

Análisis de Depósitos Cilíndricos Superficiales pretensados circunferencialmente

Julio A. Hernández Caneiro
Ingeniero Civil. Doctorando

*Profesor de la Facultad de Ingeniería Civil del Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría" de La Habana.
Miembro del Comité de Normalización del Cálculo Estructural de Cuba.*

Pimpo Hernández Pérez

Doctor en Ciencias Técnicas. Ingeniero Civil.

Profesor Titular de la Facultad de Ingeniería Civil del Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría" de La Habana.

Académico Titular Fundador de la Academia Panamericana de la Ingeniería

Premio Vector de Oro de la UPADI.

RESUMEN

En este artículo los autores presentan un método unificado para el cálculo de los depósitos cilíndricos superficiales de hormigón pretensado, concebido a partir de un modelo físico que discretiza la pared en anillos horizontales y ménsulas verticales al que se aplica el principio de descomposición de la carga exterior y la compatibilidad del corrimiento radial de ambos sistemas, para la obtención de las leyes de variación de la Presión Anular y el Momento Flector producidos por el empuje del líquido. Durante la modelación analítica del pretensado circunferencial se toma el diagrama de Presión Anular, generalmente no lineal, y se determina la cantidad y ubicación de las unidades de refuerzo pretensado, a través de la transformación de su función "real" en un diagrama bilineal equivalente que sustituye los procesos de integración.

ABSTRACT

In this paper the authors present an unified method for the calculation of the cylindrical and superficialities deposits of prestressed concrete, conceived starting from to physical model to divide the wall of the deposit in horizontal rings and vertical brackets, to which the principle of descomposition of the external load and also the compatibility of the radial landslide of both systems, is applied, refered to push of the stored liquid. During the analytic modelation the diferencial equation of the elastic was obtained and were deduced the laws of variation of the Ring Pressure and Flexure Moment exercised by the stored liquid. Later it take the diagram of Ring Pressure, generally lineal not, and substituted it by an equivalent bilinear function, which avoid the integration process.

INTRODUCCIÓN

Los Depósitos constituyen obras de ingeniería que se requieren en no pocas inversiones sociales e industriales dirigidas a completar y desarrollar la infraestructura de cualquier re-

gión y resulta difícil pensar en un sistema de abastecimiento, de agua por ejemplo, en el cual no esté presente algún tipo de depósito o la combinación de ellos, tan siquiera como elemento regulador con capacidad suficiente para hacer frente a cualquier contingencia que pueda acontecer. Dentro de las muy di-

versas tipologías que se conocen, el depósito cilíndrico superficial ha representado tradicionalmente una buena alternativa para alcanzar estos objetivos y su reiterado uso sugiere mejorar la precisión y formato de sus expresiones de cálculo en aras de ofrecer a sus calculistas modelos relativamente sencillos cuyos resultados reflejen mejor el comportamiento de sus sistemas estructurales, especialmente el referido a la pared, y en consecuencia hacer cada vez más competitivos sus costos.

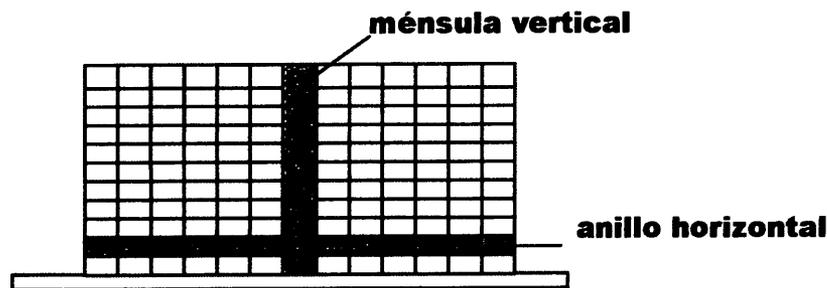


Fig. 1 Mecanismo resistente idealizado. Discretización de la pared.

MODELO FÍSICO. MECANISMO DE LOS ANILLOS Y LAS DOVELAS

La pared de los depósitos cilíndricos que contienen a una masa líquida se encuentra sometida a empujes interiores de igual intensidad en todas direcciones cuya magnitud depende de la profundidad a que se encuentre la sección que se analiza, y las diferentes formas de conexión de sus dos extremos (con el fondo o con la cubierta si existiera), modifican perceptiblemente la magnitud de los esfuerzos internos que en ella aparecen, pudiéndose originar incluso momentos flectores en la misma. Lo mismo ocurre con el pretensado circunferencial, el cual puede ser asimilado como un empuje de sentido contrario al del líquido contenido.

Para determinar estos esfuerzos se propone un mecanismo resistente que discretiza la pared en dos sistemas idealizados que trabajan conjuntamente, el primero constituido por **anillos horizontales** de una altura dada, y el segundo por **ménsulas verticales** cuyos vínculos, superior e inferior, se corresponderán con los de la pared del depósito que se analice, idea razonable que se expresa en [1] y se representa en la Fig.1.

Cuando la carga exterior representada en este caso por la presión ejercida por el líquido contenido o por el pretensado circunferencial (si estuviere presente) deforma la pared, el mecanismo resistente descrito en el párrafo anterior funciona de manera que los dos sistemas definidos en el Modelo pueden considerarse virtualmente independientes y recibiendo cada uno una porción dada de la carga exterior, con la condición de que el corrimiento radial que se origina en un punto cualquiera del medio continuo sea único lo mismo evaluándolo en el sistema "anillo" trabajando a tracción que en el sistema "ménsula" trabajando a flexión, para garantizar de esta forma la compatibilidad de los desplazamientos entre ambos.

El análisis se reduce entonces, a determinar las dos componentes de la presión hidrostática que actuando separadamente sobre cada sistema, produzca una misma deformación, condiciones ambas que conducen a la siguiente formulación:

$$P_{a(z)} + P_{V(z)} = f(z) \quad (1)$$

$$\Delta_A(z) = \Delta_V(z) \quad (2)$$

La función $f(z)$ representa la ley de variación de la carga exterior y puede corresponder igual a la presión hidrostática interior o al pretensado circunferencial.

MODELO ANALÍTICO. EL EMPUJE DEL LÍQUIDO COMO CARGA EXTERIOR

Resulta conveniente iniciar el análisis del depósito bajo la influencia de la presión del líquido como carga exterior y a causa de la distribución lineal que ella presenta, la ecuación (1) se transforma en:

$$P_{V(z)} + P_{a(z)} = \gamma \cdot z \quad (3)$$

La solución del sistema definido por las ecuaciones (2) y (3) consistirá en hallar las leyes que relacionan a Cargas y Corrimientos de manera tal que se satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones. Sin embargo, antes de abordar su solución es necesario que establezcamos las siguientes condiciones de trabajo:

- ▼ Abordaremos el caso de los depósitos cuya pared es de espesor constante en toda su altura e igual a (e_a).
- ▼ El Modelo admitirá la modificación de la rigidez de las secciones resistentes producto de la fisuración del hormigón, tomando como base la rigidez correspondiente a la sección resistente bruta dentro del Estado I no fisurado (K_B^T y K_B^F) para los anillos (Tracción) y para las ménsulas (Flexión), respectivamente.
- ▼ Si se define un coeficiente de reducción/amplificación de dicha rigidez que tenga en cuenta el grado de fisuración de ambos sistemas para cada estado de carga, la presencia de las armaduras de refuerzo y la favorable contribución del hormigón situado entre grietas vecinas (efecto "tensión-stiffness"), se admite incluir en las expresiones de deformación lo mismo la rigidez de la sección homogénea

no fisurada (K_H^{I-T} y K_H^{I-F}), o la rigidez de la sección fisurada (Estado II) (K_{HR}^{II-T} y K_{HR}^{II-F}), de tal manera que:

PARA LOS ANILLOS

$$K^T = c_j^T \cdot K_B^{I-T}$$

$$N_k < N_{fis} \Rightarrow c_j^T = c_I^T \Rightarrow K^T = K_H^{I-T}$$

$$N_k \geq N_{fis} \Rightarrow c_j^T = c_{II}^T \Rightarrow K^T = K_{HR}^{II-T}$$

PARA LAS MÉNSULAS

$$K^F = c_j^F \cdot K_B^{I-F}$$

$$M_k < M_{fis} \Rightarrow c_j^F = c_I^F \Rightarrow K^F = K_H^{I-F}$$

$$M_k \geq M_{fis} \Rightarrow c_j^F = c_{II}^F \Rightarrow K^F = K_{HR}^{II-F}$$

De esta manera para el sistema anular definido por anillos cuyas secciones resistentes poseen como ancho el espesor de la pared (e_a) y altura arbitraria (h_a), sometidos a esfuerzos directos de tracción, se demuestra que:

$$P_{a(z)} \cdot h_a = K^T \cdot \frac{u_{p(z)}}{R^2} = \left(c_j^T \cdot K_B^{I-T} \right) \cdot \frac{u_{p(z)}}{R^2} =$$

$$c_j^T \cdot \left(E_{bm} \cdot e_a \cdot h_a \right) \cdot \frac{u_{p(z)}}{R^2}$$

conduciendo a la igualdad

$$P_{a(z)} = c_j^T \cdot \frac{E_{bm} \cdot e_a}{R^2} u_{p(z)} \quad (4)$$

mientras que para el sistema vertical definido por ménsulas cuyas secciones resistentes poseen un peralto total igual a (e_a) y un ancho arbitrario (b_m), sujetas a esfuerzos de flexión, se obtiene:

$$P_{V(z)} \cdot b_m = \frac{d^2 [K^F]}{dz^2} \cdot \frac{d^2 u_{p(z)}}{dz^2} = K^F \cdot \frac{d^4 u_{p(z)}}{dz^4} = c_j^F \cdot K_B^{I-F} \cdot \frac{d^4 u_{p(z)}}{dz^4} =$$

$$c_j^F \cdot \left(E'_{bm} \cdot b_m \cdot \frac{e_a^3}{12} \right) \frac{d^4 u_{p(z)}}{dz^4}$$

$$P_{V(z)} = \left(c_j^F \cdot E'_{bm} \cdot \frac{e_a^3}{12} \right) \frac{d^4 u_{p(z)}}{dz^4} \quad (5)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (4) y (5) en (3) y considerando que en el modelo físico las ménsulas están realmente interconectadas (originándose una restricción de la deformación lateral propia de los elementos superficiales que modifica

el corrimiento absoluto de cualquier punto de la pared del depósito), se llega a obtener:

$$\frac{d^4 u_{p(z)}}{dz^4} + \left[\left(\frac{12 \cdot c_j^T}{n_b \cdot c_j^T} \right) \cdot \frac{(1-\mu^2)}{(R \cdot e_a)^2} \right] \cdot u_{p(z)} = \left[\frac{12 \cdot \gamma \cdot (1-\mu^2)}{c_{II}^F \cdot E'_{bm} \cdot e_a^3} \right] \cdot z \quad (6)$$

siendo:

- $u_{p(z)}$: corrimiento radial de la pared a la profundidad "z".
- n_b : relación de los módulos de deformación longitudinal a compresión y a tracción del hormigón que para cargas de servicio puede considerarse igual a la unidad. ($n_b = E'_{bm} / E_{bm}$)
- c_j^T, c_j^F : coeficientes de reducción / ampliación de la rigidez elástica que permiten considerar en el análisis la rigidez de la sección homogénea total o de la sección fisurada, en dependencia del estado de agrietamiento de la región que se considere.
- μ : coeficiente de Poisson.

La solución de la ecuación (6) junto a la obtención de sus tres primeras derivadas permiten formular las leyes de variación del corrimiento radial, giro, momento flector vertical y esfuerzo de corte a partir de cuatro constantes de integración que dependerán de las condiciones de apoyo de los bordes superior e inferior de la pared.

Los autores tienen resuelto el problema para seis de los casos más generales y frecuentes de condiciones de borde que pueden presentarse, incluyendo la posibilidad de que el apoyo superior, de existir, pueda considerarse elástico, propuesta útil cuando este apoyo pueda ser ofrecido por el sistema estructural de cubierta con una rigidez inferior a la que posee la pared. Estos casos son:

- C- I:** Borde Superior **LIBRE** y Borde Inferior con **SIMPLE APOYO VERTICAL**.
- C- II:** Borde Superior **LIBRE** y Borde Inferior **ARTICULADO**.
- C- III:** Borde Superior **LIBRE** y Borde Inferior **EMPOTRADO**.
- C- IV:** a) Borde Superior con **APOYO HORIZONTAL RÍGIDO** y Borde Inferior **ARTICULADO**.
b) Borde Superior con **APOYO HORIZONTAL DESPLAZABLE** y Borde Inferior **ARTICULADO**.
- C-V:** a) Borde Superior con **APOYO HORIZONTAL RÍGIDO** y Borde Inferior **EMPOTRADO**.
b) Borde Superior con **APOYO HORIZONTAL DESPLAZABLE** y Borde Inferior **EMPOTRADO**.
- C-VI:** Borde Superior e Inferior **EMPOTRADOS**.

Razones de espacio impiden escribir la formulación final que resulta de esta modelación.

EL EMPUJE DEL PRETENSADO CIRCUNFERENCIAL COMO CARGA EXTERIOR

El pretensado nace con la intención de contrarrestar los esfuerzos de tracción que pueden originarse por las acciones exteriores. En el caso de los depósitos cilíndricos superficiales la presión interior ejercida por el líquido contenido origina sobre la pared del depósito esfuerzos de tracción anular que deben ser resistido por el hormigón de la propia pared y el refuerzo ordinario circunferencial que se decida disponer. Sin embargo, en ocasiones las dimensiones globales del depósito y especialmente su diámetro, exigen espesores robustos de pared o elevadas cuantías de refuerzo para garantizar el equilibrio interno de las secciones con niveles aceptables de fisuración, pudiendo conducir a diseños con tan elevados consumos de materiales que comiencen a sugerir, por sí solos, la idea de recurrir al pretensado circunferencial con el fin de hacerlos más competitivos, tanto más cuanto mayor sea la tracción directa circunferencial inducida por la presión interna del líquido almacenado.

El estudio del empuje del líquido como carga exterior que antecedió a este trabajo permitió deducir, como ya se señaló, las leyes de variación de la componente correspondiente a la Presión Anular ejercida sobre los anillos, conjuntamente con las del Momento Flector y el Esfuerzo de Corte que activan el trabajo de las ménsulas, verificándose que a pesar de su estructura (se trata de leyes en las que se combinan funciones exponenciales y trigonométricas) resultan ser funciones continuas y derivables que permiten evaluar las magnitudes de dichas entidades a la profundidad que se desee considerar.

El conocimiento de estas leyes abre una posibilidad especial para abordar la forma en que debe quedar distribuido el acero pretensado circunferencial y a causa de su diversidad, se requiere hacer previamente un paréntesis para analizar las alternativas más frecuentes que se presentan a partir de la compatibilidad entre la solución analítica del problema (a la que en ocasiones se llega a través de modelos tan sofisticados como fríos) y la experiencia de ejecución heredada de generación en generación.

En principio lo más razonable sería pensar en una disposición de la armadura pretensada que origine una distribución de esfuerzos normales a la sección transversal de la pared de igual dirección, magnitud y sentido contrario (**compresión anular**) a la que ejerce el empuje del líquido (**tracción anular**), aun cuando desde el punto de vista constructivo esta propuesta conduzca a una variación irregular del refuerzo pretensado, pero factible de alcanzar con una adecuada tecnología constructiva.

Sin pretender abarcar todas las posibles distribuciones que puedan proponerse para esta armadura en cuanto a su ubicación, se exponen y comentan brevemente aquellas que con mayor regularidad se emplean:

- A) Espaciamiento CONSTANTE en toda la altura de la pared o parte de ella.
- B) Espaciamiento VARIABLE en toda la altura de la pared.
- C) Espaciamiento VARIABLE de una Faja a otra de pared pero CONSTANTE dentro de cada Faja.

La distribución tipo **(A)** resulta ser la de menor complejidad constructiva, sin embargo, presenta el inconveniente estructural de ejercer una compresión anular uniforme en toda la altura de la pared, lo que implica que si esta compresión es calculada para contrarrestar la mayor tracción inducida por el líquido (que es variable en toda ella), existirán zonas en las cuales el pretensado es sobrado, representando en consecuencia diseños poco competitivos desde el punto de vista del consumo del acero pretensado.

Por su parte la distribución tipo **(B)** es la más competente desde el punto de vista estructural pero la de mayor complejidad constructiva pues exige una variación sistemática del espaciamiento, aunque con una buena técnica constructiva se puede disminuir sensiblemente esta complejidad. La mayor ventaja estructural la ofrece el hecho de poder proponer una separación del refuerzo que equilibre con la mayor aproximación posible las tracciones que aparecen y que a su vez garantice una distribución "lineal" del empuje horizontal del pretensado, asimilado como un líquido virtual que siga la misma ley del empuje ejercido por el líquido, o sea, de la forma $(f_{(z)} = \gamma_v \cdot z)$ en la que (γ_v) es una constante que represente su pendiente, equivalente a la densidad de este líquido virtual, de tal manera que las tracciones anulares originadas en la dirección circunferencial puedan ser exactamente anuladas por las compresiones provocadas por el pretensado en esa misma dirección, o incluso previendo la posibilidad de dejar una compresión permanente en toda la altura de la pared como única posibilidad de alejar el riesgo de la fisuración y lograr de esta forma el llamado **PRETENSADO TOTAL**.

Claro que esta mayor ventaja estructural se traduce en diseños con los más bajos consumos de acero pretensado y ya esto, por sí sólo, constituye una sobrada razón para considerarlo.

Por último, la distribución tipo **(C)** presenta, simultáneamente, innegables ventajas constructivas y estructurales. En efecto, como el espaciamiento se hace constante por tramos, no es difícil garantizar la posición del refuerzo durante la ejecución de la obra, especialmente cuando no sean tantas las Fajas de pared en que se decida hacerlo variar. Además la posibilidad de ir modificándolo de esta manera permite situar los menores espaciamientos en aquellas regiones de la pared en que mayores sean las tracciones originadas por el empuje del líquido, optimizándose así las cuantías del refuerzo.

Por otro lado y con independencia de la distribución que se adopte, el acero pretensado se puede disponer en el interior de la pared o adosado a su paramento exterior, con la interesante cualidad de que ambas disposiciones garantizan que la

acción del pretensado sobre la sección transversal sea centrada. En efecto, cualquiera sea el punto de aplicación de la fuerza (tangencial o interior), se genera una tensión uniforme de compresión cuya resultante se ubica en el centroide de su sección transversal, pues al ser el anillo una estructura cerrada, se corresponde con una estructura estáticamente indeterminada y se le puede aplicar la teoría de la transformación lineal.

En consecuencia un supuesto cable cuyo trazado coincida con la línea centroidal de la pared es, de hecho, un **cable concordante** por lo que otro cualquiera que sea paralelo a él posee un trazado al que está asociado una línea de presión que coincidirá también con el eje centroidal. Esta razón conduce a la afirmación de que aun cuando el acero pretensado se adose a la superficie exterior de la pared o se ubique en su interior sin coincidir su trazado, incluso, con el eje centroidal, se está en presencia de una compresión centrada, directa o axial que simplifica considerablemente la manera de asimilar analíticamente el pretensado.

TRANSFORMACION DEL DIAGRAMA DE TRACCIONES ANULARES

Las leyes de Presión Anular $P_{A(z)}$ deducidas para cada uno de los seis casos mencionados anteriormente o para cualquier otro que se desee considerar, pueden ser convertidas en leyes de Tracción normal a la sección transversal de la pared con sólo multiplicarlas por la magnitud correspondiente al Radio del depósito, o sea, $N_{A(z)} = P_{A(z)} \cdot R$.

Es evidente la intención del pretensado circunferencial, dirigido precisamente a contrarrestar dichas tracciones y en el camino de una modelación analítica efectiva, resulta estratégico dividir el diagrama de Tracciones Anulares que se obtiene en tantas **FAJAS** como sea necesario, con tal que se cumplan simultáneamente las siguientes dos condiciones:

▼ la altura de cada **FAJA** debe garantizar un "área" a la que corresponda una fuerza de tracción que sea a lo sumo igual a la fuerza de compresión permanente que produce sobre la sección de la pared la unidad de acero pretensado que se decida utilizar (caracterizada por su área a_p y por su tensión permanente de tesado), aunque se puede asegurar mejor una compresión permanente para el Estado en Carga que se alcanza con un incremento del efecto del pretensado permanente. Esta condición conduce a la siguiente igualdad:

$$A_i = [\sigma_{bd}] \cdot e_a \cdot h_i = p_{p\alpha} \quad (7) \text{ siendo } p_{p\alpha} = a_p \cdot \sigma_{p\alpha} \quad (8)$$

en las que:

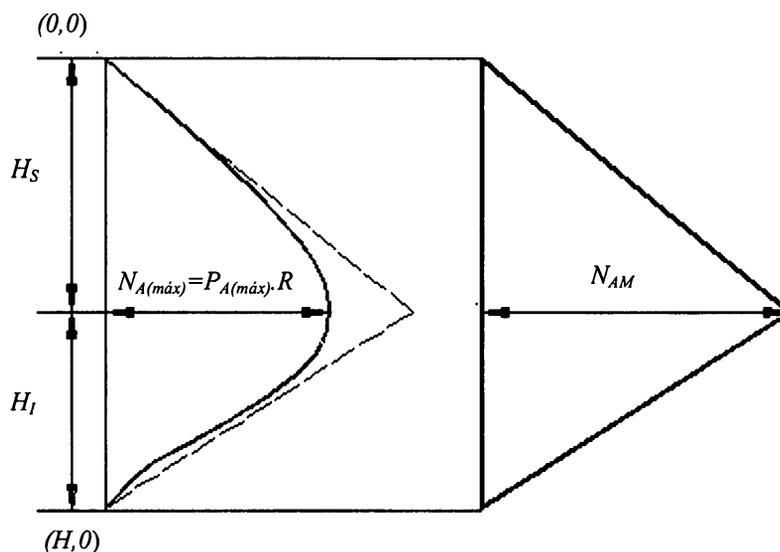


Fig.2 Transformación del diagrama real de tracciones anulares en otro bilineal equivalente.

A_i y h_i : área (fuerza) a tracción y altura, respectivamente, de la i -ésima FAJA.

$[\sigma_{bd}]$: tensión permanente de compresión deseada para el Estado en Carga.

e_a : espesor de la pared del depósito.

$p_{p\alpha}$: fuerza unitaria permanente ejercida por el pretensado en cada FAJA (compresión).

a_p : área unitaria del acero pretensado.

$\sigma_{p\alpha}$: tensión permanente de tesado.

▼ la suma de las alturas de todas las **FAJAS** coincide con la altura de la pared, o sea:

$$\sum_{i=1}^n h_i = H \quad (9)$$

Nótese cómo el problema se reduce a definir en cuántas **FAJAS** (n) debe ser dividido el diagrama de Tracciones y qué altura le corresponde a cada una. La cantidad de **FAJAS** se corresponderá con la cantidad de unidades de acero que se requieren (para un tipo particular de acero y una tensión permanente preestablecida), mientras que sus posiciones se pueden definir fácilmente a partir del centroide de cada **FAJA**, dependientes de sus alturas.

Presentado el problema de esta manera parece tener una solución sencilla, sin embargo, si se aceptaran las leyes de variación de las Presiones Anulares tal cual son, realmente no lo es tanto a causa del carácter no lineal que ellas presentan y se necesitaría, para evaluar el área de cada **FAJA**, un proceso de integración verdaderamente laborioso de leyes que dependen del producto de funciones trigonométricas y exponenciales,

salvo para el caso en que la pared pueda desplazarse horizontalmente en ambos extremos (C-I) al que corresponde una función de tracción anular lineal de fácil integración.

Para evitar esta complicación analítica, y dando lugar al buen sentido práctico de la ingeniería, se propone sustituir el diagrama real de tracciones anulares por otro diagrama equivalente, generalmente bilineal, definido por dos funciones rectas de pendiente opuesta que se intercepten a la profundidad en que se origina la máxima tracción sobre la pared.

En la Fig. 2 se muestra esta transformación, indicándose el diagrama real de tracciones para un caso genérico y el diagrama bilineal equivalente que le corresponde.

Para garantizar durante esta transformación que el diagrama "real" quede inscrito totalmente en el diagrama equivalente, es necesario asegurar que al menos una de sus dos Ramas esté representada por la recta de mayor pendiente, y la otra condicionada a ella.

En la práctica esto puede lograrse evaluando en una cantidad finita de secciones la tracción anular real correspondiente, obteniéndose un arreglo de puntos cuyas coordenadas son (z_i, N_{Ai}) . Si las rectas de cada Rama parten de ambos extremos de la pared, o sea, del punto $(0, 0)$ para la Rama Superior y del $(H, 0)$ para la Inferior (aceptando que aun cuando pueda existir una tracción anular en el extremo superior de la pared producto de las dimensiones del depósito y de la posibilidad de desplazamiento de su extremo superior, su magnitud es tan pequeña que puede despreciarse), y se obliga además a que ambas se intercepten a la profundidad H_s correspondiente a la máxima tracción anular, la pendiente de las dos Ramas y el valor N_{AM} medido en el diagrama equivalente, pueden ser determinados según la siguiente metodología:

1. definir

$$m_s = (N_{A(i)/Z_i})_{max} \quad \text{para } z_i \leq H_s \quad (10)$$

$$m_i = (N_{A(i)/Z_i})_{max} \quad \text{para } z_i > H_s \quad (11)$$

2. evaluar la máxima tracción anular en el diagrama equivalente para ambas pendientes, es decir:

$$N_{AM}^s = m_s \cdot H_s \quad (12)$$

$$N_{AM}^i = m_i \cdot H_i = m_i \cdot (H - H_s) \quad (13)$$

3. para garantizar que la interceptación de ambas rectas se origine a la profundidad H_s , o sea, en el punto de coordenadas (H_s, N_{AM}) , el valor de N_{AM} debe ser definido de la siguiente manera:

• Si $N_{AM}^s > N_{AM}^i$, entonces $N_{AM} = N_{AM}^s$ y la pendiente de la Rama Inferior debe ser rectificadas a $m_i = N_{AM}/H_i$

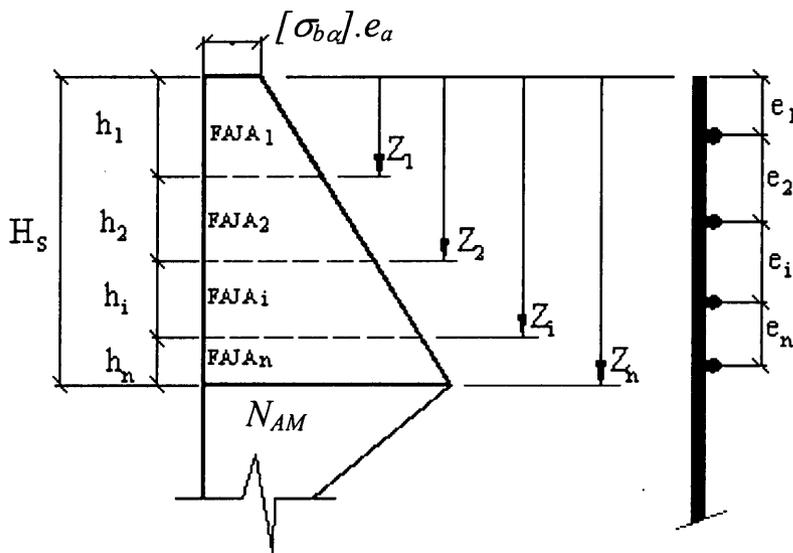


Fig. 3 División en Fajas de la Rama Superior del diagrama bilineal trapezoidal.

- Si $N_{AM}^s = N_{AM}^i$, entonces $N_{AM} = N_{AM}^s = N_{AM}^i$ y las pendientes calculadas al inicio se aceptan.
- Si $N_{AM}^s < N_{AM}^i$, entonces $N_{AM} = N_{AM}^i$ y la pendiente de la Rama Superior debe ser rectificadas a $m_s = N_{AM}/H_s$

Nótese que esta modelación sólo transforma al diagrama real en otro equivalente que posee la singular característica de quedar definido por dos funciones rectas que permiten definir áreas (fuerzas) sin necesidad de recurrir a molestas leyes de integración. Sin embargo, con el pretensado se procura la más de las veces garantizar una compresión permanente que aleje la posibilidad de la formación y abertura de las fisuras de origen tensional que limitan la vida útil de la estructura.

Por lo tanto al diagrama de tracciones que debe contrarrestar el pretensado (en este caso el equivalente) debe adicionársele la compresión admisible del hormigón que se desee para el Estado en Carga, convirtiéndose entonces el diagrama bilineal triangular en otro trapezoidal (Fig. 3)

ANÁLISIS DE LA RAMA SUPERIOR

En la Fig 3 se muestra la porción del diagrama bilineal equivalente que corresponde a esta Rama, dividida en Fajas de altura h_i y ubicándose en cada una, a la profundidad de su centroide, un refuerzo pretensado.

El diseño de la armadura pretensada obliga a definir sus dos rasgos más distintivos: cantidad y ubicación de este refuerzo. Ambos dependen fundamentalmente de la altura de las Faja y para su determinación es suficiente aplicar a cada una

la condición formulada por medio de la ecuación (7), llegándose a demostrar por inducción para la *i*-ésima Faja que:

$$z_i^2 + a_s \cdot z_i - i \cdot b_s = 0 \quad (14)$$

a la que corresponde como única solución con sentido físico:

$$z_i = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_s^2 + (4b_s) \cdot i} - a_s \right) \quad (15)$$

siendo:

$$a_s = \frac{2 \cdot H_s \cdot e_a \cdot [\sigma_{b\alpha}]}{N_{AM}} \quad (16)$$

y

$$b_s = \frac{2 \cdot H_s \cdot p_{p\alpha}}{N_{AM}} \quad (17)$$

Sin embargo, es de mayor interés conocer la altura de la Faja en lugar de la posición de su sección más profunda, pero resulta evidente que para la *i*-ésima se verifica que su altura viene dada por:

$$h_i = z_i - z_{(i-1)}$$

Si ahora se sustituyen las leyes de z_i y $z_{(i-1)}$ según (15), se obtiene:

$$h_i = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a_s^2 + (4b_s) \cdot i} - a_s \right] - \frac{1}{2} \left[\sqrt{a_s^2 + (4b_s) \cdot (i-1)} - a_s \right]$$

Para acomodar esta expresión se propone realizar el siguiente cambio de variable

$$C_i^s = a_s^2 + (4b_s) \cdot i \quad (18)$$

Demostrándose finalmente la ecuación que permite evaluar la altura de cada Faja:

$$h_i = \frac{1}{2} \left[\sqrt{C_i^s} - \sqrt{C_i^s - 4b_s} \right] \quad (19)$$

Se observa que la ecuación (19) conduce siempre a un número real, pues para todo $i \geq 1$, $C_i^s > 0$ y que $(4b_s)$.

Ya están creadas las condiciones para determinar la cantidad de Fajas en que debe ser dividida esta Rama de manera que todas satisfagan la condición expresada en (7).

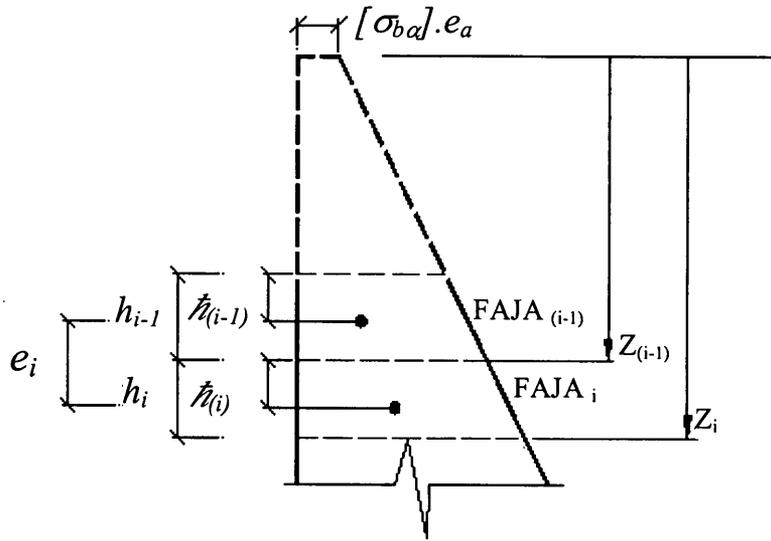


Fig.4 Ubicación del centroide en la *i*-ésima Faja.

En efecto, como el valor de H_s se conoce y además que para $i=n$ se verifica que $H_s = z_n$, recurriendo a la ecuación (16) se obtiene:

$$H_s = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a_s^2 + (4b_s) \cdot n_s} - a_s \right] \Rightarrow (2H_s + a_s)^2 = \left(\sqrt{a_s^2 + (4b_s) \cdot n_s} \right)^2$$

demostrándose finalmente que

$$n_s = \frac{H_s(H_s + a_s)}{b_s} \quad (20)$$

En la práctica el valor de n_s pudiera no ser un entero en cuyo caso se debe aproximar al entero inmediato superior o inferior, y como su magnitud coincide con la cantidad de unidades de acero a disponer, sólo resta definir la separación a que deben colocarse unas de otras.

Para ello es necesario conocer el centroide (h) de cada Faja y en la **Fig.4** se indica su posición para el caso genérico de la *i*-ésima.

Como todas las Fajas son trapezoidales (incluso la primera siempre que $[\sigma_{b\alpha}]$), el centroide de cada una se rige por una ley del tipo:

$$h_i = \frac{N_A^s + 2N_A^i}{3(N_A^s + N_A^i)} \cdot h_i$$

$$\text{siendo } N_A^s = [\sigma_{b\alpha}] \cdot e_a + \frac{N_{AM}}{H_s} z_{(i-1)}$$

$$\text{y } N_A^i = [\sigma_{b\alpha}] \cdot e_a + \frac{N_{AM}}{H_s} z_i$$

sustituyendo las expresiones de N_A^s y N_A^i , considerando los coeficientes (a , b y C_i) definidos anteriormente y teniendo en cuenta la expresión genérica de h_i , se llega a demostrar que:

$$h_i = \frac{2 \cdot \sqrt{C_i^s} + \sqrt{C_i^s - 4b_s} + 3a_s}{6 \cdot \sqrt{C_i^s} + 6 \cdot \sqrt{C_i^s - 4b_s} + 12a_s} \cdot \left(\sqrt{C_i^s} - \sqrt{C_i^s - 4b_s} \right)$$

para todo valor de $i \geq 1$ (21)

La misma expresión (21) permite hallar también el centroide de la Faja (i-1) con sólo sustituir "i" por (i-1). Nótese que de los tres coeficientes de que depende (z) únicamente C_i^s lo hace de "i" y se demuestra que $C_{(i-1)}^s = C_i^s - 4b_s$, entonces:

$$h_{(i-1)} = \frac{2 \cdot \sqrt{C_i^s - 4b_s} + \sqrt{C_i^s - 8b_s} + 3a_s}{6 \cdot \sqrt{C_i^s - 4b_s} + 6 \cdot \sqrt{C_i^s - 8b_s} + 12a_s} \cdot \left(\sqrt{C_i^s - 4b_s} - \sqrt{C_i^s - 8b_s} \right)$$

para todo valor $i \geq 2$ (22)

Ya ahora resulta fácil deducir la ley de espaciamento entre dos barras consecutivas cualesquiera, pudiéndose comprobar que:

$$e_1 = h_1 \quad \text{para } i = 1 \quad (23.1)$$

$$e_i = h_{(i-1)} - h_{(i-1)} + h_i \quad \text{para } i \geq 2 \quad (23.2)$$

ANÁLISIS DE LA RAMA INFERIOR

Las deducciones anteriores correspondientes a la Rama Superior son perfectamente generalizables a este caso. En efecto, si para el análisis de la Rama Inferior se traslada el origen del sistema de coordenadas al borde inferior de la Pared, bastaría con hacer $H_s = H_i$ para poder aplicar las expresiones anteriormente deducidas. En la **TABLA 1** se ofrece un resumen de la formulación final del modelo, incluyendo la de esta Rama.

Además, tal y como se presentan las ecuaciones se aprecia que admiten el caso particular en que sólo se desee anular la tracción anular provocada por el empuje hidrostático sin procurar una compresión permanente en la pared para el Esta-

TABLA 1. Resumen del Modelo analítico para el diseño de la armadura circunferencial de pretensado

MODELO ANALÍTICO PARA EL "PRETENSADO CIRCUNFERENCIAL"

PARÁMETRO	RAMA SUPERIOR		RAMA INFERIOR	
	PRETENSADO TOTAL [σ_{ba}] $\neq 0$	PRETENSADO PARCIAL [σ_{ba}] = 0	PRETENSADO TOTAL [σ_{ba}] $\neq 0$	PRETENSADO PARCIAL [σ_{ba}] = 0
CONSTANTE "a"	$a_s = \frac{2 \cdot H_s \cdot e_a \cdot [\sigma_{ba}]}{N_{AM}}$	$a_s = 0$	$a_i = \frac{2 \cdot H_i \cdot e_a \cdot [\sigma_{ba}]}{N_{AM}}$	$a_i = 0$
CONSTANTE "b"	$b_s = \frac{2 \cdot H_s \cdot p_{pa}}{N_{AM}}$		$b_i = \frac{2 \cdot H_i \cdot p_{pa}}{N_{AM}}$	
COEFICIENTE "C _i "	$C_i^s = a_s^2 + (4b_s) \cdot i$	$C_i^s = (4b_s) \cdot i$	$C_i^i = a_i^2 + (4b_i) \cdot i$	$C_i^i = (4b_i) \cdot i$
CANTIDADES DE UNIDAD DE REFUERZO	$n_s = \frac{H_s(H_s + a_s)}{b_s}$	$n_s = \frac{H_s^2}{b_s}$	$n_i = \frac{H_i(H_i + a_i)}{b_i}$	$n_i = \frac{H_i^2}{b_i}$
POSICIÓN DEL CENTROIDE DE LA FAJA "i" [h _i]	$\frac{2 \cdot \sqrt{C_i^s} + \sqrt{C_i^s - 4b_s} + 3a_s}{6 \cdot \sqrt{C_i^s} + 6 \cdot \sqrt{C_i^s - 4b_s} + 12a_s} \cdot \left(\sqrt{C_i^s} - \sqrt{C_i^s - 4b_s} \right)$	$2 \cdot \sqrt{b_s} \left[\sqrt{i} - \sqrt{(i-1)} \right]$	$\frac{2 \cdot \sqrt{C_i^i} + \sqrt{C_i^i - 4b_i} + 3a_i}{6 \cdot \sqrt{C_i^i} + 6 \cdot \sqrt{C_i^i - 4b_i} + 12a_i} \cdot \left(\sqrt{C_i^i} - \sqrt{C_i^i - 4b_i} \right)$	$2 \cdot \sqrt{b_i} \left[\sqrt{i} - \sqrt{(i-1)} \right]$
POSICIÓN DEL CENTROIDE DE LA FAJA "(i-1)" [h _(i-1)]	$\frac{2 \cdot \sqrt{C_i^s - 4b_s} + \sqrt{C_i^s - 8b_s} + 3a_s}{6 \cdot \sqrt{C_i^s - 4b_s} + 6 \cdot \sqrt{C_i^s - 8b_s} + 12a_s} \cdot \left(\sqrt{C_i^s - 4b_s} - \sqrt{C_i^s - 8b_s} \right)$	$2 \cdot \sqrt{b_s} \left[\sqrt{(i-1)} - \sqrt{(i-2)} \right]$	$\frac{2 \cdot \sqrt{C_i^i - 4b_i} + \sqrt{C_i^i - 8b_i} + 3a_i}{6 \cdot \sqrt{C_i^i - 4b_i} + 6 \cdot \sqrt{C_i^i - 8b_i} + 12a_i} \cdot \left(\sqrt{C_i^i - 4b_i} - \sqrt{C_i^i - 8b_i} \right)$	$2 \cdot \sqrt{b_i} \left[\sqrt{(i-1)} - \sqrt{(i-2)} \right]$
ESPACIAMIENTO DEL REFUERZO	$e_1 = h_1$ $e_i = h_{(i-1)} - h_{(i-1)} + h_i$		para $i = 1$ para todo $i \geq 2$	

DATOS DEL MODELO a_p , σ_{pa} , H_s , H_i , N_{AM}

do en Carga. Con solo hacer $[\sigma_{bd}]$, se obtiene $a=0$, simplificándose apreciablemente el juego de ecuaciones. En la misma **TABLA 1** se incluyen, además, las expresiones para cuando sea esta la condición de diseño.

Por último sería necesario considerar la influencia en el Momento Flector y el Esfuerzo de Corte que ejerce sobre las ménsulas el pretensado circunferencial, tal y como lo ejerce el líquido contenido; sin embargo, razones de espacio sugieren diferir el tratamiento de este aspecto para un próximo Artículo.

APLICACIÓN DEL MODELO AL DISEÑO DE LA ARMADURA PRETENSADA

Con la intención de aplicar el modelo recién presentado se propone encontrar la separación vertical del refuerzo pretensado circunferencial que requiere un depósito de agua empotrado en la base y libre en la corona (**C- III**) de **10 000 m³** de capacidad, si se desea que para el Estado en Carga exista en la sección transversal de la pared una compresión permanente y uniforme sobre el hormigón de **0.5 Mpa**, empleándose un cable de alto límite elástico cuya sección transversal es de **4.60 cm²** sometido a una tensión permanente de tesado de **800 Mpa**.

Se desprejiciará la presencia del acero ordinario circunferencial presente en la pared.

SOLUCIÓN

En la **Tabla 2** se ofrecen las magnitudes de la Presión Anular $P_{A(z)}$, Momento Flector $M_{(z)}$ y Corrimiento Radial $u_{p(z)}$, a los que se ha llegado utilizando el Programa de computación **WCALDEP** basado en el modelo propuesto por los autores de este artículo, además de la profundidad a la que se origina la mayor Presión Anular y su magnitud.

1. Definición del diagrama bilineal equivalente

Reconociéndose que en este caso la máxima tracción anular se da a una profundidad de **5.6 m**, a la misma que deben interceptarse las dos rectas del diagrama equivalente, es necesario definir las pendientes de ambas ramas y la magnitud de la máxima tracción anular N_{AM} correspondiente a este diagrama. (**DIAGRAMA A**).

Estos resultados conducen a la siguiente conclusión:

$$m_{s(max)}=223.2\text{kN/m}^2 \Rightarrow N_{AM}^s=m_{s(max)} \cdot H_s=(223.2) \cdot (5.6)=1250 \text{ kN/m}$$

$$m_{l(max)}=259.2\text{kN/m}^2 \Rightarrow N_{AM}^l=m_{l(max)} \cdot H_l=(259.2) \cdot (4.4)=1140 \text{ kN/m}$$

Al verificarse que $N_{AM}^s > N_{AM}^l$, entonces $N_{AM} = N_{AM}^s = 1250$ kN/m y la pendiente de la rama superior coincide con la calculada, mientras que en el caso de la rama inferior se debe recti-

TABLA 2. Esfuerzos internos y corrimiento radial originados por el empuje hidrostático

Diámetro: 36.0 m	Altura: 10.0 m	Espesor de la Pared: 0.5 m	
Z (m)	$P_{A(z)}$ (kN/m ²)	$M_{(z)}$ (kN·m/m)	$u_{p(z)}$ (cm)
0.0	0.9	0.0	0.2
1.0	12.4	0.7	3.3
2.0	23.8	3.8	6.4
3.03	4.6	10.6	9.3
4.0	43.7	21.8	11.8
5.0	49.6	36.5	13.4
5.6	50.7	45.4	13.2
6.0	50.1	50.4	13.5
7.0	43.2	53.8	11.7
8.0	28.7	29.7	7.8
9.0	10.5-	46.0	2.8
10.0	0.00	-200.6	0.0

DIAGRAMA A

RAMA SUPERIOR DEL DIAGRAMA BILINEAL

Z (m)	$P_{A(z)}$ (kN/m ²)	$N_{A(i)}=P_{A(z)} \cdot R$ (kN/m)	$m_s=N_{A(i)}/Z_i$ (kN/m ²)
1.0	12.4	223.2	223.2
2.0	23.8	428.4	214.2
3.0	34.6	622.8	207.6
4.0	43.7	786.6	196.6
5.0	49.6	892.8	178.6
5.6	50.7	912.6	162.9

RAMA INFERIOR DEL DIAGRAMA BILINEAL

Z (m)	$P_{A(z)}$ (kN/m ²)	$N_{A(i)}=P_{A(z)} \cdot R$ (kN/m)	$m_l=N_{A(i)}/Z_i$ (kN/m ²)
(10-9.0)=1.0	10.5	189.0	189.0
(10-8.0)=2.0	28.7	516.6	258.3
(10-7.0)=3.0	43.2	777.6	259.2
(10-6.0)=4.0	50.1	901.8	225.4
(10-5.6)=4.4	50.7	912.6	207.4

ficar, es decir: $m_s = m_{s(max)} = 223.2\text{kN/m}^2$ y $m_l = N_{AM}/H_l = (1250)/(4.4) = 284.1 \text{ kN/m}^2$

2. Determinación de las constantes del Modelo para ambas Ramas.

Se refiere a las constantes (a, b, C_i) que para las condiciones impuestas al diseño adoptan los siguientes valores:

TABLA 3

RAMA INFERIOR					RAMA INFERIOR				
FAJA	C _i (m ²)	h _i (cm)	h̄ _i (cm)	e _i (cm)	FAJA	C _i (m ²)	h _i (cm)	h̄ _i (cm)	e _i (cm)
1	13.46	95	51	51	6	65.26	33	17	35
2	23.82	60	31	75	7	75.62	31	16	32
3	34.18	48	24	53	8	85.98	29	15	30
4	44.54	41	21	45	9	96.34	27	14	28
5	54.90	37	19	39	10	106.7	26	13	26

RAMA SUPERIOR					RAMA SUPERIOR				
FAJA	C _i (m ²)	h _i (cm)	h̄ _i (cm)	e _i (cm)	FAJA	C _i (m ²)	h _i (cm)	h̄ _i (cm)	e _i (cm)
1	18.2	102	54	54	8	110.6	32	16	34
2	31.4	66	34	81	9	123.8	30	15	31
3	44.6	54	28	60	10	137.0	29	15	30
4	57.8	46	23	49	11	150.2	27	14	28
5	71.0	40	20	43	12	163.4	26	13	26
6	84.2	37	19	39	13	176.6	25	12	25
7	97.4	35	17	35	14	189.8	24	12	25

$$a_s = \frac{2 \cdot H_s \cdot e_a \cdot [\sigma_{b\alpha}]}{N_{AM}} = \frac{2 \cdot (5.6m) \cdot (0.50m) \cdot (500 \text{ kN/m}^2)}{(1250 \text{ kN/m})} = 2.24m$$

$$b_s = \frac{2 \cdot H_s \cdot p_{p\alpha}}{N_{AM}} = \frac{2 \cdot (5.6m) \cdot (368 \text{ kN})}{(1250 \text{ kN/m})} = 3.30 \text{ m}^2$$

$$C_i^s = (a_s)^2 + (4b_s) \cdot i = 5 + 13.2i$$

$$a_i = \frac{2 \cdot H_i \cdot e_a \cdot [\sigma_{b\alpha}]}{N_{AM}} = \frac{2 \cdot (4.4m) \cdot (0.50m) \cdot (500 \text{ kN/m}^2)}{(1250 \text{ kN/m})} = 1.76m$$

$$b_i = \frac{2 \cdot H_i \cdot p_{p\alpha}}{N_{AM}} = \frac{2 \cdot (4.4m) \cdot (368 \text{ kN})}{(1250 \text{ kN/m})} = 2.59 \text{ m}^2$$

$$C_i^i = (a_i)^2 + (4b_i) \cdot i = 3.1 + 10.36i$$

3. Determinación de la cantidad de alambres a utilizar en cada Rama

Esta cantidad, que coincide con la cantidad de FAJAS en que debe ser dividida cada Rama viene dada por las siguientes expresiones:

$$n_s = \frac{H_s(H_s + a_s)}{b_s} = \frac{5.6m(5.6m + 2.24m)}{3.30m^2} = 13.3 \Rightarrow n_s = 14u$$

$$n_i = \frac{H_i(H_i + a_i)}{b_i} = \frac{4.4m(4.4m + 1.76m)}{2.59m^2} = 10.4 \Rightarrow n_i = 10u$$

4. Espaciamiento vertical de los alambres.

Se trata ahora de encontrar la separación vertical entre dos alambres consecutivos cualesquiera a partir de la altura de cada Faja y de la posición de su centroide. Para mayor claridad, los resultados se ofrecen en la Tabla 3.

Una buena práctica constructiva permitirá decidir el espaciamiento definitivo de este refuerzo uniformándolo convenientemente por tramos, aunque no debe perderse de vista que la distribución anteriormente calculada origina un empuje horizontal equivalente al del líquido almacenado, llegándose a convertir teóricamente en su verdadera imagen si se hubiera considerado $[\sigma_{b\alpha}] = 0$, en cuyo caso el pretensado puede ser asimilado como un líquido virtual de densidad igual a la del líquido almacenado.

CONCLUSIÓN

El enfoque seguido para el tratamiento del pretensado circunferencial es coherente con las leyes de variación de la Tracción Anular originadas por el líquido y como tal deriva en ecuaciones algebraicas muy sencillas que permiten determinar con suficiente precisión la cantidad y posición del acero requerido.

Lo más singular del modelo es la transformación del diagrama "real" de tracciones en otro equivalente que lo encierra, definido por dos ramas rectas que facilitan la deducción de las expresiones de diseño; sin embargo, más allá de cualquier modelo yace el juicio personal de todo buen calculista y luego de una constante interacción entre hombre y modelo, se podrá obtener el mejor diseño para una situación dada.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

-Sobrino Aranda, L.: "Cálculo de Paredes de Depósitos Cilíndricos de hormigón armado". El Ateneo. Buenos Aires. 1946.
 -Baykov, V.N y Sigalov, E.E.: "Estructuras de hormigón armado". 2da. Edición. MIR. 1986.
 -Glover, C.W.: "Structural Precast Concrete". Lennox House. London. 1964
 -Leonhart, F.: "Hormigón Pretensado. Proyecto y Construcción". Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y el Cemento. 1967. ●