

La fórmula de pandeo de Euler en los métodos de diseño actuales

The Euler buckling formula in the current design methods

Josep María Pons Poblet. Ingeniero Industrial

Profesor departamento Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería. josep.maria.pons@upc.edu

Miquel Casafont Ribera. Dr. Ingeniero Industrial

Profesor departamento Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería. miquel.casafont@upc.edu

Miquel Ferrer Ballester. Dr. Ingeniero Industrial

Profesor departamento Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería. miquel.ferrer@upc.edu

Resumen: Según el Diccionario de la Lengua Española, se entiende por pandeo la flexión de una viga, provocada por una compresión lateral. Este fenómeno ya fue estudiado por Euler (1707-1783) que propuso una fórmula, conocida como la fórmula de Euler, la vigencia de la cual hoy en día todavía es válida. Esta depende del tipo de material de la pieza, de la geometría de su sección, de las uniones con el exterior y de su longitud. El objetivo del presente artículo es, aprovechando que recientemente se ha celebrado el tricentenario de su nacimiento, presentar el fenómeno, la metodología de cálculo y su evolución en el campo del diseño de estructuras de acero.

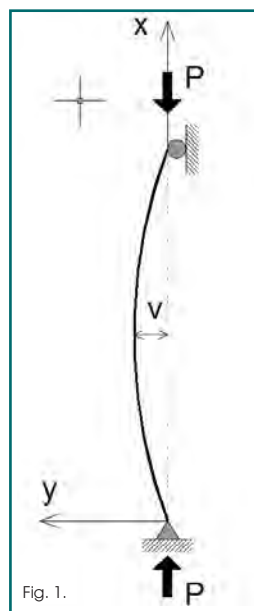
Palabras Clave: Euler; Pandeo; Carga crítica de pandeo; Acero

Abstract: According to the Diccionario de la Lengua Española, the most authoritative Spanish dictionary, buckling is the bending of a beam due to a lateral compression force. This phenomenon was already investigated by Euler (1707-1783), who developed a formula, known as the Euler formula, which is still being applied today. The formula depends on the material of the member, the geometry of its cross-section, type of end supports and its length. To further commemorate the 300th anniversary of Euler's birth (1707), this paper describes the phenomenon of buckling, design methods and their evolution in the area of steel structures.

Keywords: Euler; Buckling; Critical buckling load; Steel

Leonard Euler (1707-1783), ha sido sin duda uno de los científicos más influyentes y relevantes de todos los tiempos. Son conocidos sus trabajos en el campo de las matemáticas, mecánica de sólidos, mecánica de fluidos, electromagnetismo y un largo etcétera. Pero Euler también tuvo una contribución, si se nos es permitido, una importante contribución, en el mundo de la ingeniería civil; concretamente en la resistencia de materiales presentando una fórmula que, actualmente, todavía es relativamente vigente, para calcular los fenómenos de inestabilidad por pandeo en piezas prismáticas.

Según el Diccionario de la Lengua Española, se entiende por pandeo, la flexión de una viga, provocada por una compresión



lateral. Este fenómeno puede llegar a ser muy importante y trascendente especialmente en elementos esbeltos o de gran longitud como pueden ser los perfiles metálicos por ejemplo.

“Experimentalmente se tiene que cuando la fuerza compresora se aproxima a este valor (carga crítica), comienza a curvarse la pieza, y esta deformación lateral aumenta con tal rapidez al crecer la fuerza compresora que una carga igual a la crítica es corrientemente suficiente para producir el colapso completo de la estructura... De todo lo expuesto se deduce que el pandeo de la piezas comprimidas, es decir, su estabilidad elástica, es un problema de gran impor-

tancia práctica, especialmente en aquellas estructuras para las que las dimensiones de las secciones se han ido disminuyendo por el empleo de materiales cada vez más resistentes y con el deseo de quitar peso”(1).

Consideraciones históricas

El fenómeno del pandeo ya venía siendo estudiado, aunque indirectamente, antes que Euler enunciara su ley.

Encontramos ejemplos en los estudios de Robert Hooke y Jacob Bernoulli (2). Euler, estudia el fenómeno y publica unos resultados el año 1744 en la memoria “Additamentum I, De curvis elasticis” en “Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes”, Lausanne. De hecho es un libro sobre cálculo variacional.

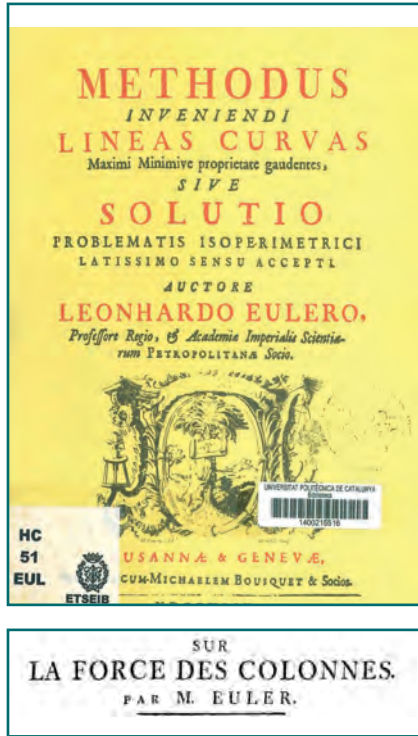
Él mismo profundiza el tema y saca unos nuevos resultados en la memoria publicada en Berlín el año 1757.

La fórmula de Euler es una de las más antiguas de la ingeniería y como hemos indicado todavía continúa teniendo vigencia hoy en día.

Planteamiento del problema

Para la deducción de la expresión de la carga crítica hemos seguido la metodología empleada por los autores de libros de texto básicos de resistencia de materiales del siglo XX. El motivo ha sido que utilizan expresiones del álgebra y el cálculo modernos, mucho más fáciles de comprender hoy en día, así como por el idioma a sabiendas que era el latín el empleado por Euler en la citada bibliografía del año 1744.

Por lo tanto, el procedimiento puede variar algo del formulado por Euler, no así los resultados obtenidos por el suizo.



Figs. 2 y 3.

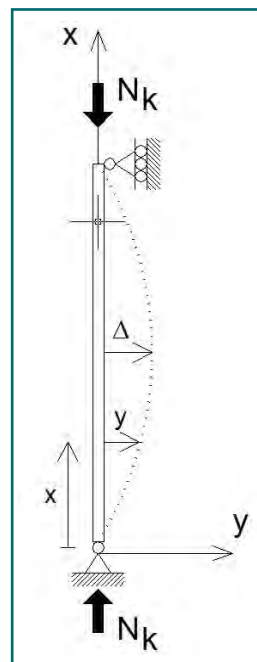


Fig. 4.

Se estudia el fenómeno partiendo de la ecuación simplificada de la elástica, ya conocida en su tiempo.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

Como el valor del momento se puede evaluar como $M = N_k y$ obtenemos, por lo tanto, la conocida ecuación;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{N_k y}{EI}$$

La resolución del problema nos permitirá encontrar la carga crítica definida como aquel valor de N_k que es suficiente para mantener el eje de la pieza en la posición curvada indicada en la figura de forma que los desplazamientos y sean infinitesimos.

Resolución del problema

Se plantea el siguiente cambio de variable;

$$c^2 = \frac{N_k}{EI}$$

obteniendo por lo tanto, la ecuación ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c^2 y$$

es decir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + c^2 y = 0$$

La propuesta de solución nos conduce a una del tipo.

$$y = A \sin cx + B \cos cx$$

Aplicando las condiciones de contorno ($x=0$ $y=0$ i $x=L$ $y=0$), obtenemos $B=0$ y $0= A \sin cL$ que nos conducirán a las soluciones propuestas.

Soluciones propuestas

Partiendo de la relación anterior $0 = A \sin cL$, obtenemos $cL = n\pi$.

(1) S.Timoshenko. Citado en la bibliografía.
 (2) Robert Hooke (Freshwater, Inglaterra, 1636 -Londres, 1703); Jacob Bernoulli (Basilea, Suiza, 1654 - Basilea, Suiza, 1705).

Como
$$c = \sqrt{\frac{N_k}{EI}}$$

se deduce
$$\sqrt{\frac{N_k}{EI}} L = n\pi$$

que nos permite encontrar, para $n=1$, el valor de la *carga crítica* o *carga de Euler* como el valor obtenido mediante la expresión:

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Otros autores también han estudiado casos de vigas con condiciones de enlace diferentes del anterior; doblemente-empotrada, empotrada-articulada, etc., obteniendo unos valores presentes en cualquier manual de resistencia de materiales y que continúan siendo vigentes hoy en día. Estas nuevas fórmulas toman como base, nuevamente, la fórmula de Euler variando sólo unos parámetros numéricos en función de las anteriormente citadas condiciones de enlace de la pieza.

Tal y como se ha comentado, el concepto de pandeo ha sido muy importante y todavía lo continúa siendo en el cálculo de resistencia de materiales y por extensión al cálculo de estructuras (metálicas preferentemente)

Limitaciones de la fórmula de Euler

Poco tiempo después que Euler dedujera la expresión de la carga crítica, Claude-Louis Navier (3), ya se dio cuenta que ésta da valores de fallo por pandeo más grandes que los obtenidos experimentalmente.

A partir de ensayos realizados con piezas de madera y hierro, llegó a la conclusión que la carga crítica de Euler representa un límite superior de la capacidad resistente a compresión de una columna.

En realidad, la carga crítica de Euler sería válida únicamente para columnas absolutamente perfectas, soportando fuerzas de compresión perfectamente aplicadas sobre el centroide de su sección. Dentro el campo del diseño de estructuras de acero, que es el tema en el que se centra este escrito a partir de ahora, una pieza perfecta sería aquella que cumpla las siguientes condiciones:

1. Su directriz es perfectamente recta.
2. Se encuentra en un estado tensional neutro, sin tensiones residuales (provocadas, por ejemplo, por su proceso de fabricación).
3. El comportamiento del material es infinitamente elástico y lineal.
4. Las propiedades mecánicas del material son exactamente las mismas en todos sus puntos.

El hecho que estas condiciones nunca se cumplen provoca que la carga de fallo sea, en las columnas habituales de acero o de otros materiales de uso común en la construcción, inferior a la carga crítica de Euler.

Pese a que la expresión deducida por Euler tiene una validez muy limitada desde el punto de vista práctico, se debe remarcar que interviene de forma directa o indirecta en todas las formulaciones actuales para el cálculo de la capacidad resistente de piezas que experimentan pandeo. Por lo tanto, se puede decir que en cierto modo la fórmula de la carga crítica es todavía hoy relativamente vigente.

Acto seguido, se presenta una breve explicación sobre cómo se desarrolló el método de cálculo del pandeo de la normativa actual europea de diseño de estructuras de acero "Eurocode 3: Design of steel structures", que es el mismo método que recoge el "Código Técnico de la Edificación" aplicado hoy en día en el estado español. Esta explicación permite demostrar la importancia y la vigencia del trabajo realizado por Euler, tanto en el campo teórico como en el de la práctica del cálculo de estructuras.

El método que se describe es el resultado de una serie de investigaciones que ha llevado a cabo principalmente la *European Convention for Constructional Steelwork (ECCS)* desde el año 1955. Cabe decir que es similar a métodos de normativas desarrolladas en otros países y similar, también, a los métodos aplicados a otros materiales.

El efecto de una curvatura inicial

Thomas Young (4) fue el primero a destacar que las imperfecciones tenían un efecto importante sobre la resistencia de las columnas. Remarcó la dificultad para aplicar cargas perfectamente centradas y el hecho que las columnas nunca son perfectamente rec-

(3) Claude-Louis Navier (Dijon, Francia. 1785 -París, 1836)

(4) Thomas Young (Milverton, Inglaterra. 1773 - Londres, 1826)

tas; tienen una curvatura o pre-flecha inicial y_0 (Figura 5).

Él mismo dedujo una expresión, que tiene en cuenta la curvatura inicial, para calcular la relación entre el desplazamiento en el punto medio de la columna, y , y la carga aplicada. El punto de partida es el mismo que el de Euler, pero ahora incorpora la pre-flecha inicial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + c^2(y + y_0) = 0$$

A partir de esta ecuación se puede deducir fácilmente la expresión que se presenta a continuación (5), que permite determinar de forma lo suficiente aproximada del desplazamiento total y_T :

$$y_T = y_0 + y = \frac{y_0}{1 - \frac{N}{N_k}}$$

Se remarca que y_T será función de la carga crítica de Euler, N_k . Además, si se traza una curva $N - y_T$, se puede ver claramente como a medida que N se acerca a N_k el desplazamiento aumenta muy rápidamente. De hecho, la curva es asintótica con esta carga (Figura 6).

Siendo rigurosos, el comportamiento de una columna no es éste. Si en lugar de tomar la ecuación simplificada de la elástica, se hubiera trabajado, tanto en el caso de curvatura inicial nula como en el de curvatura no nula, con la ecuación exacta, las curvas obtenidas no serían asintóticas a N_k (ver la figura 7).

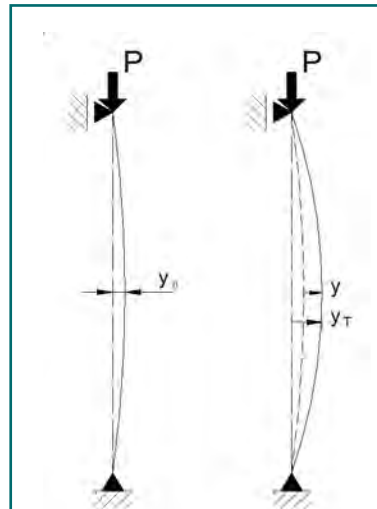


Fig. 5.

Sin embargo, continúa siendo cierto que los desplazamientos son muy grandes cuando nos acercamos a esta carga.

Tan grandes, que las columnas utilizadas habitualmente en construcción acostumbra a fallar por plastificación del material (N_U) mucho antes de llegar a niveles próximos a N_k .

Efectivamente, si al hacer la verificación de las secciones de la columna, se tiene cuenta el efecto del momento producido por y_T ,

$$\frac{N_y}{A} + \frac{N_y \cdot y_0}{\left(1 - \frac{N_y}{N_k}\right) \cdot W} = f_y$$

se puede ver que el inicio de la plastificación se acostumbra a producir en una zona donde la curva exacta y la aproximada son muy parecidas. En la ecuación anterior, N_y es la carga axial que provoca el inicio de la plastificación del material, A es el área de la sección, W el módulo resistente y f_y la tensión de límite elástico del material.

Multiplicando y dividiendo por A en diferentes puntos de la expresión anterior, se tiene:

$$\sigma_y + \frac{\sigma_y \cdot y_0}{\left(1 - \frac{\sigma_y}{\sigma_k}\right)} \cdot \frac{A}{W} = f_y$$

$$\circ: (f_y - \sigma_y) \cdot (\sigma_k - \sigma_y) = \eta \cdot \sigma_y \cdot \sigma_k$$

(5) Z.P. Bazant y L. Cedolin. Citado en la bibliografía.

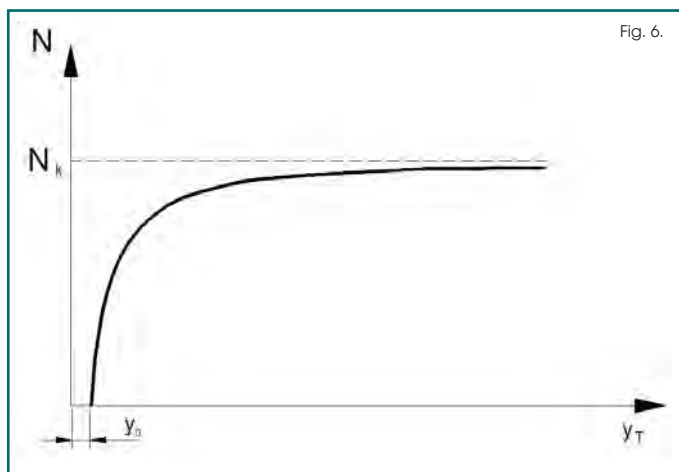


Fig. 6.

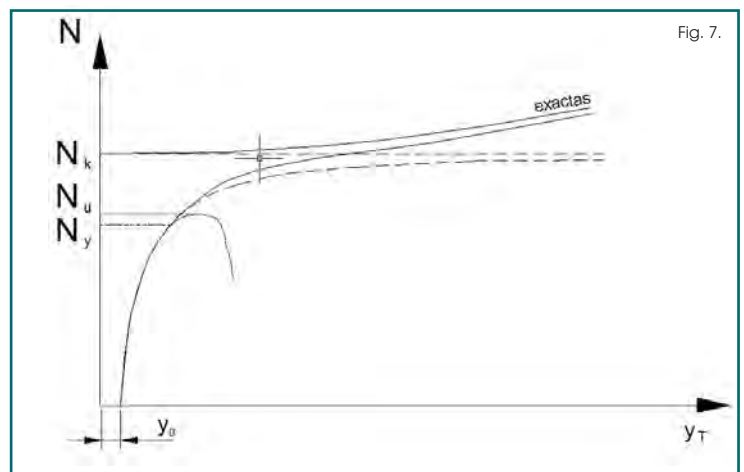


Fig. 7.

donde $\eta = \gamma_0 \frac{A}{W}$

indica el efecto de la imperfección geométrica.

Estas expresiones son fundamentales para la deducción de las formulaciones que presentan los códigos actuales de diseño de estructuras de acero para determinar la resistencia a pandeo de las columnas.

Las curvas de pandeo de la European Convention for Construccional Steelwork (ECCS)

Una forma de representar la resistencia a pandeo de una columna es mediante la denominada hipérbola de Euler, que es la relación entre la carga crítica y su longitud (Figura 8).

El tramo horizontal de la curva se explica por el hecho que en este caso se está representando únicamente la resistencia a pandeo elástico de la pieza. Las columnas por debajo de una determinada longitud fallan antes por plastificación que por pandeo. Este fallo se produce cuando los puntos de la pieza llegan a la tensión de límite elástico y es independiente de su longitud. Hay otras teorías que admiten la posibilidad de pandeo en el campo plástico (6).

La curva anterior se acostumbra a representar en función de un parámetro denominado esbeltez,

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{L}{\sqrt{\frac{I}{A}}}$$

donde *i* es el radio de giro de la sección, que se define como la raíz cuadrada de la relación entre la inercia de la sección alrededor del eje de pandeo considerado y su área. La curva $N_k \cdot \lambda$ (o $\sigma_k = N_k / A - \lambda$) permite representar la resistencia a pandeo de piezas de cualquier sección. Ahora bien, tal y como ya se ha apuntado anteriormente, la carga crítica de Euler sólo es un valor ideal de la carga de fallo por pandeo de una columna. El valor real es inferior debido a la existencia de imperfecciones: excen-

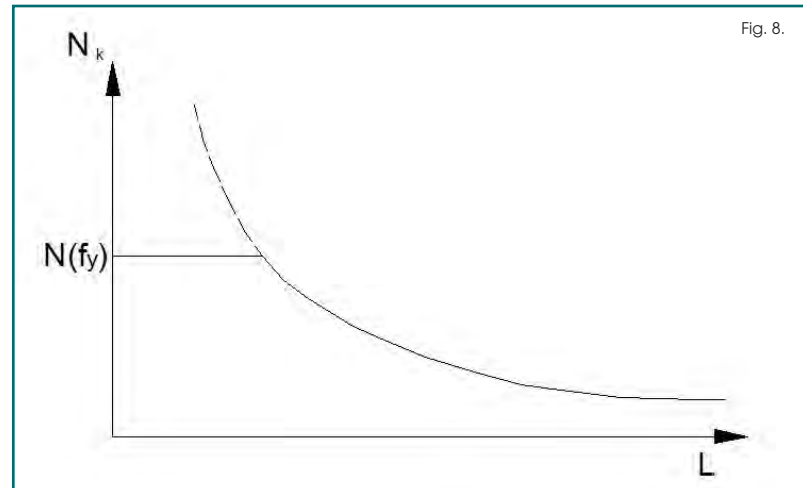
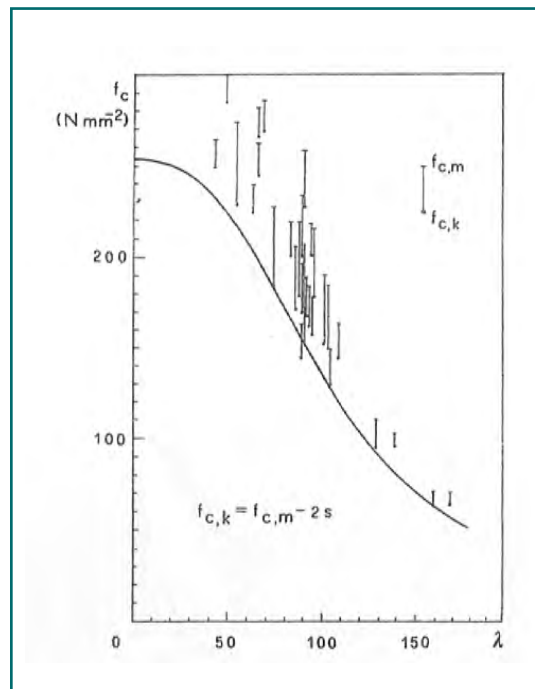


Fig. 8.

tricidades en los puntos de aplicación de las cargas, existencia de curvaturas iniciales, tensiones residuales y variación de las propiedades del material en los diferentes puntos de las piezas.

Esto hace que, en realidad, la única forma precisa de determinar la capacidad de carga de una columna sea mediante ensayos experimentales. En el campo de la estructura de acero, fue la ECCS quien se encargó de realizar estos ensayos. La campaña experimental comprendió las siguientes operaciones: medida de las imperfecciones geométricas iniciales (medida de la curvatura inicial y de las dimensiones de los elementos de las secciones); medida de las imperfecciones estructurales

Fig.9.



(tensiones residuales y variación de la tensión de límite elástico y de la tensión de ruptura en los diferentes puntos de las secciones); ensayo de columnas cortas para determinar experimentalmente la tensión de límite elástico promedio del acero; y, finalmente, el ensayo de las columnas a compresión. Se ensayaron más de 1500 perfiles: diferentes tipos de doble t (IPE, HE, HEM), perfiles cajón, tubos circulares y tubos cuadrados.

El valor característico de la resistencia a pandeo se definió como el valor promedio de la carga experimental de fallo menos dos desviaciones tipos.

La figura 9 (7) muestra la curva de la resistencia característica resultante de los perfiles IPE.

(7) G. Ballio y F. Mazzolani. Citado en la bibliografía.

(6) J. Marco. Citado en la bibliografía.

Cabe apuntar que las cargas de fallo experimental se complementaron con valores obtenidos de simulaciones numéricas que tenían en cuenta los diferentes tipos de imperfecciones. Estas serían realizadas básicamente por H. Beer and C. Schulz que publicaron sus resultados el año 1970 (8).

Una de las principales conclusiones de todo el estudio fue que no se puede trabajar con la misma curva para todos los tipos de sección. Se definieron inicialmente tres curvas de pandeo que permiten determinar la resistencia de diferentes tipos de perfiles:

- a. La curva de las secciones tubulares.
- b. La curva de las secciones cajón.
- c. La curva de las secciones doble t de alas anchas pandeando respecto el eje débil.

La figura 10 (9) muestra qué curva corresponde a cada tipo de sección.

Donde:

$$\bar{N} = \chi = \frac{\sigma_y}{f_y} \text{ es el factor reductor,}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_y} \text{ es la esbeltez relativa, } \lambda_y = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$$

El uso la esbeltez relativa permite que las curvas sean válidas para cualquier calidad de acero (f_y). Al final se añadieron dos curvas más. La curva d para tener cuenta el importante efecto negativo de las tensiones residuales en perfiles de paredes gruesas (por encima de los 40 mm), y la curva a₀ para las piezas fabricadas con aceros de alta resistencia.

Fórmulas por el cálculo de la resistencia a pandeo

El problema de las curvas ECCS es que se dedujeron a partir de la experimentación y la simulación y, en principio, no podían ser derivadas mediante una formulación analítica. R. Maquoi y J. Rondal, en el año 1978 (10), resolvieron esta cuestión, transformando las curvas en unas fórmulas. El punto de partida de su trabajo son las ecuaciones que resultaron del estudio realizado por Thomas Young:

(8) H. Beer and C. Schulz. Citado en la bibliografía.
 (9) G. Ballio y F. Mazzolani. Citado en la bibliografía.
 (10) R. Maquoi y J. Rondal. Citado en la bibliografía.

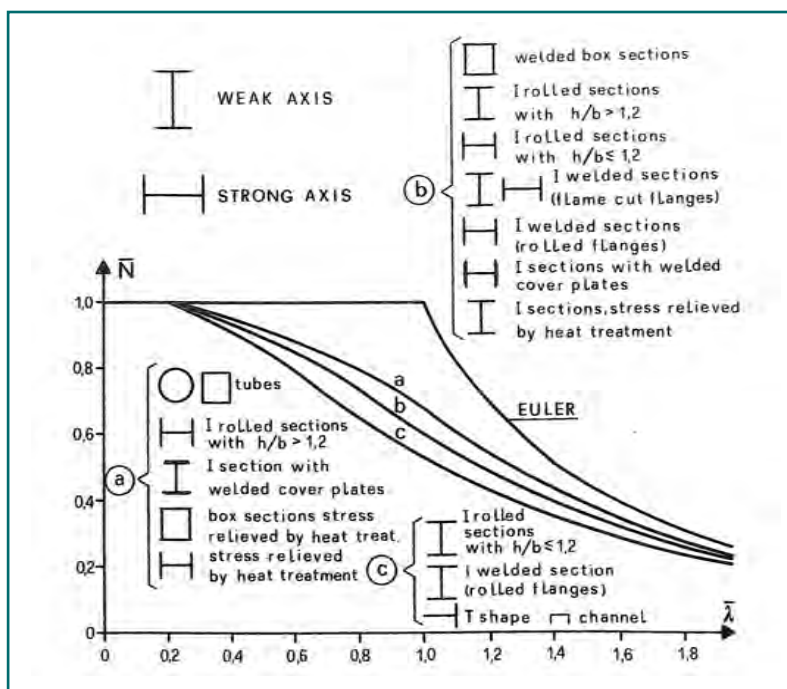


Fig. 10.

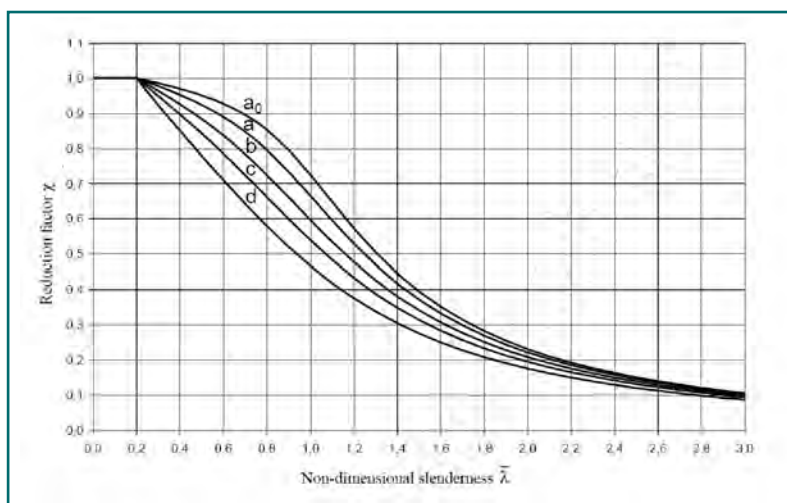
$$(f_y - \sigma_y) \cdot (\sigma_k - \sigma_y) = \eta \cdot \sigma_y \cdot \sigma_k$$

Conocida la relación entre las tensiones σ_y y f_y , i las esbelteces λ y $\bar{\lambda}$,

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_y} = \frac{L}{\pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}} = \sqrt{\frac{A \cdot L^2 \cdot f_y}{\pi^2 \cdot E \cdot I}} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_k}}$$

la expresión anterior se puede poner en función de los parámetros que se usan modernamente para definir

Fig. 11.



las curvas de pandeo:

$$(1-\chi) \cdot (1-\chi \cdot \bar{\lambda}^{-2}) = \eta \cdot \chi$$

El problema acaba reduciéndose a encontrar el factor de imperfección que hace que la anterior expresión reproduzca las curvas experimentales de la ECCS.

Este factor se tomó igual a:

$$\frac{e \cdot A}{W} = \eta = \alpha \cdot (1-0.2)$$

El coeficiente α , que recibe el nombre de coeficiente de imperfección, se ajusta para cada curva de pandeo

Curva	a_0	a	b	c	d
□	0.125	0.206	0.339	0.489	0.756

A. Robertson el año 1925 ya había propuesto un coeficiente de imperfección similar. En estas condiciones se tiene:

$$(1-\chi) \cdot (1-\chi \cdot \bar{\lambda}^{-2}) = \alpha \cdot (1-0.2) \cdot \chi$$

Operando:

$$\bar{\lambda}^{-2} \cdot \chi^2 - \chi \cdot (1 + \alpha \cdot (1-0.2) + \lambda^2) + 1 = 0$$

De donde:

$$\chi = \frac{(1 + \alpha \cdot (1-0.2) + \lambda^2)}{2 \cdot \lambda^2} - \frac{1}{2 \cdot \lambda^2} \sqrt{(1 + \alpha \cdot (1-0.2) + \lambda^2)^2 - 4 \cdot \lambda^2}$$

Denominando:

$$\phi = (1 + \alpha \cdot (1-0.2) + \lambda^2)$$

se puede deducir que el factor reductor:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda^2}}$$

Finalmente, la resistencia a pandeo de la columna vale:

$$N_b = N_u = \chi \cdot A \cdot f_y$$

En los apartados anteriores, se ha podido comprobar que el resultado de las investigaciones que llevó a cabo la ECCS fueron unas curvas y unas fórmulas que dependen de forma indirecta de la carga crítica de Euler, a través del concepto de esbeltez relativa:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_k}} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_k}}$$

Esta expresión se usa constantemente en el proceso de cálculo de estructuras de acero, puesto que el pandeo es uno de los puntos determinantes del diseño. Por lo tanto, se cree razonable afirmar que la fórmula de la carga crítica es vigente, aunque podríamos decir que se utiliza de una forma diferente a la que Euler propuso.

La fórmula de Euler en las normativas de cálculo

Para acabar de mostrar la vigencia del trabajo realizado por Euler, se adjuntan a continuación siete párrafos de diferentes normativas de diseño de estructuras de acero.

Se incluyen párrafos de normas del estado español y de normativas de gran relevancia a nivel internacional (11):

1. Ministerio de Fomento (Gazeta de Madrid 24/10/1925).

"En las piezas sometidas a compresión en el sentido de su longitud susceptibles de experimentar flexión a causa de su longitud grande relativamente a sus dimensiones transversales, su trabajo elástico obtenido por división de aquéllas por su sección neta se multiplicará por el coeficiente de aumento para contrarrestar aquella tendencia".

2. Gobierno de la Nación (Decreto de 22 de julio de 1941)

Pandeo. Las piezas sometidas a compresión centrada se calcularán a pandeo. Para ello se multiplicará la carga por un coeficiente y se calculará la sección por la fórmula:

$$\sigma = \frac{\varpi P}{F}$$

(11) Convenientemente citadas en la bibliografía.

3. CTE-DB SE-A. Código Técnico de la Edificación. Documento Básico de Seguridad Estructural. Acero (17 de Marzo de 2006).

6.3.2.1 Barras rectas de sección constante y axil constante

- 1 Se denomina esbeltez reducida $\bar{\lambda}$, a la relación entre la resistencia plástica de la sección de cálculo y la compresión crítica por pandeo, de valor

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} \quad (6.18)$$

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{L_k}\right)^2 \cdot E \cdot I$$

siendo

E módulo de elasticidad;

I momento de inercia del área de la sección para flexión en el plano considerado;

L_k longitud de pandeo de la pieza, equivalente a la distancia entre puntos de inflexión de la deformación de pandeo que la tenga mayor. Para los casos canónicos se define en la tabla 6.1 en función de la longitud de la pieza. Para condiciones diferentes para la carga axial o la sección se define en apartados posteriores.

4. Instrucción EAE. Documento 0. (Noviembre de 2004).

35.1.2. Curvas de pandeo

Para elementos con sección transversal constante sometidos a un esfuerzo axial de compresión de valor constante, el valor de χ para la esbeltez adimensional adecuada $\bar{\lambda}$ se determinará del modo siguiente:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad \text{siendo } \chi \leq 1,0$$

donde

$$\Phi = 0.5 \left[1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2 \right]$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}} \quad \text{en secciones de clase 1, 2 y 3}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{ef} f_y}{N_{cr}}} \quad \text{en secciones de clase 4}$$

α es el coeficiente de imperfección

N_{cr} es el esfuerzo axial crítico elástico para el modo de pandeo considerado, obtenido con las características de la sección transversal bruta.

5. Eurocode 3: Design of steel structures – Parte 1-1: General rules and rules for buildings (Mayo 2005).

6.3.1.2 Buckling curves

(1) For axial compression in members the value of χ for the appropriate non-dimensional slenderness $\bar{\lambda}$ should be determined from the relevant buckling curve according to:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad \text{but } \chi \leq 1,0 \quad (6.49)$$

where $\Phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} \quad \text{for Class 1, 2 and 3 cross-sections}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff}f_y}{N_{cr}}} \quad \text{for Class 4 cross-sections}$$

α is an imperfection factor

N_{cr} is the elastic critical force for the relevant buckling mode based on the gross cross sectional properties.

6. ANSI/AISC 360-05. Specification for Structural Steel Buildings. American Institute of Steel Construction (9 de Marzo de 2005).

E3. COMPRESSIVE STRENGTH FOR FLEXURAL BUCKLING OF MEMBERS WITHOUT SLENDER ELEMENTS

This section applies to compression members with *compact* and *noncompact sections*, as defined in Section B4, for uniformly compressed elements.

User Note: When the torsional unbraced length is larger than the lateral unbraced length, this section may control the design of wide flange and similarly shaped columns.

The *nominal compressive strength*, P_n , shall be determined based on the *limit state of flexural buckling*.

$$P_n = F_{cr} A_g \quad (E3-1)$$

The *flexural buckling stress*, F_{cr} , is determined as follows:

(a) When $\frac{KL}{r} \leq 4,71 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$ (or $F_e \geq 0,44F_y$)

$$F_{cr} = \left[0,658 \frac{F_e}{F_y} \right] F_y \quad (E3-2)$$

(b) When $\frac{KL}{r} > 4,71 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$ (or $F_e < 0,44F_y$)

$$F_{cr} = 0,877 F_e \quad (E3-3)$$

where

F_e = elastic critical buckling stress determined according to Equation E3-4, Section E4, or the provisions of Section C2, as applicable, ksi (MPa)

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (E3-4)$$

7. Specification for the Design of Cold - Formed Steel Structural Members. American Iron Steel Institute. (7 de enero de 2004).

1.2.1.1 Flexural, Torsional, or Torsional-Flexural Buckling

The nominal axial strength, P_{ne} , for flexural, torsional, or torsional-flexural buckling is
for $\lambda_c \leq 1.5$

$$P_{ne} = \left(0.658^{\lambda_c^2} \right) P_y \quad (Eq. 1.2.1-1)$$

for $\lambda_c > 1.5$

$$P_{ne} = \left(\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) P_y \quad (Eq. 1.2.1-2)$$

where $\lambda_c = \sqrt{P_y / P_{cre}}$ (Eq. 1.2.1-3)

Referencias:

-Gaceta de Madrid 24/10/1925. Ministerio de Fomento.
-BOE-11 marzo de 1941. Gobierno de la Nación. Presidencia del Gobierno.
-HEYMAN, JACQUES (2004), *Análisis de estructuras, un estudio histórico*, Instituto Juan de Herrera, Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
-TIMOSHENKO, S. (1941), *Resistencia de materiales*, Espasa Calpe, Madrid 1967.
-ARGÜELLES ÁLVAREZ, R. (1981), *Cálculo de estructuras*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de montes. Sección de publicaciones.
-EULER, "Methous Inveniendi Lineas curvas", Servei de publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona

-BAZANT, Zdenek P; CEDOLIN, Luigi (1991) *Stability of structures*, New York, Oxford University Press.
-MARCO, Jaime (1997) *Fundamentos para el cálculo y diseño de estructuras metálicas de acero laminado*, Madrid, McGraw-Hill.
-BALLIO, Giulio; MAZZOLANI, Federico M (1983) *Theory and design of steel structures*, New York, Chapman and Hall.
-BEER, H., SCHULZ G. (1970) "Bases théoretiques des courbes européennes de flambement", *Construction Métallique*, 3,37-57.
-MAQUOI, R.; RONDAL J. (1978) "Mise en équation des nouvelles courbes européennes de flambement", *Construction Métallique*, 1,17-29.
-*Código técnico de la edificación. Documento Básico SE-A. Seguridad estructural Acero*, Ministerio de la Vivienda, Madrid (2006).

-*Instrucción EAE. Documento 0*, Ministerio de Fomento, Madrid (2004).
-*Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1.1: General rules and rules for buildings*, European Comitee for Standardization, Brussels (2005).
-*ANSI/AISC 360-05. Specification for Structural Steel Buildings*, American Institute of Steel Construction, Chicago (2005).
-*Specification for the Design of Cold - Formed Steel Structural Members*, American Iron Steel Institute, (2004).
-Hacemos constar que las figuras 9 y 10 han sido extraídas de la correspondiente bibliografía: BALLIO, Giulio; MAZZOLANI, Federico M (1983) *Theory and design of steel structures*, New York, Chapman and Hall.