C}_m(e_n) \leqslant \hat{r}_t(e_o)$$

Una vez obtenida la cota inicial podemos comenzar el cálculo de n_o basándonos en el hecho de que cuando realizamos un experimento por pequeño que sea su tamaño muestral produce un valor $r_t(e_{n'})$ mucho menor que el debido al experimento nulo $\hat{r}_t(e_o)$, con lo que vamos a ir disminuyendo progresivamente la cota superior hasta encontrar el valor óptimo n_o.

IV. DIMENSIONAMIENTO CUANDO LA FUNCION DE PERDIDAS DEPENDE DE UN PARAMETRO

El caso de que la función de pérdidas dependa de un parámetro se deberá generalmente a que los estados de la naturaleza que intervienen en el problema dependan de un parámetro. Si consideramos el dimensionamiento de una carretera las fluctuaciones aleatorias alrededor de la tendencia del tráfico por ella será el estado de la naturaleza que dependerá del número de vehículos; el número de vehículos será el parámetro del cual dependa la función de pérdidas. Si consideramos el dimensionamiento de la superficie abrigada de un puerto, las fluctuaciones aleatorias alrededor de la tendencia del tráfico marítimo en él, será el estado de la naturaleza que dependerá del comercio internacional; el comercio internacional será el parámetro del cual dependa la función de pérdidas.

Estos dos ejemplos son una muestra de que podemos enfocar el problema del dimensionamiento de algunos proyectos considerando que la función de pérdidas depende de un parámetro y de esta manera no necesitamos recurrir al artificio de intentar conocer o fijar subjetivamente las probabilidades de un crecimiento muy alto, alto, medio, bajo, muy bajo. Artificio este que ha sido utilizado en el desarrollo de varios casos anteriormente expuestos.

La solución en este caso se enfocará considerando que la decisión óptima se obtiene resolviendo un juego bipersonal paramétrico. El recurrir a esta solución puede ser criticada desde la consideración de que plantear los problemas de decisión en ambiente de incertidumbre como un juego bipersonal de suma nula contra la naturaleza no parece adecuado ya que no parece lógico suponer que la naturaleza pretenda la ruina del decisor. No obstante esta crítica, el desarrollo de ambas teorías, la de juegos y la de la decisión, han sido complementarias. Hecha esta observación expondremos la solución de nuestro problema con estas hipótesis:

- El conjunto Ω de estados de la naturaleza es finito y representa las fluctuaciones aleatorias alrededor de la tendencia ponderadas de forma discreta.

  Representa el primer jugador de un juego bipersonal.
- El conjunto D de alternativas o decisiones es finito. Representa el segundo jugador del juego.
- La función de pérdidas depende de un parámetro Θ.

El esquema del problema vendrá representado así:

	W_1	W_2	....	W_n
d_1	$L_{11}(\Theta)$	$L_{12}(\Theta)$	....	$L_{1n}(\Theta)$
d_2	$L_{21}(\Theta)$	$L_{22}(\Theta)$	....	$L_{2n}(\Theta)$
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
d_m	$L_{m1}(\Theta)$	$L_{m2}(\Theta)$	....	$L_{mn}(\Theta)$

Se demuestra que si los elementos $L_{ij}(\Theta)$

son funciones continuas de Θ entonces el valor del juego es una función continua de Θ.

Igualmente se demuestra que si los elementos L_{ij} (Θ) son funciones monótonas crecientes (o decrecientes) de Θ entonces el valor del juego es una función monótona creciente (o decreciente) de Θ. Además si todos los L_{ij} (Θ) lo son estrictamente también lo es el valor del juego.

El método a seguir para obtener el valor del juego $\nu(\Theta)$ y las estrategias óptimas E (J_1, Θ) E(J_2, Θ) consta de las siguientes fases:

a) Se investigan aquellos valores de Θ para los cuales existen puntos de silla en la matriz $L_{ij}(\Theta)$. Para cada uno de ellos se define el conjunto:

$$\Theta_{ij} = \{ \theta \in \Theta \mid L_{lj}(\Theta) \leqslant L_{ij}(\Theta) \leqslant L_{ik}(\Theta)$$

$$K = 1, 2, \ldots, n$$

$$l = 1, 2, \ldots, m$$

Θ_{ij} puede ser vacío lo que significa que L_{ij} (Θ) no puede ser punto de silla.

Si $\Theta_{ij} \neq \Phi$ entonces se tiene que

$$\vartheta(\Theta) = L_{ij}(\Theta) \text{ para } \theta \in \Theta_{ij}$$

además las estrategias puras de los dos jugadores son óptimas para todo $\theta \in \Theta_{ij}$.

Si $\bigcup_{ij} \Theta_{ij} = \Theta$ hemos terminado. Caso contrario se pasa a la fase b.

b) Se investigan las submatrices de orden 2 de la matriz de pérdidas, habiendo exluído previamente aquel o aquellos valores de Θ para los cuales $\vartheta(\Theta) = 0$
a ver si tienen soluciones simples, es decir se consideran los conjuntos.

$$\Theta_{ii'jj'} = \left\{ \theta \in \Theta \mid M^{jj'}_{ii'}(\Theta) = \begin{vmatrix} L_{ij}(\Theta) & L_{ij'}(\Theta) \\ L_{i'j}(\Theta) & L_{i'j'}(\Theta) \end{vmatrix} \text{ admite soluciones óptimas} \right\}$$

Si $\Theta_{ii'jj'} \neq \Phi$ entonces el valor del juego es

$$\vartheta(\Theta) = \frac{|M^{jj'}_{ii'}(\Theta)|}{J'_2 M^{jj'}_{ii'}(\Theta) J_2} = \frac{|M^{jj'}_{ii'}(\Theta)|}{\Sigma L^*_{ij}(\Theta)}$$

L^*_{ij} (Θ) son los elementos de la matriz adjunta de $M^{jj'}_{ii'}(\Theta)$
y las estrategias óptimas vienen dadas por

$$\varphi^* = \vartheta(\Theta) \cdot J'_n (M^{jj'}_{ii'}(\Theta)^{-1}$$

$$n^* = \vartheta(\Theta) \cdot (M^{jj'}_{ii'}(\Theta)^{-1} J_n$$

Hay que tener en cuenta que los subconjuntos de

$$\Theta, \Theta_{ij} \text{ y } \Theta_{ii'jj'}$$

pueden tener frontera común si las funciones L_{ij} (Θ son continuas y obviamente para estos valores de Θ el valor del juego calculado en la fase a) y b) coinciden. Si ahora.

$$\left\{ \bigcup_{ij} \Theta_{ij} \right\} \cup \left\{ \bigcup_{ii'jj'} \Theta_{ii'jj'} \right\} = \Theta$$

hemos terminado. Caso contrario, se prosigue, bien hasta que el espacio paramétrico se haya cubierto por todos los subconjuntos de la forma anterior, o bien, hasta que hayamos examinado todas las submatrices cuadradas de orden min $\{ m, n \}$ de L_{ij} (Θ), en cuyo caso el teorema fundamental nos garantiza que Θ ha quedado cubierto por subconjuntos de la forma anterior.

De esta forma obtenemos la alternativa òptima para cada uno de los problemas que planteemos según este modelo. Ahora bien en general la estrategia óptima será una combinación lineal de las estudiadas con lo cual si necesitamos una mayor precisión en cuanto al dimensionamiento podemos reiterar todo el proceso precisamente para alternativas comprendidas entre las que nos facilitan la solución óptima.

BIBLIOGRAFIA

1. BLACKWELL D. and GIRSHICK, M.A.: *«Theory of games and statistical decisions»*. p.p. 261-270. Dover Publications Inc., New York 5.ª Ed. 1979.
2. CABRERA CABRERA, MIGUEL.: *«Modelo operativo para la toma de decisiones de inversión en preyectos de obras públicas en ambiente de certeza, riesgo o incertidumbre»*. E.T.S.I.C.C. y P. Madrid 1988.
3. DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS.: *«Metodología para la evaluación de proyectos de inversión en carreteras»*. M.O.P.U. 1980.
4. DIRECCION GENERAL DE OBRAS HIDRAULICAS.: *«Metodología para la evaluación de proyectos de inversión en defensa contra avenidas y encauzamientos»*. M.O.P.U. 1981.
5. DIRECCION GENERAL DE PUERTOS Y COSTAS.: *«Metodología para la evaluación de proyectos de inversiones en puertos»*. M.O.P.U. 1981.
6. FRENCH, SIMON.: *«Decisión theory and introduction to the mathematics of rationality»*. Capítulos VI, VII y IX. J. Wiley and Sons, 1986.
7. FRENCH, SIMON.: *«From decision theory to decision analysis»*. In Eglese R.W. and Raud G.K. Pergamon Press p.p. 77-87. Developments in operational research, 1984.
8. GIRON GONZALEZ-TORRE, FRANCISCO J.: *«Teoría de juegos»*. Capítulos IX y XI. U.N.E.D. 1977.
9. GROOT, MORRIS H. de.: *«Optimal statistical decision»*. P.p. 121-149, Mac Graw-Hill Book Company, 1970.
10. INFANTE MACIAS, RAFAEL.: *«Teoría de la decision»*. Capítulos XIII, XIV y XVIII. U.N.E.D. 1978.
11. KEENEY, R.L.: *«Equity and public risk»*. Ops. Res. 28, p.p. 527-534, 1980.
12. LUCE, R.D.: *«Individual choice behavior»*. John Wiley and Sons, New York 1957.
13. LUCE, R.D. and RAIFFA, H.: *«Games and decisions»*. John Wiley and Sons, New York 1957.
14. MILNOR, J.: *«Games against nature»*. In thrall, R. Coombs, C. and Davis, R. Decision Processes, 1954, p.p. 49-59. John Wiley and Sons.
15. RODRIGUEZ CARRASCO, J.M.: *«El arte de tomar decisiones y sus instrumentos»*. P.p. 82-95. Económicas y Empresariales C.E.C.A. n.° 1, 1975.
16. SECRETARIA GENERAL TECNICA.: *«Metodología General para la evaluación de proyectos de inversión pública»*. M.O.P.U. 1981.
17. WATSON, G.S.: *«Some Bayesian methods related to x^2»*. Bull. Inst. Statist 41 p.p. 64-76, 1986. 1986.
18. WATSON, S.R.: *«Decision Analysis as a replacement for cost-benefit analysis»*. Eur. J. Opl. Res. 3 1981, p.p. 242-248.

Miguel Cabrera Cabrera

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Madrid. Licenciado en Ciencias Económicas. Trabajó en HEYMO, S. A., Ingeniería Industrial , Química y Civil. Ha trabajado igualmente en la Administración Local y Autonómica. Ha sido Secretario General Técnico en la Comunidad de Madrid. Miembro de la Comisión de Asuntos Europeos y de la Comisión de Urbanismo y Medio Ambiente de la Comunidad de Madrid. Actualmente es Director Administrativo y Financiero del O.G.F.A.M.A.